Sains & Matematika
ISSN 2302-7290
Vol. 2 No. 1, Oktober 2013

Lemma Henstock untuk Suatu Fungsi Bernilai Vektor di dalam Ruang Metrik Kompak Lokal

(*The Henstock Lemma of a Vector Valued Function in a Locally Compact Metric Space*)

Manuharawati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
Kampus Ketintang Unesa, Jalan Ketintang Surabaya

ABSTRAK

Berdasarkan sistem interval S di dalam ruang metrik kompak lokal, diperoleh konsep sel di dalam ruang metrik kompak lokal, yaitu interval kompak di dalam S. Selanjutnya jika diberikan sel $E \in S$ dan fungsi $\delta : E \rightarrow R^+$ berhasil dibuktikan eksistensi partisi Perron $\delta \rightarrow$ *fine* pada sel E. Dengan partisi Perron $\delta \rightarrow$ *fine* pada sel E dibangun integral Henstock dari fungsi bernilai real di dalam ruang metrik kompak lokal nondiskret. Dengan menggeneralisasikan *range* dari fungsinya, yaitu himpunan semua bilangan real menjadi ruang vektor, berhasil dibangun integral Henstock suatu fungsi bernilai vektor pada suatu sel di dalam ruang metrik kompak lokal. Pada artikel ini dikaji syarat yang diperlukan agar Lemma Henstock berlaku pada ruang fungsi terintegral Henstock dari fungsi bernilai vektor di dalam ruang metrik kompak lokal nondiskret. Adapun metode penelitian yang digunakan adalah kajian pustaka, yang dilakukan dengan mengkaji teori-teori integral yang terkait, membangun konsep yang baru dan membuktikan teorema-teorema dengan penalaran matematika yang logis dan perhitungan yang benar.

Kata kunci: ruang metrik kompak lokal, partisi Perron $\delta \rightarrow$ *fine*, vektor

ABSTRACT

Based on an interval system S in a locally compact metric space, we have a cell in a locally compact metric space, i.e. an interval compact in S. In addition, if a cell E and a function $\delta : E \rightarrow R^+$ *are given, we have proven the exsistence of Perron* $\delta \rightarrow$ *fine partition on E. Using a Perron* $\delta \rightarrow$ *fine partition on a cell E, we can contruct a Henstock integral of a real valued function in a locally metric space nondiscrete. By generalizing a range function of its function, i.e. from a set of all real numbers to a vector space, we can construct a Henstock integral of a vector valued function on a cell in locally metric space nondiscrete. This research used a method of literature study, which was done by examining relative integral theories, building new concepts and proving theorems using logical mathematic reasoning as well as right calculation.*

Key words: *locally compact metric space, Perron* $\delta \rightarrow$ *fine partition, vector*

PENDAHULUAN

Banyak jenis integral yang digunakan dalam matematika terapan maupun pengembangan ilmu yang serumpun dengan teori integral, seperti regresi, fungsi kepadatan, dan teori persamaan diferensial. Jenis integral yang digunakan sebagian besar adalah integral Riemann dari fungsi bernilai real yang dibangun oleh G.F.B. Riemann pada tahun 1826–1866 (Jain & Gupta, 1986). Karena masih ada kelemahan pada teori

* Alamat Korespondensi:
e-mail: manuhara1@yahoo.co.id

integral Riemann, seperti adanya fungsi bernilai real dan terdefinisikan pada interval tertutup dan terbatas, tetapi tidak terintegral Riemann pada interval tersebut, namun teori ini menjembatani para pakar matematika untuk mengembangkan dan menyempurnakan integral Riemann, seperti H. Lebesgue pada tahun 1902, Henstock dan Kurzweil (Henstock, 1968) maupun Lee (1995). Penggunaan integral Henstock ini sudah terlihat antara lain pada hasil penelitian yang membuktikan adanya penyelesaian persamaan diferensial terhadap integral Henstock yang telah dilakukan oleh Bambang Soedijono pada tahun 1997 (Soedijono, 1997).

Terkait dengan perkembangan teori integral, Manuharawati pada tahun 2002 telah membangun sistem interval pada ruang metrik kompak lokal (Manuharawati, 2002), yang diikuti dengan dibentuknya integral Henstock dari fungsi bernilai real pada suatu sel di dalam ruang metrik kompak lokal (Manuharawati, 2002).

Dengan menggeneralisasikan range dari fungsinya, yaitu dari himpunan semua bilangan real ke ruang vektor, khususnya ruang vektor yang lengkap, dibangun pula integral jenis Riemann, yaitu integral Henstock dari fungsi bernilai vektor di dalam ruang metrik kompak lokal (Manuharawati & Yunianti, 2013). Selain mendefinisikan integral Henstock dari fungsi bernilai vektor, teori yang sangat penting yang telah dihasilkan di sini adalah karakteristik dari integral tersebut, yaitu sifat Cauchy (Manuharawati & Yunianti, 2013).

Sebagai kelanjutan penelitian, setelah berhasil dibuktikannya sifat Cauchy, penelitian ini mengkaji bentuk deskriptif integral Henstock dari fungsi bernilai vektor dan mencari syarat yang diperlukan agar Lemma Henstock pada integral fungsi bernilai vektor masih berlaku.

Pada teori integral jenis Riemann, termasuk integral Henstock, selalu didahului oleh eksistensi partisi pada suatu sel. Sebagai bentuk pengitlakan (generalisasi) dari integral Riemann, integral Henstock dari fungsi bernilai real memerlukan eksistensi partisi $\delta \rightarrow$ *fine* pada suatu sel , dalam arti bahwa setiap pasangan (x, A_x) di dalam partisi $\delta \rightarrow$ *fine* harus memenuhi $x \in A_x \subset N(x, \delta(x))$. Yang dimaksud $N(x, \delta(x))$ adalah persekitaran yang berpusat di titik x dengan jari-jari $\delta(x)$ dan sel adalah interval tertutup dan terbatas yang non-degenerade pada R. Dengan menggeneralisasikan sel pada R menjadi sel pada ruang metrik kompak lokal, Manuharawati membangun integral Henstock dari fungsi bernilai real (Manuharawati, 2002). Selanjutnya dengan menggeneralisasikan range dari fungsinya, yaitu dari R menjadi ruang vektor, berhasil dibangun integral Henstock dari fungsi bernilai vektor pada ruang metrik kompak lokal (Manuharawati & Yunianti, 2013). Pada penelitian yang disebut terakhir berhasil dibuktikan salah satu karakteristik suatu fungsi bernilai vektor terintegral pada suatu sel di dalam ruang metrik kompak lokal, yang disebut sifat Cauchy.

METODE PENELITIAN

Seperti pada penelitian yang dilakukan sebelumnya, metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah kajian pustaka, dalam arti mengkaji teori-teori integral, khususnya integral jenis Riemann maupun yang terkait melalui buku teks, jurnal, prosiding, atau internet.

Beberapa definisi dan sifat yang terkait yang digunakan dalam pembahasan, dituangkan dalam bagian berikut.

Di dalam ruang metrik kompak lokal (X,d), koleksi S $\subset 2^X$ yang tidak kosong disebut sistem interval (*system of intervals*) jika memenuhi:

(i) untuk setiap p ∈ X, {p}∈ S,
(ii) untuk setiap p ∈ X, jika cl(N(p,r)) kompak, maka N(p,r) ∈ S ,
(iii) jika A ∈ S, maka A konveks, cl(A) kompak, cl(A) ∈ S, dan int(A) ∈ S,
(iv) untuk setiap A, B ∈ S, A ∩ B ∈ S.
(v) untuk setiap A, B ∈ S terdapat Ci ∈ S, 1≤i≤n dengan {Ci, 1≤i≤n} tidak tumpang tindih dan

$$A - B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

Jika S merupakan sistem interval di dalam ruang metrik (X,d), setiap anggota S disebut interval.

Interval A ∈ S dikatakan degenerate jika int (A)=∅ dan non-degenerate, jika (A)=∅.

Sel merupakan interval kompak yang *non-degenerate*. Himpunan A ⊂ X disebut himpunan elementer (*elementary set*), jika A dapat disajikan sebagai gabungan hingga interval-interval. Jadi, A himpunan elementer jika dan hanya jika terdapat Ci ∈ S, (1 ≤ i ≤ n) sehingga

$$A = \cup_{i=1}^{n} C_i$$

Jika $E(X)$ menyatakan koleksi semua himpunan elementer yang termuat di dalam X, fungsi volume φ: $E(X) \rightarrow$ R disebut ukuran pada $E(X)$ jika:

(i) dan jika
(ii) φ (A) ≤ φ (B) untuk setiap A, B ∈ E (X) dengan A ⊂ B,
(iii) untuk setiap himpunan {Ai} ⊂ E(X) yang tidak tumpang tindih dengan $\cup_{i \in N} A_i \in E(X)$

Selanjutnya d i dalam artikel ini, dibatasi ruang metrik adalah kompak lokal nondiskret.

Jika diberikan himpunan elementer kompak (sel) E dengan $int(E) = \emptyset$ dan fungsi $\delta E \rightarrow R^+$, maka koleksi hingga pasangan sel-titik

$$p = \{(A_{xi}, C), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_{x}, x)\}$$

disebut Partisi Perron δ-fine pada E jika $x_i \in A_{x1} \subset N(xi, \delta(xi))$ dan $\{A_{xi}\}$ merupakan partisi pada E. Jika syarat

$A_{x1} \subset N(xi,\delta(xi))$ dihilangkan, maka partisi tersebut disebut partisi McShane δ-fine.

Jika diberikan himpunan elementer kompak (sel) $E \subset X$ dengan *int* $(E) = \varnothing$ dan fungsi $\delta E \to R^+$, maka terdapat partisi Perron δ-*fine* pada E. (Manuharawati, 2002). Lebih lanjut, jika fungsi δ_1:E $\to R^+$ dan δ_2: E $\to R^+$ dengan $\delta_1(x) \leq \delta_2(x)$ untuk setiap x $\in$ E, maka setiap partisi Perron δ_1-*fine* pada *E* merupakan partisi Perron δ-*fine* pada *E*. (Manuharawati, 2002).

Suatu fungsi $\|$ dari ruang Vektor *Y* (atas lapangan *K*) ke *R* disebut norm pada *Y* jika untuk setiap $x,y \in Y$ dan setiap $\alpha \in K$ memenuhi: (i)$\| x \| \geq 0$, (ii) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (iii)$\| \alpha X \| = |\alpha| \, |x|$, (iv) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Ruang vektor *Y* yang dilengkapi dengan norm $\| \ \|$ disebut ruang ber-norm. Jika $(Y, \| \ \|)$ ruang ber-norm, maka untuk setiap x, $y \in Y$ berlaku: (i) $\| x \| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$ dan (ii) $\| x + y \| \geq \| x \| - \| y \|$. Selanjutnya jika didefinisikan fungsi $d: Y \, x \, Y \to R$ dengan $d: (x,y) = \| x - y \|$, maka *d* merupakan metrik pada *Y* (Brown & Page, 1970). Metrik yang demikian disebut metrik yang dibangkitkan oleh norm $\| \ \|$.

Ruang ber-norm *Y* disebut ruang Banach, jika *Y* merupakan ruang ber-norm yang lengkap, dalam arti setiap barisan Cauchy pada *Y* adalah konvergen.

Selanjutnya untuk mempersingkat penulisan dalam pembahasan selanjutnya, ruang metrik kompak lokal dinotasikan dengan *X* dan ruang Banach dengan *Y*, kecuali ada keterangan tambahan yang diperlukan.

Beberapa definisi dan sifat yang terkait dalam pembahasan mengacu pada hasil penelitian Manuharawati & Yunianti (2013).

Definisi 2.1: Fungsi $g: X \to$ Y dikatakan terintegral-*vv* Henstock (Henstock *vv*-integrable) pada sel $E \subset X$ jika terdapat vektor $\alpha \subset Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $d: E \to R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-fine

$$P = \{(A_{xi}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x \, x)\}$$

pada E berlaku

$$\| \textstyle\sum^{n}_{i=1} g\,(xi)\; v\,(A_{xi}) - \alpha \| = \| p \textstyle\sum g\,(x)\; v\,(A_x) - \alpha \| < \varepsilon$$

dengan $P\sum$ merupakan jumlahan atas partisi *P*. Jika $A \in S$ dengan $v(A) = 0$, maka integral-*v* Henstock fungsi $g: X \to Y$ pada A didefinisikan sama dengan vektor nol (O).

Himpunan semua fungsi yang terintegral–□ Henstock pada sel *E* dinotasikan dengan $H(E,v)$ dan vektor *a* pada Definisi 3.1 disebut nilai integral-*v* dari fungsi *f* pada *E* dan dinotasikan dengan $(H - v) \int = a$.
Teorema 2.1: Jika $g \in H\,(E - v)$, maka nilai integral-*v* dari fungsi f pada E adalah tunggal (Manuharawati & Yunianti, 2013).

Salah satu karakreristik suatu fungsi bernilai vektor terintegral-*v* Henstock pada suatu sel tertuang pada Teorema 2.2 berikut.

Teorema 2.2 (**Kriteria Cauchy**): Fungsi $g \in H\,(E, v)$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \to R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-*fine*

$$P = \{(A_x, x)\} \text{ dan } Q = \{(B_x, y)\}$$

pada E berlaku

$$\| P \textstyle\sum g(x)\; v(x) - C \textstyle\sum g(y)\; v(B_y) \| < \varepsilon$$

(Manuharawati & Yunianti, 2013).

Teorema 2.3: Jika $g \in H\,(E, v)$, maka untuk setiap sel $F \subset E$, $g \in H\,(F, v)$, (Manuharawati & Yunianti, 2013)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Seperti yang telah dikemukakan pada bagian sebelumnya, pada bagian ini yang dimaksud *X* adalah ruang metrik kompak lokal, sedangkan *Y* adalah ruang Banach.

Teorema 3.1: Diberikan dua sel *E* dan *F* yang tidak tumpang tindih dengan $E, F \subset S$, dan *g* adalah fungsi bernilai vektor (kodomain dari *g* adalah *Y*). Jika $g \in H\,(E, v)$ dan $g \in H\,(F, v)$, maka $g \in H\,(E \cup F, v)$ dengan

$$\left(H - v\right) \int_{R11F} g = \left(H - v\right) \int_{R} g + \left(H - v\right) \int_{F} g$$

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon < 0$. Karena $g \in H(E,v)$ dan $g \in H(F,v)$, maka berdasarkan Definisi 2.1, terdapat dengan tunggal vektor $a, b \in Y$ dan terdapat fungsi $\delta_1: F \to R^+$ dan $\delta_2: F \to R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ_1– *fine* $P_1 = \{(A_x, x)\}$ pada E dan partisi Perron δ_2– *fine* $P_2 = \{(B_y, y)\}$ pada *F* berlaku

$$\| P_1 \textstyle\sum g\,(x)\; v\,(A_x) - \alpha \| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dan } \| P_2 \textstyle\sum g\,(y)\; v\,(B_y) - b \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dibentuk fungsi $\delta: E \cup E \to R^+$ dengan

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\{\delta_1(x), d(x, F)\} & \text{jika } x \in E - F \\ \min\{\delta_2(x), d(x, E)\} & \text{jika } x \in F - E \\ \min\{\delta_1(x), d_2(x) & \text{jika } x \in E \cap F \end{cases}$$

Jika diambil sebarang partisi Perron δ-*fine* $P = \{(A_x, x)\} = \{(A_x \, x)\}$ pada $E \cup F$ dan dibentuk

$P_3 = \{(A_x, x)\} \in P: x \in E - F\}$

$P_4 = \{(A_x, x)\} \in P: x \in F - E\}$

$P_5 = \{(B_x, x)\} : x \in E: x \cap F, B_x = A_x \cap E, (A_x, x) \in P\}$

$P_6 = \{(C_x, x)\} : x \in E \cap F, C_x = A_x \cap F, (A_x, x) \in P\}$,

maka diperoleh:

$P_3 \cup P_5$ merupakan partisi Perron δ-*fine* pada *E* dan $P_4 \cup P_6$ merupakan partisi Perron δ-*fine* pada *F*.

Oleh karena itu, diperoleh

$\|P \sum g(x)\, v(A_x) - (a+b)\| =$

$\|P_3 \sum g(x)\, v(A_x) + P_4 \sum g(x)\, v(A_x)\| + \sum_{x\in E\cap F} g(x)\, v\,(B_x \cup C_x) - (a+b)\| \leq \|P_3 \sum g(x)\, v(A_x) + P_6 \sum g(x)\, v(B_x) - a\| + \|P_4 \sum g(x)\, v(A_x) + P_6 \sum g(x) v(C_x) - b\|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$

Berdasarkan Definisi 2.1, terbukti bahwa $g \in H(E \cup F, v)$ dengan

$$(H-v)\int_{E\cup F} g = (H-v)\int_E g + (H-v)\int_F g \quad \blacksquare$$

Teorema 3.2: Diberikan sel E, FE, F dengan $F \subset E; f: E \rightarrow Y$. Jika $g \in H(Cl(E-F), v)$ maka $g \in H(Cl(E-F), v)$ dengan $(H-v)\int_E g = (H-v)\int_{Cl(E-F)} g + (H-v)\int_E g.$

Bukti: Karena E dan F masing-masing merupakan sel dengan $F \subset E$, maka berdasarkan aksioma sistem interval, terdapat koleksi hingga sel-sel $\{(C_i: i = 1, 2, ..., n)\}$ yang tidak tumpang tindih sehingga

$$Cl(E-F)-\bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

Karena E merupakan sel, maka untuk setiap $i = 1, 2, ..., ni$, berlaku

$$C_i \subset cl(E-F) \subset E$$

Berdasarkan Teorema 2.3, untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$, berlaku

$$g \in H(Ci, v),$$

Dengan menggunakan Teorema 3.1, diperoleh $g \in H(Cl(E-F), v)$ dengan

$$(H-v)\int_{Cl(E-F)} g = \cup^{n}_{i=1} (H-v)\int_{Ci} g$$

Akibatnya

$$(H-v)\int_E g = (H-v)\int_{Ci(E-F)} g + (H-v)\int_F g \quad \blacksquare$$

Selanjutnya jika $I(E)$ merupakan koleksi semua interval yang termuat di dalam E, maka dengan mengacu pada Teorema 2.1 dan 3.2, terbentuk suatu fungsi aditif $G: I(E\rightarrow Y)$ dengan $G(\varnothing) = 0$ (vektor nol) dan untuk setiap $A \in I(E)$ dengan $A \neq \varnothing$, berlaku

$$G(A) = (H-v)\int_{Cl(A)} g$$

Dengan menggunakan kenyataan ini dapat dibuktikan karakteristik dari fungsi bernilai vektor yang terintegral-v Henstock.

Teorema 3.3: Fungsi $g: X \rightarrow Y$ adalah terintegral-v Henstock (Henstock v-integrable) pada sel $E \subset X$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif $G: I(E) \rightarrow Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-*fine*

$$P = \{(A_{xi}, x) \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\|\textstyle\sum^{n}_{i-1} g(x_i)\, v(A_{xi}) - G(E)\| =$$
$$\|P \textstyle\sum g(x)\, v(A_x) - G(E)\| < \varepsilon$$

Bukti: Berdasarkan Definisi 2.1, Fungsi $g: X \rightarrow Y$ dikatakan terintegral-v Henstock (Henstock v- integrable) pada sel $E \subset X$ jika dan hanya jika terdapat vektor $\alpha \in Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-*fine*

$$P = \{(A_{xi}, x), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\|\textstyle\sum^{n}_{i-1} g(x_i)\, v(A_{xi}) - \alpha\| = \|P\sum g(x)\, v(A_x) - \alpha\| < \varepsilon$$

Jika $P = \{(A_{xi}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$ adalah sebarang partisi Perron δ-*fine* pada E, maka A_x merupakan sel dan $A_x \subset E$. Akibatnya untuk setiap A_x berlaku $g \in H(A_x, v)$. Dengan menggunakan Teorema 2.3, 3.1, dan 3.2, maka diperoleh bahwa fungsi $g: X \rightarrow Y$ adalah terintegral-v Henstock pada sel $E \subset X$ jika dan hanya jika terdapat fungsi aditif $g: X \rightarrow Y$ dengan sifat untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-*fine*

$$P = \{(A_{xi}, x_i), 1 \leq i \leq n\} = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\|\textstyle\sum^{n}_{i-1} g(x_i)\, v(A_{xi}) - G(E)\| = \|P\sum g(x)\, v(A_x) - G(E)\| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Teorema 3.4 (Lemma Henstock): Jika fungsi $g: X \rightarrow Y$ terintegral-v Henstock pada sel $E \subset X$ dengan fungsi primitif G, maka untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $\delta: E \rightarrow R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-*fine* $P = \{(A_x, x)\}$ dan sebarang $Q \subset P$ berlaku

$$\|Q\textstyle\sum [g(x)\, v(A_x) - G\, A_x)]\| < 2s$$

Bukti: Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$. Karena g terintegral-□ Henstock pada sel E, maka menurut Teorema 3.3 terdapat fungsi aditif $G: I(E) \rightarrow Y$ dan fungsi $\delta: E \rightarrow R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-*fine*

$$P = \{(A_x, x)\}$$

pada E berlaku

$$\|P\textstyle\sum [g(x)\, v(A_x) - G(A_x)]\| < \varepsilon$$

Diambil sebarang $Q \subset P$. Misalkan E_1 adalah gabungan semua A_x dengan $(A_x, x) \in P$ tetapi $(A_x, x) \notin Q$. Berdasarkan Teorema 3.1, $g \in H\,(E_1, v)$. Berdasarkan Teorema 3.3, terdapat fungsi $\delta_1: E_1 \rightarrow R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ_1-*fine* pada E_1 berlaku.

$$\| P_1 \sum [g(x)\, v(A_x) - G(A_x)] \| < \varepsilon$$

Selanjutnya dibentuk fungsi δ_2: $E_1 \to R^+$ dengan

$$\delta_2(x) - \begin{cases} \min\{\delta_1(x), \delta(x) \text{ jika } x \in (E - E_1)\} \\ \min\{\delta_2(x), \delta(x) d(x, cl(E - E_1) \text{ jika } x \in int(E_1)\} \end{cases}$$

Jika P_2 merupakan partisi Perron δ_2-*fine* pada E_1, maka P_2 merupakan partisi Perron δ_1-*fine* pada E_1 dan P_3= Q $\cup$ P_2 merupakan partisi Perron δ-*fine* pada E. Oleh karena itu, berlaku:

$\| Q \sum [g(x)\, v(A_x) - G(A_x)] \|$
$= \| P_3 \sum [g(x)\, v(A_x) - G(A_x)] - \| P_2 \sum [g(x)\, v(A_x) - G(A_x)] \| \, \|$
$\leq \| P_3 \sum [g(x)\, v(A_x) - G(A_x)] \| + \| P_2 \sum [g(x)\, v(A_x) - G(A_x)] \|$
$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ ■

SIMPULAN

Dengan memperhatikan proses pembuktian Lemma Henstock, ternyata memerlukan Teorema-teorema 2.3, 3.1, 3.2, dan 3.3. Dalam pembuktian Teorema 3.3 memerlukan Teorema 2.1, 2.3, 3.1, dan 3.2. Dengan menggunakan sifat ketransitifan, maka dapat disimpulkan bahwa ketunggalan nilai integral dan sifat Cauchy merupakan syarat perlu dan cukup terjaminnya Lemma Henstock. Oleh karena itu, nilai fungsi yang terintegral tidak hanya bernilai vektor, melainkan vektor tersebut harus berada di dalam ruang ber-norm yang lengkap (ruang Banach). Oleh karena itu diperoleh Lemma Henstock sebagai berikut: Jika Y merupakan ruang Banach dan fungsi g: $X \to Y$ terintegral-v Henstock pada sel $E \subset X$ dengan fungsi primitif G, maka untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi δ: $E \to R^+$ sehingga untuk setiap partisi Perron δ-*fine*

$$P = P\{(A_x, x)\} \text{ dan sebarang } Q \subset P \text{ berlaku}$$

$$\| Q \sum [g(x)\, v(A_x) - G(A_x)] \| < 2\varepsilon$$

DAFTAR PUSTAKA

Brown AL & Page A, 1970. *Elements of Functional Analysis*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Henstock R, 1968. A Riemann-Type Integral of Lebesgue Poer. Canadian *J.Math.Soc.*, 20, 79–87.

Jain PK dan Gupta VP, 1986. *Lebesgue Measure and Integration*. Delhi: Wiley Eastern Limited. New

Lee PY, 1995. Measurability and the Henstock Integral. *Proceeding internat*. Math. Conf. 1994, 99–106, World Scientific, Kaohsiung.

Manuharawati, 2002. Integral Henstock di dalam Ruang Metrik Kompak Lokal. *Disertasi* PPs UGM Yogyakarta.

Manuharawati & Yunianti DN, 2013, Sifat Cauchy fungsi terintegral Henstock di dalam ruang Metrik kompak Lokal, Makalah. (ISBN 978-602-14413-0-5), Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga Surabaya, 21 September 2013 (hal. 71–75).

Soedijono B, 1997. Teorema Adanya PenyelesaianPersamaan Deferensial $y' = f(x,y)$ terhadap Integral Henstock. *Journal of Indonesian Mathematical Society*, 3(2): 89–100.