

Bentuk-bentuk Ideal pada Semiring $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ dan Semiring $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$

Ideals in the Semiring $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ and the Semiring $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$

Dian Winda Setyawati,* Soleha, Ruzika Rimadhany

Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Kampus ITS, Keputih Sukolilo, Surabaya

ABSTRAK

Himpunan bilangan bulat taknegatif, yaitu $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa, sedangkan himpunan $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$ juga merupakan semiring terhadap operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\odot$ yang didefinisikan sebagai berikut: untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}^+$ berlaku $a \oplus b = FPB(a, b)$ dan $a \odot b = KPK(a, b)$. Pada semiring R , himpunan bagian I dari R disebut ideal pada R jika $a, b \in I$ dan $r \in R$ maka $a+b \in I$ dan $ra, ar \in I$. Pada artikel ini ditunjukkan bentuk-bentuk ideal pada semiring $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ dan bentuk-bentuk ideal pada semiring $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$ serta menunjukkan hubungan satu ideal dengan ideal yang lain. Bentuk-bentuk ideal yang ditunjukkan adalah ideal maksimal, ideal substraktif, Q-ideal, ideal prima, ideal semiprima dan *ideal primary*.

Kata kunci: Q-ideal, ideal prima, ideal semiprima, *ideal primary*

ABSTRACT

The set of nonnegative integers $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ is a semiring of the usual operations of addition and multiplication otherwise set $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$ is also a semiring of the addition operation $\oplus$ and multiplication $\odot$ defined as follows: for each $a, b \in \mathbb{Z}^+$ applies $a \oplus b = \gcd(a, b)$ and $a \odot b = \text{lcm}(a, b)$. At semiring R , a subset I of R is called an ideal in R if $a, b \in I$ and $r \in R$, then $a+b \in I$ and $ra, ar \in I$. In this paper will be shown the forms of the ideal on the semiring $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ and forms of the ideal on the semiring $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$ and shows the relationship of the ideal with the other ideal. Ideal form that will be shown is the maximal ideal, subtractive ideal, Q-ideal, prime ideal, and the semiprime ideal and, *primary ideal*.

Key words: Q-ideal, primeideal, semiprime ideal, *primary ideal*

PENDAHULUAN

Saat ini banyak paper yang membahas tentang semiring serta jenis-jenis ideal pada semiring. Setyawati (2005) membahas tentang ideal- p kiri utama dalam semiring inversive regular $-p$; sedangkan Setyawati (2011) membahas ideal prima pada semiring $D_{n \times n}(\mathbb{Z}^+)$, $D_{n \times n}(\mathbb{Z}^+)$ merupakan himpunan semua matriks diagonal berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{Z}^+$ serta Setyawati & Soleha (2013) membahas ideal prima pada semiring $S_{n \times n}(\mathbb{Z}^+)$, $S_{n \times n}(\mathbb{Z}^+)$ merupakan

himpunan semua matriks segitiga atas berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{Z}^+$.

Gupta & Chaudhari (2009) menunjukkan bentuk ideal prima pada $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$, sedangkan Chaudhari & Ingale (2012) menunjukkan bentuk ideal substraktif, Q-ideal, ideal maksimal, ideal prima dan *ideal primary* pada $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$. Pada paper ini akan dilengkapi bentuk-bentuk ideal baik pada semiring $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$ maupun pada semiring $(\mathbb{Z}^+, \oplus, \odot)$ serta menunjukkan hubungan ideal satu dengan yang lain. Sebelumnya akan diberikan beberapa definisi yang akan digunakan

* Alamat Korespondensi:

surel: dian_ws_math@matematika.its.ac.id

untuk membahas bentuk-bentuk ideal baik pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ maupun pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$.

Definisi 1.1 (Khanna, 1993)

Himpunan tak kosong R terhadap operasi biner $+$ dan $\cdot$ ditulis $(R, +, \cdot)$ disebut *ring* jika

- (i) $(R, +)$ grup komutatif
- (ii) $(R, \cdot)$ bersifat asosiatif
- (iii) $(R, +, \cdot)$ bersifat distributif

Semiring merupakan bentuk generalisasi dari *Ring* dengan salah satu atau lebih syarat pada *ring* dihilangkan. Pada paper ini syarat yang dihilangkan adalah eksistensi invers pada R terhadap $+$ sehingga semakin banyak himpunan yang dapat dibentuk menjadi semiring. Definisi semiring lebih jelasnya tertuang dalam definisi berikut.

Definisi 1.2 (Gupta & Chaudhari, 2009)

Himpunan tak kosong R terhadap operasi biner $+$ dan $\cdot$ ditulis $(R, +, \cdot)$ disebut semiring jika

- (i) $(R, +)$ bersifat asosiatif, komutatif dan mempunyai elemen identitas 0
- (ii) $(R, \cdot)$ bersifat asosiatif
- (iii) $(R, +, \cdot)$ bersifat distributif.

Salah satu contoh semiring adalah Z^+ dan $D_{n \times n}(Z^+)$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian standar Z^+ maupun $D_{n \times n}(Z^+)$ bukan merupakan *ring* karena terhadap operasi biner $+$, elemen pada Z^+ maupun $D_{n \times n}(Z^+)$ tidak mempunyai *invers*. Selanjutnya akan didefinisikan ideal pada semiring yang identik dengan definisi ideal pada ring

Definisi 1.3 (Gupta & Chaudhari, 2009; Chaudhari & Ingale, 2012)

Diberikan semiring R dan I subset dari R . I disebut ideal pada R jika untuk setiap $x, y \in I$ dan $x \in R$ berlaku $x+y \in I$ dan $rx, ry \in I$

Berikut ini akan diberikan jenis-jenis ideal pada semiring R yang akan digunakan pada artikel ini.

- (i) Ideal $I = \langle a \rangle = \{n \cdot a : n \in R\}$, $a \in R$ disebut ideal utama pada R , yaitu ideal utama yang dibangun oleh a .
- (ii) Ideal I disebut ideal *subtractive* jika $a, a+b \in I, b \in R$, maka $b \in I$.
- (iii) Ideal M disebut ideal maksimal jika terdapat ideal J dari semiring R dan M subset J maka $J = M$ atau $J = R$.
- (iv) Ideal I disebut ideal prima jika $ab \in I, b \in R$ maka $a \in I$ atau $a \in R$.
- (v) Ideal I disebut ideal semiprima jika $a^2 \in I$, maka $a \in I$, untuk semua $a \in R$.
- (vi) Ideal I disebut *ideal primary* jika $ab \in I$ dan $a \notin I$ maka $b^n \in I$ untuk suatu $n \geq 1, n \in Z$

- (vii) Ideal I disebut *Q-ideal* jika ada himpunan Q subset dari R sehingga

$$R = \bigcup_{q \in Q} q + I$$

dan jika $q_1, q_2 \in Q$, maka $(q_1 + I) \cap (q_2 + I) \neq \emptyset \Leftrightarrow q_1 = q_2$.

METODE PENELITIAN

Pada artikel ini terlebih dahulu dikaji bentuk ideal prima pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ pada Gupta & Chaudhari (2009) dan bentuk ideal substraktif, *Q-ideal*, ideal maksimal, ideal prima dan *ideal primary* pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ pada Chaudhari & Ingale (2012). Selanjutnya dilengkapi bentuk-bentuk ideal baik pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ maupun semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ dengan cara mengkonstruksi atau membentuk suatu himpunan yang memenuhi bentuk-bentuk ideal tersebut. Pada artikel ini, urutan teorema maupun cara membuktikan untuk beberapa teorema berbeda dengan Gupta & Chaudhari (2009) dan Chaudhari & Ingale (2012).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Himpunan bilangan bulat tak negatif, yaitu $(Z^+, +, \cdot)$ membentuk semiring terhadap penjumlahan dan perkalian biasa. Berikut ini akan diberikan bentuk-bentuk ideal dari semiring $(Z^+, +, \cdot)$.

Teorema 3.1.1:

Setiap ideal I pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ berbentuk $I = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in Z^+$

Bukti:

- (i) Akan ditunjukkan bahwa $I = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ merupakan ideal pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$

Ambil $x, y \in \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ dan $z \in Z^+$ maka x dan y dapat dinyatakan dalam $x = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$ dan $y = l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_nx_n$, $k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n \in Z^+$ sehingga

$$x + y = (k_1 + l_1)x_1 + (k_2 + l_2)x_2 + \dots + (k_n + l_n)x_n \in \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

dan

$$zx = xz = (zk_1)x_1 + (zk_2)x_2 + \dots + (zk_n)x_n \in \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

Terbukti $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ merupakan ideal pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ ■

- (ii) Andaikan Himpunan $I \subseteq Z^+$, $I \neq \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, maka I bukan ideal pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ sebab terdapat $a \in I$ tetapi $ra \notin I$ untuk $r \in Z^+$ sebab $I \neq \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$

Himpunan $Z^+ = \langle 1 \rangle$ sehingga dari teorema di atas diperoleh akibat sebagai berikut

Akibat 3.1.2

Ideal sejati I dari semiring $(Z^+, +, \cdot)$ adalah maksimal jika dan hanya jika $I = \langle 2, 3 \rangle = Z^+ - \{1\}$

Teorema 3.1.3

Ideal I pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ adalah substraktif jika dan hanya $I = \{x\}$ untuk suatu $x \in Z^+$

Bukti :

($\rightarrow$) Andaikan $I = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ untuk $n > 1$ dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in Z^+$ dan $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, maka $x_1 \in I$ dan $x_1 + a = x_2 \in I$, tetapi $a \notin I$, maka I bukan ideal substraktif

($\leftarrow$) Akan ditunjukkan ideal $I = \langle x \rangle$ adalah substraktif. Ambil $a, a+b \in I$ artinya $a = k_1x$ dan $a+b = k_2x$, maka $b = (k_2 - k_1)x \in I$

Sebagai gambaran $\langle 2 \rangle$ dan $\langle 3 \rangle$ merupakan ideal substraktif dari semiring $(Z^+, +, \cdot)$ tetapi $\langle 2, 3 \rangle$ bukan ideal substraktif dari semiring $(Z^+, +, \cdot)$ sebab $2, 3 \in \langle 2, 3 \rangle$ tetapi $1 \notin \langle 2, 3 \rangle$

Teorema 3.1.4

Ideal I pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ adalah Q-ideal jika dan hanya $I = \langle x \rangle$ untuk $x \in Z^+$

Bukti:

($\rightarrow$) Andaikan $I = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ untuk $n > 1$ maka anggota dari I dapat diurutkan dari yang terkecil dan selisih dua elemen berurutan tidak konstan sehingga jika terdapat $Q \subseteq Z^+, \cup_{q \in Q} q+1 = Z^+$ maka tidak berlaku $p+I \cap q+I \neq \emptyset \Leftrightarrow p=q$ dengan $p, q \in Q$

($\leftarrow$)

- (i) $I = \langle 0 \rangle = \{0\}$ merupakan Q-ideal dengan $Q = Z^+$
- (ii) $I = \langle 1 \rangle = Z^+$ merupakan Q-ideal dengan $Q = \{0\}$
- (iii) $I = \langle x \rangle$ untuk $x \in Z^+ - \{0, 1\}$ merupakan Q-ideal pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ dengan $Q = \{0, 1, 2, \dots, x-1\}$ memenuhi $\cup_{q \in Q} q+1 = Z^+$ dan $(q_1+I) \cap (q_2+I) \neq \emptyset \Leftrightarrow q_1 = q_2$ dengan $q_1, q_2 \in Q$

Pada teorema berikut akan diberikan bentuk ideal prima secara umum, tetapi sebelumnya akan diberikan beberapa lemma yang akan digunakan untuk membantu pembuktian teorema tersebut.

Lemma 3.1.5

Diberikan $x \in Z^+$. Ideal sejati tak nol $\langle x \rangle$ pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ adalah prima jika dan hanya jika x bilangan prima.

Bukti:

($\rightarrow$) Andaikan x bukan bilangan prima maka x dapat dinyatakan dalam $x = p_1 p_2$. Jelas bahwa $x = p_1 p_2 \in$

$\langle x \rangle$ tetapi $p_1 \notin \langle x \rangle$ dan $p_2 \notin \langle x \rangle$ sehingga $\langle x \rangle$ tidak prima. Terjadi kontradiksi. Terbukti jika Ideal $\langle x \rangle$ pada Z^+ adalah *prime*, maka x bilangan prima

($\leftarrow$) Karena x bilangan prima maka setiap $y \in \langle x \rangle$ menyatakan bahwa y mempunyai faktor prima x . Sekarang jika $a, b \in Z^+$ dan $a, b \in \langle x \rangle$ maka ab mempunyai faktor prima x . Hal ini terjadi jika salah satu atau keduanya dari a dan b mengandung faktor prima x . Dengan kata lain $a \in \langle x \rangle$ atau $b \in \langle x \rangle$ lain Terbukti $\langle x \rangle$ prima ■

Lemma 3.1.6 (Gupta & Chaudhari, 2009)

Jika $a, b \in Z^+, b > a > 1$ dan FPB $(a, b) = 1$, maka terdapat $n \in Z^+$ sedemikian hingga $t \in \langle a, b \rangle$ untuk semua $t \geq n$

Bukti:

Karena FPB $(a, b) = 1$ maka ada $p, q \in Z^+$ sedemikian hingga $qa = pb + 1$ jelas $p, q \neq 0$. Ambil $n = paqa$ maka $t = n + r, r \geq 0$

Kasus 1: untuk $r = 0$, jelas $t \in \langle a, b \rangle$

Kasus 2: jika $0 < r < a$, maka, $t = n + r = paqa + r.1 = pa(pb+1) + r(qa-pb) = (pa-r)pb + rqa$. Jelas bahwa $pa-r \in Z^+$ sehingga $t \in \langle a, b \rangle$

Kasus 3: jika $r \geq a$ maka r dapat dinyatakan $r = ka + p, 0 < p < a$ sehingga $t = n + r = n + ka + p = n + p + ka$. Dengan menggunakan kasus 2 maka $n + p \in \langle a, b \rangle$. Akibatnya $t \in \langle a, b \rangle$ ■

Teorema 3.1.7 (Gupta & Chaudhari, 2009)

Ideal sejati tak nol I pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ adalah prima jika dan hanya jika $I = \langle p \rangle$ untuk suatu bilangan prima p atau $I = \langle 2, 3 \rangle = Z^+ - \{1\}$

Bukti:

($\rightarrow$) jelas bahwa jika $I = \langle p \rangle$ maka p bilangan prima. Diasumsikan I bukan ideal principal (utama). Misal a elemen terkecil tak nol dari I , maka a bilangan prima dan juga terdapat bilangan terkecil b dari I sehingga FPB $(a, b) = 1$

Jika $a > 2$, maka menurut lemma 3.1.6 terdapat $n \in Z^+$ sedemikian hingga $t \in \langle a, b \rangle$, untuk semua $t \geq n$. Pilih j terkecil, $j \in Z^+$ dan $2^j \in I$. Karena I ideal *prime* dan $2^j - 2 \cdot 2^{j-1} \in I$, maka $2 \in I$ atau $2^{j-1} \in I$. Terjadi kontradiksi sehingga $a = 2$.

Jika $b > 3$, maka menurut lemma 3.1.6 terdapat $m \in Z^+$ sedemikian hingga $t \in \langle a, b \rangle$ untuk semua $t \geq m$. Pilih k terkecil, $k \in Z^+$ dan $3^k \in I$. Karena I ideal *prime* dan $3^k - 3 \cdot 3^{k-1} \in I$ maka $3 \in I$ atau $3^{k-1} \in I$. Terjadi kontradiksi sehingga $b = 3$, sedangkan $\langle 2, 3 \rangle = Z^+ - \{1\}$ (terbukti)

($\leftarrow$) Jelas dari lemma 3.1.5 dan $\langle 2, 3 \rangle = Z^+ - \{1\}$ merupakan ideal prima pada $(Z^+, +, \cdot)$ ■

Teorema 3.1.8

Ideal sejati tak nol $I=\langle x \rangle$ untuk $x \in Z^+$ pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ adalah semiprima jika dan hanya jika $x=p_1 p_2 \dots p_n$, p_i adalah faktor prima yang berbeda dari x

Bukti:

($\leftarrow$) Ideal $I=\langle x \rangle$ pada Z^+ dimana $x=p_1 p_2 \dots p_n$ merupakan semiprima sebab $a^2 \in \langle x \rangle$ artinya $a^2=b^2$ $p_1 p_2 \dots p_n p_1 p_2 \dots p_n$, $b \in Z^+$ sehingga $a=b p_1 p_2 \dots p_n \in \langle x \rangle$

($\rightarrow$) Andaikan $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$

- (1) Andaikan terdapat r_i bilangan genap, yaitu tanpa mengurangi keumuman misalkan r_1 adalah bilangan genap, maka terdapat

$$a^2 = p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n} \in \langle x \rangle$$

, $\frac{k_i+r_i}{2} \in \mathbb{Z}^+$ untuk $i = 2, 3, \dots, n$, maka

$$a = p_1^{\frac{r_1}{2}} p_2^{\frac{k_2+r_2}{2}} p_3^{\frac{k_3+r_3}{2}} \dots p_n^{\frac{k_n+r_n}{2}} \notin \langle x \rangle \text{ sehingga}$$

$I = \langle x \rangle$ bukan ideal semiprima

- (2) Andaikan terdapat r_i bilangan ganjil, $r_i > 1$, yaitu tanpa mengurangi keumuman misalkan r_1 adalah bilangan ganjil maka terdapat

$$a^2 = p_1 p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n} \in \langle x \rangle$$

dengan $\frac{k_i+r_i}{2} \in \mathbb{Z}^+$ untuk $i = 2, 3, \dots, n$ maka

$$a = p_1^{\frac{r_1+1}{2}} p_2^{\frac{k_2+r_2}{2}} p_3^{\frac{k_3+r_3}{2}} \dots p_n^{\frac{k_n+r_n}{2}} \notin \langle x \rangle$$

sehingga $I=\langle x \rangle$ bukan ideal semiprima

Teorema 3.1.9

Ideal sejati tak nol $I=\langle x \rangle$ untuk $x \in Z^+$ pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ adalah primary jika dan hanya jika x bilangan prima.

Bukti:

($\rightarrow$) Andaikan x bukan bilangan prima maka $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$, p_i adalah faktor prima yang berbeda dari x , maka terdapat $ab = k p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n} \in \langle x \rangle$, $FPB(k, p_1) = 1$ dan $a = p_1^{r_1} \notin \langle x \rangle$ maka $b^n = (k p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n})^n \notin \langle x \rangle$ untuk setiap $n \geq 1$ dan $n \in Z^+$ sehingga $I=\langle x \rangle$ bukan ideal primary.

($\leftarrow$) Karena x bilangan prima, untuk setiap $ab=kx \in \langle x \rangle$ dan $a \notin \langle x \rangle$, maka a adalah faktor dari k sehingga diperoleh $b = k_1 x \in \langle x \rangle$, $k_1 = k/a$ faktor

dari k . Jadi terbukti bahwa $I=\langle x \rangle$ ideal primary.

Himpunan bilangan bulat tak negatif, yaitu $(Z^+, \oplus, \odot)$ membentuk semiring komutatif dengan elemen identitas 1 terhadap penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\odot$ yang didefinisikan sebagai berikut: Untuk setiap $a, b \in Z^+$ berlaku $a \oplus b = FPB(a, b)$ dan $a \odot b = KPK(a, b)$. Pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ ini didefinisikan $a \oplus 0 = a$ dan $a \odot 0 = 0$ untuk semua $a \in Z^+$. Sebelum diberikan bentuk-bentuk dari semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ terlebih dahulu akan didefinisikan ideal utama pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ sebagai berikut.

Definisi 3.2.1

Diberikan semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$. Untuk $a \in (Z^+, \oplus, \odot)$, $I=\langle a \rangle = \{na : n \in Z^+\}$ disebut ideal utama pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ yang dibangun oleh a .

Lemma berikut ini menunjukkan bahwa ideal utama pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ dapat dinyatakan dengan kelipatannya.

Lemma 3.2.2 (Chaudhari & Ingale, 2012)

Jika $a \in (Z^+, \oplus, \odot)$ maka $\langle a \rangle = \{na : n \in Z^+\}$.

Bukti:

Diketahui $a \in (Z^+, \oplus, \odot)$.

- (i) Ambil $x \in \langle a \rangle$, maka terdapat $n_1 \in Z_0^+$ sedemikian hingga $x = n_1 a = KPK(n_1 a, a) = n_1 a \odot a$ yang artinya $x \in \langle a \rangle$ sehingga $\{na : n \in Z^+\} \subseteq \langle a \rangle$
(ii) Ambil $x \in \langle a \rangle$, maka ada $n \in Z^+$ sehingga $x = n \odot a = KPK\{n, a\} = ka$ untuk suatu $k \in Z^+$ yang artinya $x \in \{na : n \in Z^+\}$ sehingga $\langle a \rangle \subseteq \{na : n \in Z^+\}$. ■

Dari lemma di atas diperoleh akibat berikut ini.

Akibat 3.2.3

- (i) Jika $q \in Z^+$ dan I adalah faktor dari q maka $\langle q \rangle \subseteq \langle I \rangle$.
(ii) Jika $m \in Z^+$ dan m bukan merupakan faktor dari q dan $m < q$ maka $\langle q \rangle \not\subseteq \langle m \rangle$.

Selanjutnya dibahas mengenai bentuk dari ideal pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$.

Lemma 3.2.4 (Chaudhari & Ingale, 2012).

Setiap ideal dari semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ adalah ideal utama.

Bukti:

Jelas bahwa $I=\{0\}=\langle 0 \rangle$. Sekarang misalkan I merupakan ideal tak nol di semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$, dan d merupakan elemen terkecil dari I dan tak nol, akan ditunjukkan bahwa $I=\langle d \rangle$.

- (i) Ambil $a \in I$, maka $a \oplus d \in I$. Karena d merupakan elemen terkecil dari I diperoleh $a \oplus d = FPB\{a, d\} = d$ sehingga mengakibatkan $a = kd$, untuk suatu $k \in Z^+$ akibatnya $a \in \langle d \rangle$. Oleh karena itu, $I \subseteq \langle d \rangle$.
(ii) Ambil $y \in \langle d \rangle = \{nd : n \in Z^+\}$, maka terdapat $n_1 \in Z^+$

sedemikian hingga, $y = n_1 d = \text{KPK}(n_1 d, d) = n_1 d \odot d$. Karena I ideal dan $d \in I$, maka $y \in I$. Oleh karena itu, diperoleh $\langle d \rangle \subseteq I$. Jadi dapat ditunjukkan bahwa $I = \langle d \rangle$. ■

Dari akibat 3.2.3 dan lemma 3.2.4 diperoleh akibat berikut ini.

Akibat 3.2.5

I adalah ideal maksimal di semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ jika dan hanya jika $I = \langle p \rangle$ untuk suatu p adalah bilangan prima.

Selanjutnya akan ditunjukkan bentuk ideal subtraktif dan Q -ideal pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$.

Lemma 3.2.6 (Chaudhari & Ingale, 2012)

Setiap ideal dari semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ adalah ideal subtraktif.

Bukti:

Jelas bahwa $I = \{0\} = \langle 0 \rangle$ merupakan ideal subtraktif pada $(Z^+, \oplus, \odot)$. Sekarang misalkan I adalah ideal tak nol dari $(Z^+, \oplus, \odot)$. Dari lemma 3.2.4, diperoleh $I = \langle d \rangle$ dengan d merupakan elemen terkecil dari I dan d tak nol. Ambil $a, a \oplus b \in I = \langle d \rangle$ dan $b \in Z^+$, berarti $a = kd$ dan $a \oplus b = ld$, untuk suatu $k, l \in Z^+$. Karena $a \oplus b = \text{FPB}\{a, b\}$, maka $ld = \text{FPB}\{kd, b\}$ yang artinya $ld \mid kd$ dan $ld \mid b$. Karena $ld \mid b$, jelas bahwa b juga merupakan kelipatan dari d sehingga $b \in \langle d \rangle = I$. ■

Lemma 3.2.7 (Chaudhari & Ingale, 2012)

Jika I adalah ideal sejati tak nol dari semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$, maka I bukan merupakan Q -ideal.

Bukti:

Misal I adalah ideal sejati tak nol dari semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$. Akan ditunjukkan bahwa I bukan merupakan Q -ideal. Dari lemma 3.2.4, $I = \langle d \rangle$ dengan d merupakan elemen terkecil dari I , $d \in Z^+ - \{0, 1\}$.

Ambil $d = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$ dengan $p_1, p_2, \dots, p_k$ adalah pasangan bilangan prima yang berbeda dan $k, r_i \in \mathbb{N}$. Dengan bukti kontradiksi, misalkan I adalah Q -ideal, maka ada dengan tunggal $q \in Q$ sehingga $p \in q \oplus I$ untuk semua bilangan prima p selain faktor prima dari d .

Misal p', p'' adalah suatu bilangan prima selain faktor prima dari d , $p' \oplus I \subseteq q_1 \oplus I$ dan $p'' \oplus I \subseteq q_2 \oplus I$, $q_1, q_2 \in Q$. Karena p', p'' adalah suatu bilangan prima selain faktor prima dari d , maka diperoleh $1 = p' \oplus d \in q_1 \oplus I$ dan $1 = p'' \oplus d \in q_2 \oplus I$ sehingga didapat, $(q_1 \oplus I) \cap (q_2 \oplus I) \neq \emptyset$. Karena I merupakan Q -ideal diperoleh bahwa $q_1 = q_2$. Dengan kata lain untuk semua bilangan prima p selain faktor prima dari d , maka terdapat dengan tunggal $q \in Q$ sehingga $p \in q \oplus I$. Jelas bahwa $q \geq 1$.

Pilih sebuah bilangan prima f dengan $f > q$ sehingga

$f \in q \oplus I$. Karena $f \in q \oplus I$, maka $f \in q \oplus \langle d \rangle$ artinya terdapat $n \in \mathbb{Z}_0^+$ sehingga $f = q \oplus nd = \text{FPB}(q, nd)$ yang artinya $f \mid q$ dan $f \mid nd$. Terjadi kontradiksi karena $f > q$, maka tidak mungkin terjadi $f \mid q$. Jadi terbukti bahwa $I = \langle d \rangle$ bukan Q -ideal. ■

Dari definisi Q -ideal dari semiring R dan teorema 3.2.7, maka diperoleh akibat berikut

Akibat 3.2.8

$\{0\}$ dan Z^+ merupakan satu-satunya Q -ideal pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$.

Bukti:

- (i) $\{0\}$ merupakan Q -ideal pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$, $Q = Z^+$
- (ii) Z^+ merupakan Q -ideal pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$, $Q = \{0\}$

Pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$, untuk setiap $a \in Z^+$ berlaku $a^2 = a \oplus b = \text{KPK}\{a, a\} = a$ sehingga diperoleh akibat berikut:

Akibat 3.2.9

Setiap ideal dari semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ adalah semiprima.

Selanjutnya akan ditunjukkan bentuk ideal prima pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ serta hubungan antara ideal *primary* dengan ideal prima pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$.

Teorema 3.2.10 (Chaudhari & Ingale, 2012)

Ideal sejati tak nol I pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ adalah prima jika dan hanya jika $I = \langle p^r \rangle$ untuk suatu bilangan prima p dan $r \geq 1$

Bukti:

($\rightarrow$) Andaikan $I = \langle p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k} \rangle$, p_i adalah bilangan prima yang berbeda dan $k \geq 2$. I bukan merupakan ideal prima sebab $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k} \in I$, tetapi $p_1^{r_1} \notin I$ dan $p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k} \notin I$

($\leftarrow$) Ambil $a, b \in Z^+$, $a \oplus b \in I = \langle p^r \rangle$ artinya $\text{KPK}(a, b) = kp^r$, maka a mempunyai faktor p^r atau b mempunyai faktor p^r sehingga $a \in I$ atau $b \in I$. Jadi terbukti I prima

Teorema 3.2.11 (Chaudhari & Ingale, 2012)

Setiap ideal tak nol dari semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ adalah *ideal primary* jika dan hanya jika ideal tersebut adalah ideal prima.

Bukti:

($\rightarrow$) Pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ berlaku $b^n = b \odot b \odot \dots \odot b = \text{KPK}\{b, b, \dots, b\} = b$ untuk setiap $b, n \in Z^+, n \geq 1$. Jadi jika I ideal primary, maka I pasti ideal prima.

($\leftarrow$) Jelas bahwa jika I ideal prima maka I pasti ideal primary. ■

SIMPULAN

Bentuk-bentuk ideal maksimal, ideal utama, ideal substraktif, Q-ideal, ideal prima, ideal semiprima dan ideal primary serta hubungan ideal satu dengan yang lain pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ dan semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ sebagai berikut.

Pada semiring $(Z^+, +, \cdot)$ diperoleh

- (i) Setiap ideal I pada $(Z^+, +, \cdot)$ berbentuk $I = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ dengan $x_1, x_2, \dots, x_n \in Z^+$
- (ii) Ideal sejati I dari $(Z^+, +, \cdot)$ adalah maksimal jika dan hanya jika $I = \langle 2, 3 \rangle = Z^+ - \{1\}$
- (iii) Ideal I pada $(Z^+, +, \cdot)$ adalah substraktif jika dan hanya I untuk suatu $x \in Z^+$
- (iv) Ideal I pada $(Z^+, +, \cdot)$ adalah Q-ideal jika dan hanya $I = \langle x \rangle$ untuk $x \in Z^+$
- (v) Ideal sejati tak nol I pada $(Z^+, +, \cdot)$ adalah prima jika dan hanya jika $I = \langle p \rangle$ untuk suatu bilangan prima p atau $I = \langle 2, 3 \rangle = Z^+ - \{1\}$
- (vi) Ideal sejati tak nol $I = \langle x \rangle$ untuk $x \in Z^+$ pada $(Z^+, +, \cdot)$ adalah semiprima jika dan hanya jika $x = p_1 p_2 \dots p_n$ p_i adalah faktor prima yang berbeda dari x
- (vii) Ideal sejati tak nol $I = \langle x \rangle$ untuk $x \in Z^+$ pada $(Z^+, +, \cdot)$ adalah primary jika dan hanya jika x bilangan prima

Pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ diperoleh:

- (i) Jika $a \in (Z^+, \oplus, \odot)$ maka $\langle a \rangle = \{na : n \in Z^+\}$.
- (ii) Setiap ideal dari $(Z^+, \oplus, \odot)$ adalah ideal utama
- (iii) I adalah ideal maksimal di $(Z^+, \oplus, \odot)$ jika dan hanya jika $I = \langle p \rangle$ untuk suatu p adalah bilangan prima
- (iv) Setiap ideal dari $(Z^+, \oplus, \odot)$ adalah ideal substraktif dan ideal semiprima
- (v) $\{0\}$ dan Z^+ merupakan satu-satunya Q-ideal pada semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$
- (vi) Ideal sejati tak nol I pada $(Z^+, \oplus, \odot)$ adalah prima jika dan hanya jika $I = \langle p^r \rangle$ untuk suatu bilangan prima p dan $r \geq 1$
- (vii) Setiap ideal tak nol dari semiring $(Z^+, \oplus, \odot)$ adalah ideal primary jika dan hanya jika ideal tersebut adalah ideal prima.

DAFTAR PUSTAKA

- Chaudhari JN and Ingale KJ, 2012. A Note on Strongly Euclidean Semirings. *International Journal of Algebra*, 6: 271-275. Web publication <http://www.m-hikari.com/ija/ija-2012/ija-5-8-2012/chaudhariIJA5-8-2012-2.pdf>.
- Gupta V & Chaudhari JN, 2009. Prime Ideals in Semiring. *Bulletin of Malaysian Mathematical Science Society*. [Http://math.usm.my/bulletin](http://math.usm.my/bulletin). Diunduh tanggal 2 Februari 2010.
- Khanna VJ, 1993. A Course in Abstract Algebra. Department of Mathematics, Kirori Mal college, University of Delhi: Vikas Publishing House PVT LYD.
- Setyawati DW, 2005. Ideal-p Kiri Utama dalam Semiring Inversive Regular-p. *Sains dan Sibernatika Pascasarjana Ilmu-ilmu Sains Universitas Gadjah Mada*; 18: 1-11.
- Setyawati DW, 2011. Ideal prime pada Semiring $D_{n \times n}(Z^+)$. *Jurnal Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro Semarang*; 14: 14-18.
- Setyawati DW & Soleha, 2013. Ideal prime pada Semiring $S_{n \times n}(Z^+)$. *Makalah*. Disampaikan pada Seminar Nasional Himpunan Peminat Aljabar ke-21, Universitas Negeri Malang 20-21 April 2013.