Sains & Matematika
ISSN 2302-7290
Vol. 2 No. 2, April 2014

Ekspansi Cantor dan Perluasannya

Cantor Expansion and It's Extension

Sanjung Nova, R. Sulaiman*
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya
Jalan Ketintang, Surabaya 60231

ABSTRAK

Tulisan ini membahas tentang himpunan Cantor, ekspansi Cantor dan ekspansi perluasan Cantor. Ekspansi tersebut merupakan ekspresi yang lain dari suatu bilangan selain yang biasanya yaitu sistem desimal dan biner. Pada tulisan ini diuraikan bagaimana cara mengekspresikan bilangan asli dalam ekspansi Cantor dan ekspansi perluasan Cantor. Beberapa contoh diberikan dan pada bagian akhir ditunjukkan bahwa ekspansi Cantor merupakan kasus khusus dari ekspansi perluasan Cantor.

Kata kunci: sistem biner, himpunan Cantor, ekspansi Cantor, ekspansi perluasan Cantor

ABSTRACT

This article discuss Cantor set, Cantor expansion and extended of Cantor expansion. These expansions are another ways to express a number except decimal system and binary system. How to express a natural number with Cantor expansion and extended of Cantor expansion are discribed too. Some examples are given and we proved that Cantor expansion is special case of extended of Cantor expansion.

Key words: *binary system, Cantor set, Cantor expansion, extended of Cantor expansion*

PENDAHULUAN

Sistem penulisan bilangan yang umum digunakan adalah sistem desimal. Sistem desimal menggunakan sepuluh angka, yaitu: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dan 9. Ada juga penulisan dengan sistem biner dan terner. Sistem biner hanya menggunakan dua angka, yaitu 0 dan 1, sedangkan sistem terner menggunakan tiga angka yaitu 0, 1 dan 2. Ada sistem lain dalam penulisan bilangan, yaitu dengan ekspansi Cantor. Sistem ini seringkali digunakan dalam ilmu komputer.

Ekspansi Cantor menggunakan faktorial dalam penulisannya. Bilangan asli dapat dinyatakan dalam ekspansi Cantor. Ekspansi Cantor berbasis $S = (1, 2, 3, \ldots, n)$. Ekspansi Cantor dapat diperluas dengan mengambil S yang lebih umum.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan studi pustaka. Kajian teoretis dilakukan dari berbagai sumber. Beberapa definisi, teorema yang mendasari sistem ini disajikan sebagai berikut. Beberapa konsep terkait yang diperlukan dalam pembahasan ini adalah konsep barisan dan konvergensi barisan, penulisan sistem biner dan terner. Uraian terkait dengan hal tersebut disajikan berikut ini.

Penulisan bilangan dengan sistem biner menggunakan dua angka, yaitu 0 dan 1, sedangkan sistem terner menggunakan tiga angka, yaitu 0, 1 dan 2. Kedua sistem ini sudah kita ketahui sejak di sekolah menengah atas. Beberapa contoh penulisan dalam sistem biner adalah: i) bilangan 13 dinyatakan sebagai $(1101)_2$ karena $13 = (1\times2^3)+(1\times2^2)+(1\times2^1)+(1\times2^0)$,

* Alamat Korespondensi:
e-mail: sulaimanraden@yahoo.com

ii) bilangan 20 dinyatakan sebagai $(10100)_2$ karena $20 = (1\times2^4)+(1\times2^3)+(1\times2^2)+(1\times2^1)+(1\times2^0)$. Beberapa contoh penulisan dalam sistem terner adalah: i) bilangan 19 dinyatakan sebagai $(201)_3$ karena $19=(2\times3^2)+ (2\times3^1)+ (2\times3^0)$, ii) bilangan 64 dinyatakan sebagai $(2101)_3$ karena $64=(2\times3^3)+(2\times3^2)+(2\times3^1)+(2\times 3^0)$

Bilangan pecahan $x \in (0,1)$ dinyatakan dalam sistem terner dilakukan dengan langkah (Bartle & Sherbert, 2011): i) membagi interval (0,1) menjadi tiga subinterval yang sama panjang, ii) menentukan letak x pada subinterval itu, jika terletak pada subinterval pertama, maka digit pertama adalah 0, jika terletak pada subinterval kedua, maka digit pertama adalah 1 dan jika terletak pada sub interval ketiga, maka digit pertama adalah 2, iii) membagi subinterval tempat x berada menjadi tiga subinterval yang sama panjang, kemudian lakukan langkah ii) begitu seterusnya. Dengan teknik itu, maka bilangan $\frac{4}{9}$ dinyatakan sebagai $(0{,}11)_3$. Itu berarti $\frac{4}{9}$ $=(1\times3^{-1})+ (1\times3^{-2})$.

Himpunan Cantor

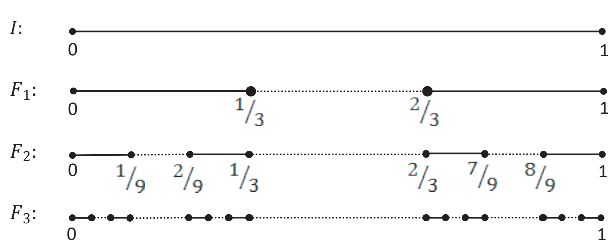
Himpunan Cantor adalah bagian dari I=[0,1] yang didefinisikan dengan proses sebagai berikut (Morsden, 1974).

(1) I dibagi menjadi tiga bagian yang sama. Misalkan F_1 adalah himpunan yang diperoleh dari I dengan menghapus interval buka sepertiga yang di tengah yakni $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ Jadi, $F_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$.

(2) Interval $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ dan $\left[\frac{2}{3},1\right]$ yang merupakan subinterval F_1 masing-masing dibagi menjadi tiga bagian yang sama. Subinterval buka yang di tengah dihapus. Misalkan F_2 adalah gabungan subinterval tutup yang tersisa. Jadi,
$F_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$.

Jika kita lanjutkan proses ini dengan cara menghapus subinterval buka yang di tengah dari subinterval yang tersisa sebelumnya, maka diperoleh $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$

Himpunan F_n diperoleh dari F_{n-1} dengan menghapus sepertiga subinterval buka dari setiap subinterval tutup pembentuk F_{n-1}. Secara diagram proses tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Himpunan Cantor C didefinisikan sebagai:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Himpunan F_n terdiri atas 2^n interval-interval tertutup yang saling asing.

Misalkan E_n menotasikan gabungan interval-interval buka yang terhapus pada tahap ke-n, maka diperoleh:

$$E_1 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), E_2 = \left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right),$$

$$E_3 = \left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right).$$

Himpunan Cantor C dapat dinyatakan sebagai:

$$C = [0,1] - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Pada proses pembentukan himpunan Cantor, selalu mengeluarkan sepertiga interval bagian tengahnya sehingga anggota-anggota himpunan Cantor tidak menempatkan angka 1 pada ekspansi ternernya.

Dengan demikian, himpunan Cantor dapat didefinisikan sebagai himpunan bilangan-bilangan real $x \in [0,1]$ yang mempunyai ekspansi terner $x = 0{,}x_1x_2x_3 \ldots$ dengan xn Î {0,2} .

Contoh 3.1.1:

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa $\frac{1}{4}$ merupakan anggota himpunan Cantor C. Akan ditunjukkan bahwa $\frac{1}{4}$ dapat dinyatakan dalam ekspansi terner dengan nilai setiap digitnya adalah 0 atau 2.

Misalkan

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \cdots,$$

maka

$$x = \frac{1}{3^2}\left(2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \cdots\right)$$

$$x = \frac{1}{3^2}(2 + x)$$

$$9x = (2 + x)$$

$$x = \frac{1}{4}.$$

sedangkan $\frac{1}{4}$ $=(0{,}020202\ldots)_3$, jadi $\frac{1}{4} \in C$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Ekspansi Cantor

Definisi 3.2.1 (Galante, 2004):

Jika n adalah bilangan asli, maka bentuk Ekspansi Cantor dari n adalah $n=a_k(k!)+a_{k-1}(k-1)!+\ldots+a_2(2!)+a_1(1!)$, *dengan* $0 \le a_i \le i$.

Contoh 3.2.2:

i) Ekspansi Cantor dari 57 adalah 2(4!)+1(3!)+1(2!)+1(1!). Dengan demikian, 57 dapat dinyatakan sebagai $(2111)_c$.
ii) Ekspansi Cantor dari 41 adalah 1(4!)+2(3!)+2(2!)+1(1!).. Dengan demikian, 41 dapat dinyatakan sebagai $(1221)_c$.

Teorema 3.2.3:

Untuk setiap Bilangan Asli n berlaku

$$n! = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} i(i!)$$

Bukti :

Kita perhatikan bahwa 1!=1=1+0.0!
Ini berarti pernyataan di atas benar untuk n=1.
Asumsikan pernyataan benar untuk $n=k$, berarti

$$k! = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} i(i!).$$

Untuk $n=k+1$,

$$(k+1)! = k!\ (k+1)$$

$$= k!.k + k!$$

$$= k!.k + 1 + \sum_{i=0}^{k-1} i(i!).$$

(Rosen, 2003).

$$= 1 + \sum_{i=0}^{(k-1)+1} i(i!).$$

$$= 1 + \sum_{i=0}^{k} i(i!).$$

Ini menunjukkan bahwa

$$n! = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} i(i!),\ \ \forall n \in N.$$

Contoh 3.2.4:

a) 4!=1+3.3!+2.2!+1.1!+0.0!=1+$\sum_{i=0}^{3} i(i!)$.
b) 6!=1+5.5!+4.4!+3.3!+2.2!+1.1!+0.0!
$= 1 + \sum_{i=0}^{5} i(i!)$.

Teorema 3.2.5:

Misalkan $S=(1,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n:x_i>\in N)$. Jika didefinisikan $P(n)=x_n, p(0)=1$ dan $P(n)=\prod_{i=0}^{n} p(i); n \in N$, maka untuk setiap $n \in N \cup \{0\}$ berlaku

$$P(n+1) = 1 + \sum_{i=0}^{n} (p(i+1)-1)P(i).$$

Bukti:

Kita perhatikan bahwa $P(0)=p(0)=1$ dan $P(1)=p(0).p(1)=P(0).p(1)$.
Untuk n=0,

$$1 + \sum_{i=0}^{n} (p(i+1)-1)P(i) = 1 + (p(1)-1)P(0)$$

$$= P(0) + p(1).P(0) - P(0) = P(1).$$

Jadi, pernyataan benar untuk n=0.
Untuk n=1.

$$1 + \sum_{i=0}^{n} (p(i+1)-1)P(i)$$

$$= 1 + (p(1)-1)P(0) + (p(2)-1)P(1)$$

$$= 1 + (p(1)-1)P(0) + (p(2)-1).p(0).p(1)$$

$$= 1 + p(1).P(0) - P(0) + p(2).p(0).p(1) - p(0).p(1)$$

Karena $P(0)=p(0)$ dan $P(0)=1$ maka diperoleh:
Untuk n=1,

$$1 + \sum_{i=0}^{n} (p(i+1)-1)P(i)$$

$$= 1 + p(1).p(0) - 1 + p(2).p(0).p(1) - p(0).p(1)$$

$$= p(2).p(0).p(1) = P(2).$$

Jadi, pernyataan benar untuk n=1.
Misalkan pernyataan benar untuk $n=k$, berarti:

$$P(k+1) = 1 + \sum_{i=0}^{k} (p(i+1)-1)P(i).$$

Untuk $n=k+1$,

$$P((k+1)+1) = P(k+2) = p(k+2).P(k+1)$$

$$P((k+1)+1) = [p(k+2)-1].P(k+1) + P(k+1)$$

$$P((k+1)+1) = [p(k+2)-1].P(k+1) + 1 + \sum_{i=0}^{k} (p(i+1)-1)P(i).$$

$$P((k+1)+1) = 1 + \sum_{i=0}^{k+1} (p(i+1)-1)P(i).$$

Jadi, pernyataan benar untuk setiap $n \in N \cup \{0\}$.

Definisi 3.2.6 (Galante, 2004):
Misalkan S=$(1,x_1,x_2,x_3,\ldots x_n:x_i>1,\ x_i\in$N). Misalkan $n\in N$, perumuman ekspansi Cantor dari n terhadap S adalah

$$n = a_k.P(k) + a_{(k-1)}P(k-1) + \cdots + a_1P(1) + a_0P(0); 0 \le a_i < p(i+1); 0 \le i \le k$$

Contoh 3.2. 7:
Misalkan S=(1,2,4,6,8), maka:
$p(0) = 1, p(1) = 2, p(2) = 4, p(3) = 6$ dan $p(4) = 8$.
$P(0) = 1, P(1) = 2 \times 1 = 2, P(2) = 4 \times 2 \times 1 = 8$,
$P(3) = 6 \times 4 \times 2 \times 1 = 48$
$P(4) = 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 1 = 384$.
$407 = 1 \times 384 + 2 \times 8 + 3 \times 2 + 1 \times 1$.
$861 = 2 \times 384 + 1 \times 48 + 5 \times 8 + 2 \times 2 + 1 \times 1$.

Dengan demikian ekspansi perumuman Cantor terhadap S dari 407 dan 861 berturut-turut adalah $(10231)_S$ dan $(21521)_S$.

SIMPULAN

Jika n adalah bilangan asli, maka bentuk Ekspansi Cantor dari n adalah
$n=a_k(k!)+a_{k-1}(k-1)!+\ldots+a_2(2!)+a_1(1!)$, dengan $0\le a_k\le i$.
Misalkan $S=(1,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n:x_i>1,x_i\in N)$. Misalkan $n\in N$, perumuman ekspansi Cantor dari n terhadap S adalah

$$n = a_k.P(k) + a_{(k-1)}P(k-1) + \cdots + a_1P(1) + a_0P(0); 0 \le a_i < p(i+1); 0 \le i \le k$$

Ekspansi Cantor merupakan kasus khusus dari ekspansi perluasan Cantor, yaitu dengan mengambil S=(1,2,3,...,n).

DAFTAR PUSTAKA

Galante J, 2004. Generalized Cantor Expansion. *Mathematic Journal*, 5(1): 1-4.
Bartle RG and Sherbert DR, 2011. *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*. John Wiley and Sons, Inc.
Morsden JE, 1974. Elementary Classical Analysis. San Fransisco: Wott. Freeman and Company.
Rosen KH, 2003. *Discrete Mathematics and Its Applications Fifth Edition*. New York: The McGraw_Hill Companies, Inc.