Sains & Matematika
p-ISSN: 2302-7290
e-ISSN: 2548-1835
Sains dan Matematika, Vol 7, No. 1, April 2022: 43-50

Ortogonalitas dan Sudut-P dan -I pada Ruang Bernorma-G

Ortogonality and P-and -I Angle in G-Normed Space

Bachtiar Rifai Khaidar dan Muhammad Jakfar*
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Surabaya
Jln. Ketintang, Surabaya 60231

ABSTRAK

Di dalam ruang hasil kali dalam, telah diperkenalkan konsep sudut antara dua vektor, dan konsep tersebut terdefinisi serta memenuhi sifat-sifat alami sudut pada umumnya. Akan tetapi, jika kita melihat ruang yang lebih besar lagi yaitu ruang bernorma, maka konsep sudut antara dua vektor yang sudah diperkenalkan (sudut-P dan -I) tidak memenuhi semua sifat-sifat alami sudut, sehingga bisa kita bilang definisi tersebut kurang bagus. Oleh karena itu, dalam artikel ini, kita akan mengembangkan beberapa konsep sudut antara dua vektor di ruang bernorma-G (generalisasi dari ruang bernorma) dan akan dibahas pula tentang sifat-sifatnya. Akhirnya, kita berhasil mengkonstruksi konsep sudut yang memenuhi semua sifat-sifat dasar sudut pada ruang bernorma-G.
Kata Kunci: sudut; ruang hasil kali dalam; ruang bernorma; ortogonalitas, ruang bernorma-G

ABSTRACT

In inner product spaces, we have been known the concept of angles between two vectors, and the concept well defined as well as fill natural property the angles in general. However, if we see again larger space which is the normed space, then the concept of angles had been exposed (P- and I-angles) are not fill for all natural property of angles, so can we said that definition are not good. Therefore, in this article, we shall develop some concepts of angles between two vectors in G-normed space (normed space generalized) and study their properties. Finally, we success to construct the formula of angle which satisfy all of natural properties of angle in a G-normed spaces
Key Words: *angles; inner product spaces; norm spaces; orthogonality, G-normed spaces*

PENDAHULUAN

Pada ruang hasil kali dalam $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, sudut $A(u,v)$ di antara dua vektor tak nol u dan v di X didefinisikan sebagai

$$A(u,v)=\cos^{-1}\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}\right)$$

Dimana $\|u\|=\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$ dinotasikan dengan menginduksikan norm di X. Sudut $A(\cdot,\cdot)$ di X memenuhi sifat-sifat alami di bawah ini :

a. Paralelisme (Kesejajaran)
   $A(u,v)=0$ jika dan hanya jika u dan v memiliki arah yang sama;
   $A(u,v)=\pi$ jika dan hanya jika u dan v memiliki arah yang berlawanan.
b. Simetri
   $A(u,v)=A(v,u)$ untuk $\forall u,v\in X$.
c. Homogenitas
   $A(au,bv)=A(u,v)$ jika $ab>0$;
   $A(au,bv)=\pi-A(u,v)$ jika $ab<0$
d. Kontinuitas (Kekontinuan)
   Jika $u_n\to u$ dan $v_n\to v$ (dalam norm), maka $A(u_n,v_n)\to A(u,v)$

Sekarang misalkan $(X,\|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma (riil). Seperti yang diketahui, tidak semua ruang bernorma adalah ruang hasil kali dalam (Hendra, 2005). Misalnya, ruang $l^p=l^p(\mathbb{R}),1\le p<\infty$, terdiri atas semua urutan riil $x=(\xi_k)$ dengan $\sum|\xi_k|^p<\infty$, sebuah ruang bernorma dengan norm $\|x\|_p=[\sum|\xi_k|^p]^{1/p}$, tetapi bukan sebuah hasil kali dalam, kecuali untuk $p=2$.

Pada ruang bernorma, sudah didefinisikan sudut-P dan $-I$ (Gunawan dkk., 2005) yang terinspirasi dari ortogonalitas-P dan -I. Namun, kedua sudut tersebut tidak memenuhi sifat alami sudut. Sifat-sifat yang dipenuhi hanyalah simetri, kontinuitas, sebagian sifat paralelisme (kesejajaran), dan sebagian sifat homogenitas melalui penelusuran di berbagai jurnal hingga saat ini belum ada matematikawan yang meneliti tentang sudut di ruang bernorma atau bernorma-G yang memenuhi sifat alami sudut.

Pada artikel ilmiah ini, akan didefinisikan sudut-P dan $-I$ di ruang yang lebih luas yakni ruang bernorma-G. Sifat-sifat dari sudut-P dan $-I$ di ruang bernorma-G juga akan dibahas. Selanjutnya, akan dibentuk konsep sudut baru yang merupakan revisi dari sudut-P dan $-I$ (sudut-rP dan sudut-rI) dan memenuhi semua sifat alami sudut.

METODE PENELITIAN

1. Ruang Hasil Kali Dalam

Hasil kali dalam (*inner product*) pada ruang vektor riil $\mathcal{V}$ adalah fungsi yang menginterpretasikan bilangan riil $\langle .,.\rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor u dan v pada $\mathcal{V}$

*Alamat korespondensi:
muhammadjakfar@unesa.ac.id

sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma berikut dibentuk untuk semua vektor u, v, dan w di V juga untuk semua skalar k, dengan memenuhi beberapa aksioma berikut :

- $\langle u,u\rangle \geq 0$
- $\langle u,u\rangle = 0 \iff u = 0$
- $\overline{\langle u,v\rangle} = \langle v,u\rangle$
- $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$
- $\langle ku,v\rangle = k\langle u,v\rangle$

  $\langle .,.\rangle$ disebut hasil kali dalam dan $(V\langle .,.\rangle)$ disebut ruang hasil kali dalam pada V.

2. Ruang Bernorma

Diberikan ruang linier X dari suatu fungsi riil $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ disebut norm yang memenuhi sifat-sifat berikut ini :

- $\|x\| \geq 0; \forall x \in X$;
- $\|x\| = 0 \iff x = 0, \forall x \in X$ (vektor nol);
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall x \in X \cap \alpha \in \mathbb{R}$;
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x,y \in X$;

disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan non-negatif x disebut norma vektor x. Ruang linier X yang dilengkapi dengan suatu norma $\|\cdot\|$ disebut ruang bernorma (*normed space*) dan dituliskan singkat dengan $(X, \|\cdot\|)$ atau X apabila normanya sudah diketahui (Darmawijaya, 2007).

3. Sudut-P dan –I

Meskipun konsep sudut dalam ruang bernorma sudah dikembangkan sebelumnya, pembahasan konsep sudut tersebut sangat terbatas. Seperti yang diketahui, konsep dari sudut tersebut tidak ditemukan sebelum pembahasan ini, kecuali untuk sudut-g.

Ambil $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma (riil). Sebelum kita menuju ke konsep dari sudut antara kedua vektor di X, dikenal untuk mengikuti konsep dari ortogonalitas-P dan –I :

i. *Ortogonalitas-P* : x adalah ortogonalitas-P ke y, dinotasikan $x \perp_P y$, jika dan hanya jika
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ii. *Ortogonalitas-I* : x adalah ortogonalitas-I ke y, dinotasikan $x \perp_I y$, jika dan hanya jika
$$\|x+y\| = \|x-y\|$$

Terinspirasi oleh kedua konsep ortogonalitas ini, kita menjelaskan konsep dari sudut di X berikut :

iii. *Sudut-P* di antara dua vektor tak nol x dan y, dinotasikan $A_P(x,y)$, diberikan oleh :
$$A_P(x,y) = \cos^{-1}\left(\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2}{2\,\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

iv. *Sudut-I* di antara dua vektor tak nol x dan y, dinotasikan $A_I(x,y)$, diberikan oleh :
$$A_I(x,y) = \cos^{-1}\left(\frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4\,\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

Perlu dicatat bahwa $A_P(x,y) = \frac{1}{2}\pi$ jika dan hanya jika $x \perp_P y$, dan $A_I(x,y) = \frac{1}{2}x$ jika dan hanya jika $x \perp_I y$. Pada ruang hasil kali dalam $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, sudut-$P$ dan –I berimpit dengan sudut biasa $A(x,y)$ karena
$$\frac{1}{2} \cdot [\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2] = \langle x,y\rangle$$
Dari hukum Cosinus, dan
$$\frac{1}{4} \cdot [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] = \langle x,y\rangle$$
Dari Identitas Polarisasi.

Ada dua fakta di bawah ini yang menjelaskan sifat-sifat dari sudut-P dan –I di $(X, \|\cdot\|)$.

Teorema 3.1 Sudut-P memenuhi sifat-sifat berikut :

(a) Jika x dan y memiliki arah yang sama, maka $A_P(x,y) = 0$; jika x dan y memiliki arah yang berlawanan, maka $A_P(x,y) = \pi$ (bagian dari sifat-sifat kesejajaran)

(b) $A_P(x,y) = A_P(y,x), \forall x,y \in X$ (sifat-sifat simetri)

(c) $A_P(ax,ay) = A_P(x,y), \forall x,y \in X$ dan $\forall a \in \mathbb{R}$ (bagian dari sifat-sifat homogenitas)

(d) Jika $x_n \to x$ dan $y_n \to y$ (dalam norm), maka $A_P(x_n,y_n) \to A_P(x,y)$ (sifat-sifat kontinuitas)

Teorema 3.2 Sudut-I memenuhi sifat-sifat berikut :

(a) Jika x dan y memiliki arah yang sama, maka $A_I(x,y) = 0$; jika x dan y memiliki arah yang berlawanan, maka $A_I(x,y) = \pi$ (bagian dari sifat-sifat kesejajaran)

(b) $A_I(x,y) = A_I(y,x), \forall x,y \in X$ (sifat-sifat simetri)

(c) $A_I(ax,ay) = A_I(x,y)$ dan $A_I(ax,-ay) = \pi - A_I(x,y)$ untuk $\forall x,y \in X$ dan $\forall a \in \mathbb{R}$ (bagian dari sifat-sifat homogenitas)

(d) Jika $x_n \to x$ dan $y_n \to y$ (dalam norm), maka $A_I(x_n,y_n) \to A_I(x,y)$ (sifat-sifat kontinuitas)

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Ruang Bernorma-*G*

Ambil X adalah ruang vektor dengan unsur identitas 0, dan $\|\cdot,\cdot\| : X \times X \to \mathbb{R}$ ke setiap pemetaan. Pada artikel ini, secara terus-menerus gunakan notasi $\|\cdot\| := \|\cdot, 0\|$, $\|a\| = \|a, 0\|, \forall a \in X$.

Definisi 1

Ambil X pada ruang vektor real dan $\|\cdot,\cdot,\cdot\| : X^3 \to \mathbb{R}$ memetakan berikut memenuhi $\forall \alpha, \beta, \gamma \in X$

(N1) $\|\alpha, \beta, \gamma\| \geq 0$ dan $\|\alpha, \beta, \gamma\| = 0$ jika dan hanya jika $\alpha = \beta = \gamma = 0$,

(N2) $\|\alpha, \beta, \gamma\|$ adalah invarian terhadap permutasi α, β, dan γ,

(N3) $\|n\alpha, n\beta, n\gamma\| = |n| \cdot \|\alpha, \beta, \gamma\|$ untuk semua $n \in \mathbb{R}$ dan $\alpha, \beta, \gamma \in X$,

(N4) $\|\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma'\| \leq \|\alpha, \beta, \gamma\| + \|\alpha', \beta', \gamma'\|$ untuk semua $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in X$

(N5) $\|\alpha, \beta, \gamma\| \geq \|\alpha + \beta, 0, \gamma\|$ untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in X$

Pasangan terurut $(X, \|\cdot,\cdot,\cdot\|)$ disebut dengan ruang bernorma-G.

Dalam ruang bernorma, kita dapat mendefinisikan G-norm sebagai berikut :

$$\|\alpha, \beta, \gamma\| = \|\alpha\| + \|\beta\| + \|\gamma\|$$

2. Ortogonalitas-*P* di Ruang Bernorma-*G*

Kita tahu bahwa, ortogonalitas-P di ruang bernorma adalah sebagai berikut :

u adalah ortogonalitas-P ke v, dinotasikan $u \perp_P v$, jika dan hanya jika

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad (1)$$

Terinspirasi dari konsep tersebut, maka didefinisikan ortogonalitas-P di ruang bernorma-G adalah sebagai berikut :

u adalah ortogonalitas-P ke v, dinotasikan $u \perp_P v$, jika dan hanya jika

$$\|u - v, u - v, u - v\|^2 = \|u, u, u\|^2 + \|v, v, v\|^2 \quad (2)$$

Jelas bahwa jika ruang bernorma-G adalah ruang bernorma, maka persamaan (2) akan menghasilkan (1) karena kita tahu bahwa di ruang bernorma berlaku

$$\|u, v, w\| = \|u\| + \|v\| + \|w\|$$

Sehingga, diperoleh persamaan (2) menjadi (1).

3. Ortogonalitas-*I* di Ruang Bernorma-*G*

Kita tahu bahwa, ortogonalitas-I di ruang bernorma adalah sebagai berikut :

u adalah ortogonalitas-I ke v, dinotasikan $u \perp_I v$, jika dan hanya jika

$$\|u + v\| = \|u - v\| \quad (3)$$

Terinspirasi dari konsep tersebut, maka didefinisikan ortogonalitas-I di ruang bernorma-G adalah sebagai berikut :

u adalah ortogonalitas-I ke v, dinotasikan $u \perp_I v$, jika dan hanya jika

$$\|u + v, u + v, u + v\| = \|u - v, u - v. u - v\| \quad (4)$$

Jelas bahwa jika ruang bernorma-G adalah ruang bernorma, maka persamaan (4) akan menghasilkan (3) karena kita tahu bahwa di ruang bernorma berlaku

$$\|u, v, w\| = \|u\| + \|v\| + \|w\|$$

Sehingga, diperoleh persamaan (4) menjadi (3).

4. Teorema dari Sudut-*P* di Ruang Bernorma-*G*

Kita tahu bahwa, sudut-P di ruang bernorma adalah sebagai berikut :

sudut-P di antara dua vektor tak nol u dan v, dinotasikan $A_P(u, v)$, diberikan oleh :

$$A_P(u, v) = \cos^{-1}\left(\frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2}{2\,\|u\| \cdot \|v\|}\right)$$

Terinspirasi dari konsep tersebut, maka didefinisikan sudut-P di ruang bernorma-G adalah sebagai berikut :

sudut-P di antara dua vektor tak nol u dan v, dinotasikan $A_P(u, v)$, diberikan oleh :

$$A_P(u, v) = \cos^{-1}\left(\frac{\|u, u, u\|^2 + \|v, v, v\|^2 - \|u - v, u - v, u - v\|^2}{2\,\|u, u, u\| \cdot \|v, v, v\|}\right)$$

Jelas bahwa jika ruang bernorma-G adalah ruang bernorma, maka persamaan

Teorema 4 Sudut-P memenuhi sifat-sifat berikut :

(a) Jika x dan y memiliki arah yang sama, maka $A_P(u, v) = 0$; jika u dan v memiliki arah yang berlawanan, maka $A_P(u, v) = \pi$ (bagian dari sifat-sifat kesejajaran)

(b) $A_P(u, v) = A_P(v, u), \forall u, v \in X$ (sifat-sifat simetri)

(c) $A_P(au, av) = A_P(u, v), \forall u, v \in X$ dan $\forall a \in \mathbb{R}$ (bagian dari sifat-sifat homogenitas)

(d) Jika $u_n \to u$ dan $v_n \to v$ (dalam norm), maka $A_P(u_n, v_n) \to A_P(u, v)$ (sifat-sifat kontinuitas)

Bukti :

(a) Jika u dan v memiliki arah yang sama, maka $v = ku$ dengan $k > 0$, maka

$$A_P(u,ku)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u,u,u\|^2 + \|ku,ku,ku\|^2 - \|u-ku,u-ku,u-ku\|^2}{2\cdot\|u,u,u\|\cdot\|ku,ku,ku\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u,u,u\|^2 + k^2\|u,u,u\|^2 - \|u(1-k),u(1-k),u(1-k)\|^2}{2k\cdot\|u,u,u\|\cdot\|u,u,u\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{(1+k^2-(1-k)^2)}{2k}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{(1+k^2-(1-2k+k^2))}{2k}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2k}{2k}\right) = \cos^{-1}(1)$$
$$= 0$$

Jika u dan v memiliki arah yang berlawanan, maka $v = -ku$ dengan $k > 0$, maka

$$A_P(u,-ku)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u,u,u\|^2 + \|-ku,-ku,-ku\|^2 - \|u+ku,u+ku,u+ku\|^2}{2\cdot\|u,u,u\|\cdot\|-ku,-ku,-ku\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u,u,u\|^2 + k^2\|u,u,u\|^2 - \|u(1+k),u(1+k),u(1+k)\|^2}{2k\cdot\|u,u,u\|\cdot\|u,u,u\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{(1+k^2-(1+k)^2)}{2k}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(1+k^2-(1+2k+k^2))}{2k}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-2k}{2k}\right) = \cos^{-1}(-1) = \pi$$

(b) Kita tahu bahwa

$$A_P(u,v)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u,u,u\|^2 + \|v,v,v\|^2 - \|u-v,u-v,u-v\|^2}{2\,\|u,u,u\|\cdot\|v,v,v\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|v,v,v\|^2 + \|u,u,u\|^2 - \|v-u,v-u,v-u\|^2}{2\,\|v,v,v\|\cdot\|u,u,u\|}\right)$$
$$= A_P(v,u)$$

(c) Kita tahu bahwa

$$A_P(au,av)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|au,au,au\|^2 + \|av,av,av\|^2 - \|au-av,au-av,au-av\|^2}{\|au,au,au\|\cdot\|av,av,av\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u,u,u\|^2 + \|v,v,v\|^2 - \|u-v,u-v,u-v\|^2}{\|u,u,u\|\cdot\|v,v,v\|}\right) = A_P(u,v)$$

(d) Kontinuitas berikut dari kontinuitas dari norm-G dan arccos.

5. Teorema dari Sudut-*I* di Ruang Bernorma-*G*

Kita tahu bahwa, sudut-*I* di ruang bernorma adalah sebagai berikut :
sudut-*I* di antara dua vektor tak nol u dan v, dinotasikan $A_I(u,v)$, diberikan oleh :

$$A_I(u,v) = \cos^{-1}\left(\frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4\,\|u\|\cdot\|v\|}\right)$$

Terinspirasi dari konsep tersebut, maka didefinisikan sudut-*I* di ruang bernorma-*G* adalah sebagai berikut :
sudut-*I* di antara dua vektor tak nol x dan y, dinotasikan $A_I(u,v)$, diberikan oleh :

$$A_I(u,v)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u+v,u+v,u+v\|^2 - \|u-v,u-v,u-v\|^2}{4\,\|u,u,u\|\cdot\|v,v,v\|}\right)$$

Jelas bahwa jika ruang bernorma-*G* adalah ruang bernorma, maka persamaan

Teorema 5 Sudut-*I* memenuhi sifat-sifat berikut :

(a) Jika x dan y memiliki arah yang sama, maka $A_I(u,v) = 0$; jika u dan v memiliki arah yang berlawanan, maka $A_I(u,v) = \pi$ (bagian dari sifat-sifat kesejajaran)

(b) $A_I(u,v) = A_I(v,u), \forall u,v \in X$ (sifat-sifat simetri)

(c) $A_I(au,av) = A_I(u,v)$ dan $A_I(au,-av) = \pi - A_I(u,v)$ untuk $\forall u,v \in X$ dan $\forall a \in \mathbb{R}$ (bagian dari sifat-sifat homogenitas)

(d) Jika $u_n \to u$ dan $v_n \to v$ (dalam norm), maka $A_I(u_n,v_n) \to A_I(u,v)$ (sifat-sifat kontinuitas)

Bukti :

(a) Jika u dan v memiliki arah yang sama, maka $y = kx$ dengan $k > 0$, maka

$$A_I(u,ku)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u+ku,u+ku,u+ku\|^2 - \|u-ku,u-ku,u-ku\|^2}{4\cdot\|u,u,u\|\cdot\|kx,kx,kx\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u(1+k),u(1+k),u(1+k)\|^2 - \|u(1-k),u(1-k),u(1-k)\|^2}{4k\cdot\|u,u,u\|\cdot\|u,u,u\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{((1+k)^2-(1-k)^2)}{4k}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4k}{4k}\right) = \cos^{-1}(1)$$
$$= 0$$

Jika x dan y memiliki arah yang berlawanan, maka $y = -kx$ dengan $k > 0$, maka

$$A_I(u,-ku)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u-ku,u-ku,u-ku\|^2 - \|u+ku,u+ku,u+ku\|^2}{4\cdot\|u,u,u\|\cdot\|ku,ku,ku\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u(1-k),u(1-k),u(1-k)\|^2 - \|u(1+k),u(1+k),u(1+k)\|^2}{4k\cdot\|u,u,u\|\cdot\|u,u,u\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{((1-k)^2-(1+k)^2)}{4k}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-4k}{4k}\right) = \cos^{-1}(-1)$$
$$= \pi$$

(b) Kita tahu bahwa

$$A_I(u,v)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u+v,u+v,u+v\|^2 - \|u-v,u-v,u-v\|^2}{4\,\|u,u,u\|\cdot\|v,v,v\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|v+u,v+u,v+u\|^2 - \|v-u,v-u,v-u\|^2}{4\,\|v,v,v\|\cdot\|u,u,u\|}\right)$$
$$= A_I(v,u)$$

(c) Kita tahu bahwa

$$A_I(au,av)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|au+av,au+av,au+av\|^2 - \|au-av,au-av,au-av\|^2}{4\,\|au,au,au\|\cdot\|av,av,av\|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{\|u+v,u+v,u+v\|^2 - \|u-v,u-v,u-v\|^2}{4\,\|u,u,u\|\cdot\|v,v,v\|}\right)$$
$$= A_I(u,v)$$

(d) Sama seperti sudut-*P*, kontinuitas berikut juga dari norm-*G* dan arccos.

6. Revisi dari Sudut-*P* dan –*I* di Ruang Bernorma-*G*

Terinspirasi dari fakta bahwa

$$A(u,v) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}\right) = \cos^{-1}\left(\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\rangle\right)$$

Maka diperoleh definisi dari sudut-*rP* sebagai berikut

$$A_{rP}(u,v) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2 - \left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2\right)\right)$$

Selain itu, maka juga ditemukan definisi dari sudut-rI sebagai berikut

$$A_{rI}(u,v)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}+\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}+\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}+\frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2\right)\right)$$

Jelas bahwa jika ruang bernorma-G adalah ruang bernorma, maka persamaan

Teorema 6.1 Sudut-rP memenuhi sifat-sifat berikut :

(a) u dan v memiliki arah yang sama jika dan hanya jika $A_{rP}(u,v)=0$; Dan, jika u dan v memiliki arah yang berlawanan maka $A_{rP}(u,v)=\pi$ (bagian sifat-sifat kesejajaran)

(b) $A_{rP}(u,v)=A_{rP}(v,u),\forall u,v\in X$ (sifat-sifat simetri)

(c) $A_{rP}(au,bv)=A_{rP}(u,v),\forall u,v\in X$ dan $\forall a,b\in\mathbb{R}$ (bagian dari sifat-sifat homogenitas)

(d) Jika $u_n\to u$ dan $v_n\to v$ (dalam norm), maka $A_{rP}(u_n,v_n)\to A_{rP}(u,v)$ (sifat-sifat kontinuitas)

Bukti :

(a) Kita tahu bahwa jika $v=ku$ dengan $k>0$ maka

$$A_{rP}(u,ku)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{ku}{\|ku,ku,ku\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{ku}{\|ku,ku,ku\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}\right\|^2\right)\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{u}{\|u,u,u\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{u}{\|u,u,u\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2\right)\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}(2-\|0,0,0\|^2)\right)=\cos^{-1}(1)=0$$

Sedangkan jika $v=-ku$, maka

$$A_{rP}(u,-ku)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}+\frac{ku}{\|ku,ku,ku\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}+\frac{ku}{\|ku,ku,ku\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}+\frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}\right\|^2\right)\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}+\frac{u}{\|u,u,u\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}+\frac{u}{\|u,u,u\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}+\frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2\right)\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-4\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|},\frac{u}{\|u,u,u\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2\right)\right)=\cos^{-1}(-1)=\pi\,.$$

Sebaliknya, jika $A_{rP}(u,v)=0$, maka

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2\right)\right)=0$$

$$\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2\right)=1$$

$$2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2=2$$

$$\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|=0$$

Maka, $\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|}=0$ dan $\frac{u}{\|u,u,u\|}=\frac{v}{\|v,v,v\|}$.

Artinya, $v=\frac{\|v,v,v\|}{\|u,u,u\|}u$.

Jadi, v searah dengan u.

(b) Kita tahu bahwa

$$A_{rP}(u,v)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2\right)\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{v}{\|v,v,v\|}-\frac{u}{\|u,u,u\|},\frac{v}{\|v,v,v\|}-\frac{u}{\|u,u,u\|},\frac{v}{\|v,v,v\|}-\frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2\right)\right)=A_{rP}(v,u)$$

(c) Kita tahu bahwa jika $ab>0$ maka

$$A_{rP}(au,bv)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{au}{\|au,au,au\|}-\frac{bv}{\|bv,bv,bv\|},\frac{au}{\|au,au,au\|}-\frac{bv}{\|bv,bv,bv\|},\frac{au}{\|au,au,au\|}-\frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}\right\|^2\right)\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(2-\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|},\frac{u}{\|u,u,u\|}-\frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2\right)\right)=A_{rP}(u,v)$$

(d) Kontinuitas dari sudut-rP dari norm-G dan arccos.

Teorema 6.2 Sudut-rI memenuhi sifat-sifat berikut :

(a) u dan v memiliki arah yang sama jika dan hanya jika $A_{rI}(u,v)=0$; Dan, u dan v memiliki arah yang berlawanan jika dan hanya jika $A_{rI}(u,v)=\pi$ (sifat kesejajaran)

(b) $A_{rI}(u,v)=A_{rI}(v,u),\forall u,v\in X$ (sifat-sifat simetri)

(c) $A_{rI}(au,bv) = A_{rI}(u,v)$ jika $ab > 0$, dan $A_{rI}(au,bv) = \pi - A_{rI}(u,v)$ jika $ab < 0$ untuk $\forall u,v \in X$ dan $\forall a,b \in \mathbb{R}$ (sifat-sifat homogenitas)

(d) Jika $u_n \to u$ dan $v_n \to v$ (dalam norm), maka $A_{rI}(u_n,v_n) \to A_{rI}(u,v)$ (sifat-sifat kontinuitas)

Bukti :

(a) Kita tahu bahwa jika $v = ku$ dengan $k > 0$ maka

$$A_{rI}(u,ku) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}\right\|^2 - \left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}\right\|^2\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2 - \|0,0,0\|^2\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2\right) = \cos^{-1}(1) = 0$$

Sedangkan jika $v = -ku$, maka

$$A_{rI}(u,-ku) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}\right\|^2 - \left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{ku}{\|ku,ku,ku\|}\right\|^2\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\|0,0,0\|^2 - \left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(-\left(\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}(-1) = \pi$$

Arah sebaliknya, dapat dibuktikan memanfaatkan menggunakan sifat untuk setiap $\bar{u},\bar{v} \in X$ berlaku

$$\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}\right\| \leq 2$$

(b) Kita tahu bahwa

$$A_{rI}(u,v) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2 - \left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2\right)\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{v}{\|v,v,v\|} + \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{v}{\|v,v,v\|} + \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{v}{\|v,v,v\|} + \frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2 - \left\|\frac{v}{\|v,v,v\|} - \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{v}{\|v,v,v\|} - \frac{u}{\|u,u,u\|}, \frac{v}{\|v,v,v\|} - \frac{u}{\|u,u,u\|}\right\|^2\right)\right) = A_{rI}(v,u)$$

(c) Kita tahu bahwa jika $ab > 0$ maka

$$A_{rI}(au,bv) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{au}{\|au,au,au\|} + \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}, \frac{au}{\|au,au,au\|} + \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}, \frac{au}{\|au,au,au\|} + \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}\right\|^2 - \left\|\frac{au}{\|au,au,au\|} - \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}, \frac{au}{\|au,au,au\|} - \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}, \frac{au}{\|au,au,au\|} - \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}\right\|^2\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2 - \left\|\frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}\right\|^2\right)\right)$$

$$= A_{rI}(u,v)$$

Jika $ab < 0$ maka

$$
\begin{aligned}
A_{rI}(au,bv) = \cos^{-1}\Bigg(\frac{1}{4}\Bigg(\Bigg\| & \frac{au}{\|au,au,au\|} \\
& + \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}, \frac{au}{\|au,au,au\|} \\
& + \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}, \frac{au}{\|au,au,au\|} \\
& + \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}\Bigg\|^2 \\
& - \Bigg\|\frac{au}{\|au,au,au\|} \\
& - \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}, \frac{au}{\|au,au,au\|} \\
& - \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}, \frac{au}{\|au,au,au\|} \\
& - \frac{bv}{\|bv,bv,bv\|}\Bigg\|^2\Bigg)\Bigg) \\
& = \cos^{-1}\Bigg(\frac{1}{4}\Bigg(\Bigg\|\frac{u}{\|u,u,u\|} \\
& - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} \\
& - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}\Bigg\|^2 \\
& - \Bigg\|\frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} \\
& + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}\Bigg\|^2\Bigg)\Bigg) \\
& = \cos^{-1}\Bigg(-\frac{1}{4}\Bigg(\Bigg\|\frac{u}{\|u,u,u\|} \\
& + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} \\
& + \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} + \frac{v}{\|v,v,v\|}\Bigg\|^2 \\
& - \Bigg\|\frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} \\
& - \frac{v}{\|v,v,v\|}, \frac{u}{\|u,u,u\|} - \frac{v}{\|v,v,v\|}\Bigg\|^2\Bigg)\Bigg) \\
& = \pi - A_{rI}(u,v)
\end{aligned}
$$

(d) Sama seperti sudut-*rP*, kontinuitas dari sudut-*rI* juga dari norm-*G* dan arccos.

.

SIMPULAN

Konsep sudut terdefinisi dengan baik di ruang hasil kali dalam. Sifat-sifat alaminya pun terpenuhi. Namun, di ruang bernorma, konsep sudut yang dibangun yaitu sudut-P dan –I, tidak memenuhi semua sifat-sifat alaminya.

Dari pembahasan di ruang bernorma-G, telah berhasil didefinisikan konsep sudut antara dua vektor, yakni sudut-P, -I, -rP, dan –rI. Namun, sudut-P, -I, dan -rP, masih ada sifat-sifat alami sudut yang belum terpenuhi. Dari sini pula, diperoleh bahwa sudut-rI merupakan sudut yang memenuhi semua sifat-sifat alami sudut. Artinya, sudut-rI lebih alami dari pada sudut-P dan sudut-rI lebih alami daripada sudut-I.

Dari artikel ilmiah ini, karena telah berhasil ditemukan konsep sudut yang alami di ruang bernorma-G, yaitu sudut-rI, maka telah terbuka pula peluang untuk mengembangkan sifat-sifatnya dan aplikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

Balestro, V., Horvath, A.G., Martini, H., dan Teixeira, R. 2017. Angled in Normed Spaces. Aequationes Math. Vol. 91-2, 201–236.

Darmawijaya, S. 2007. Pengantar Analisis Abstrak. Yogyakarta : Universitas Gadjah Mada.

Gunawan, H., dan Mashadi. 2001. On n-normed spaces. Int. J. Math. Math. Sci. Vol. 27, 631-639.

Freese, R. Dan Cho, Y.J. 2001. Geometry of Linear 2-normed Spaces. New York : Nova Science Publ.

Gunawan, H., Jamaludin, M., dan Pratamadirdja, M.D. 2021. On Birkhoff Angles in Normed Spaces. Journal of Indonesian Mathematical Society, Vol. 27-3, 270-284.

Gunawan, H., Lindiarni, J., dan Neswan, O. 2008. P-, I-, g-, and D- Angles in Normed Space. Bandung : Institut Teknologi Bandung, ITB J. Math. Fund. Sci. Vol. 40-1, 24-32.

Gunawan, H., Lindiarni, J., Neswan, O., dan Nursupiamin. 2008. Ortogonalitas dan Sudut Antara Dua Vektor di Ruang Norm, Prosiding Seminar Nasional Matematika & Pend. Matematika. Yogyakarta : Universitas Negeri Yogyakarta.

Gunawan, H., Nursupiamin, dan Kikianty, E. 2005. Beberapa Konsep Ortogonalitas di Ruang Norm. Bandung : Institut Teknologi Bandung, Jurnal MIPA (28).

Ikhwanudin, Tresno. 2017. Aljabar-C* dan Keunikan Norm C*. Jurnal Science Tech Vol. 3-2, 81-84.

Kartika, Y. 2012. Perkalian dan Akar Kuadrat untuk Operator Self-Adjoint. Bandar Lampung : Universitas Lampung.

Kreyszig, Erwin. 1978. Introductory Functional Analysis With Applications. New York : John Wiley & Sons.

Khan, K.A. 2014. Generalized Normed Spaces and Fixed Point Theorems. Journal of Mathematics and Computer Science Vol. 13, 157-167.

Leleury, Z.A. 2014. Sistem Ortonormal dalam Ruang Hilbert. Ambon : Universitas Pattimura. Jurnal Barekeng, Vol. 8-2, 19-26.

Siddiq, H.A. 2010. Fungsi Linear Terbatas pada Ruang Hilbert. Pekanbaru : Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim