



ANALISIS MODEL PREDATOR-PREY LESLIE-GOWER DENGAN PEMBERIAN RACUN PADA PREDATOR

SITI HARDIYANTI ARSYAD¹, RESMAWAN², NOVIANITA ACHMAD³

^{1,2,3} Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo

* sitihardiyantiarsyad00@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang model predator-prey dengan asumsi pemberian racun pada predator. Interaksi antara predator-prey menggunakan fungsi respons Holling tipe II. Pertumbuhan predator-prey menggunakan fungsi logistik. Dinamika model di sekitar titik kesetimbangan dipengaruhi oleh kestabilan dari titik kesetimbangan. Dari model tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan model, yaitu titik kesetimbangan kepunahan predator dan titik kesetimbangan interior. Titik kesetimbangan kepunahan pada predator selalu tidak stabil dalam kondisi apapun, sedangkan titik kesetimbangan interior dapat mencapai kondisi stabil dengan beberapa syarat. Pada bagian akhir, diberikan simulasi numerik untuk menunjukkan parameter efektivitas pemberian racun pada predator.

Kata Kunci: Predator-Prey, Leslie-Gower; Racun; Titik Kesetimbangan

ABSTRACT

This study discusses a predator-prey model assuming poison is given to predators. The interaction between predators uses a type II Holling functional response. Growth of predator-prey using logistics function. The dynamics of the model around the equilibrium point is influenced by the stability of the equilibrium point. From the model acquired two equilibrium points of the model, namely the equilibrium points of the extinction of the predator and the equilibrium point of the interior. The extinction point in the predator is always unstable under any circumstances, while the equilibrium point of the interior can achieve a stable condition with some conditions. At the end, it was given a numerical simulation to demonstrate the effectiveness parameters of poison feeding on predators.

Keywords: Predator-Prey, Leslie-Gower; Toxins, Equilibrium Point

1 Pendahuluan

Setiap makhluk hidup dituntut untuk senantiasa berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi yang terjadi antara individu dalam satu spesies atau interaksi antara individu dengan spesies yang berbeda dapat berdampak positif bagi keduanya, berdampak negatif bagi keduanya maupun berdampak negatif bagi salah satu spesies dan positif bagi spesies yang lain. Jika berdampak positif bagi keduanya, interaksi keduanya disebut simbiosis mutualisme. Jika berdampak negatif bagi keduanya disebut persaingan, dan jika berdampak positif bagi spesies

yang satu sedangkan bagi spesies yang lainnya negatif maka interaksi tersebut disebut dengan mangsa-pemangsa atau prey-predator [1].

Model predator-prey adalah objek kajian yang sangat menarik untuk dipelajari dalam bidang matematika ekologi karena menyangkut eksistensi dari satu atau lebih spesies. Model ini sangat populer yang dibuktikan dengan banyaknya penelitian yang mempelajari model ini. Batasan dari model ini sangatlah luas sehingga banyak peneliti melakukan modifikasi dan mengembangkan model predator-prey dengan harapan model tersebut bersesuaian dengan kondisi mangsa-pemangsa yang ada di alam [2]. Pada tahun 1948, Leslie dan Gower melakukan modifikasi pada sistem Lotka-Volterra. Populasi predator yang awalnya bertumbuh secara eksponensial dengan adanya pengaruh predasi dimodifikasi menjadi bertumbuh secara logistik dengan asumsi bahwa daya dukung lingkungan predator proporsional terhadap jumlah populasi prey, dan model yang diperoleh dari modifikasi tersebut dikenal dengan model Leslie-Gower [3]. Populasi mangsa mempunyai persediaan makanan yang tersedia cukup di dalam lingkungannya, sedangkan pada populasi pemangsa memiliki makanan yang bergantung pada jumlah mangsa. Apabila populasi mangsa terbatas maka untuk populasi pemangsa akan menurun sesuai dengan jumlah proporsi mangsanya [4].

Beberapa penelitian telah membahas modifikasi model predator-prey diantaranya Afiah [1] membahas tentang model predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II. Selanjutnya Keong dkk [5] membahas model predator-prey dengan pemanenan dan adanya pengaruh racun pada kedua populasi. Hasan, dkk [6] juga membahas topik serupa dengan pemanenan kontan pada predator. Penelitian terbaru dilakukan oleh Panigoro, dkk [7] yang membahas tentang model Leslie-Gower. Adapun dalam tulisan ini dipertimbangkan adanya peran manusia dalam eksistensi predator dan prey. Dalam suatu lingkungan yang memperlihatkan adanya interaksi antara predator dan prey, misalnya di lingkungan peternakan yang terdapat predator-prey dengan prey terancam punah karena adanya predator. Oleh karena itu, dalam makalah ini dibahas tentang model predator-prey Leslie-Gower dengan pemberian racun pada predator. Model diperoleh menunjukkan untuk menganalisis kestabilan sistem.

2 Tinjauan Pustaka

2.1 Sistem Persamaan Differensial

Sistem persamaan diferensial orde satu dengan n fungsi tak diketahui yaitu x_1, x_2, \dots, x_n dapat ditulis

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

dengan f_i adalah fungsi kontinu pada $[a, b]$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ [8].

2.2 Titik Kesetimbangan

Misalkan sistem persamaan diferensial dinyatakan

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n \quad (1)$$

Definisi 1

Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan dari persamaan (1) jika $f(\bar{x}) = 0$ [9].

Definisi 2

Titik kesetimbangan $\bar{x} \in R^n$ pada system (1), berlaku:

- 1) Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$ maka $\bar{x} \in R^n$ stabil lokal.
- 2) Jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ maka $\bar{x} \in R^n$ stabil asimtotik lokal.
- 3) Jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in R^n$ tidak memenuhi poin [1] maka $\bar{x} \in R^n$ tidak stabil [10].

2.3 Linearisasi

Linierisasi merupakan proses metransformasi sistem persamaan diferensial yang non-linear kebentuk persamaan diferensial yang linier. Analisis kestabilan dapat dilakukan dengan pelinieran, untuk mencari hasil pelinieran dari sistem persamaan diferensial tak linear digunakan matriks jacobii.

Definisi 3

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f_i \in C(E), i = 1, 2, \dots, n$.

Diberikan matriks jacobian dari f di titik \bar{x} sebagai berikut:

$$Jf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

Definisi 4

Sistem linear $\dot{x} = Jf(\bar{x})(x - \bar{x})$ dikatakan linearisasi sistem non-linear $\dot{x} = f(x)$ disekitaran titik \bar{x} [11].

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A merupakan matriks $n \times n$, maka ada vektor tak nol x di dalam R^n disebut vektor eigen dari A , jika Ax merupakan sebuah kelipatan skalar dari x maka

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A , dan x disebut sebagai vektor eigen dari A . [11]

2.5 Analisis Kestabilan

Kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen yaitu λ_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ yang didapatkan dari penyelesaian matriks tak nol yang berukuran $n \times n$. Misalkan A adalah matriks yang berukuran $n \times n$ dan I adalah matriks identitas yang berukuran $n \times n$, maka nilai eigen dari matriks A mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Secara umum titik kesetimbangan mempunyai sifat sebagai berikut:

- 1) Akan stabil jika
 - a) Setiap nilai eigen real negatif maka $\lambda_i < 0$ untuk setiap i , atau
 - b) Terdapat $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ untuk sebarang j dan nilai eigen kompleks bagian real $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i \neq j$.
- 2) Tidak stabil jika
 - a) Terdapat paling sedikit nilai eigen real positif maka $\lambda_i > 0$ untuk setiap i .
 - b) Terdapat paling sedikit nilai eigen kompleks bagian real $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ untuk setiap i [12].

2.6 Model Predator-Prey

Ada beberapa jenis interaksi mangsa dan pemangsa seperti herbivora yang memakan jenis tanaman, karnivora memakan spesies hewan, parasit yang hidup pada atau di spesies lain dan kanibal yang makan spesies pemangsa dan satu spesies mangsa.

Interaksi yang terjadi antara mangsa dan pemangsa akan mengakibatkan terjadinya proses makan dan dimakan yang berpengaruh terhadap kepadatan populasi masing-masing. Model predator-prey dituliskan pada system persamaan diferensial (2),

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \beta PX \\ \frac{dX}{dt} &= \beta PX - \phi X \end{aligned} \quad (2)$$

dengan P dan X masing-masing menyatakan kepadatan populasi prey dan predator, sedangkan K, β, r, ϕ berturut-turut menyatakan *carrying capacity*, tingkat interaksi predator-prey, laju pertumbuhan prey, serta tingkat kematian predator. Diasumsikan $K, \beta, r, \phi > 0$ karena setiap populasi berpotensi berkembang biak [13].

2.7 Model Leslie-Gower

Pada tahun 1948, Leslie dan Gower memperkenalkan model dengan populasi predator tumbuh mengikuti model logistik sehingga pertumbuhannya terbatas. Selain itu, laju pertumbuhan predator sebanding dengan banyaknya populasi prey. Sehingga jika dinotasikan $x(t)$ sebagai kepadatan populasi prey dan $y(t)$ merupakan kepadatan populasi predator maka model *Leslie-Gower* diberikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial (3),

$$\dot{x} = (r_1 - c_1 y - b_1 x)x \quad (3)$$

$$\dot{y} = \left(r_2 - c_2 \frac{y}{x} \right) y$$

dengan x, y adalah variabel yang bergantung pada t , sedangkan b_1, c_1, c_2, r_1 , dan r_2 adalah konstanta positif [14].

2.8 Fungsi Respon

Fungsi respon dalam ekologi adalah jumlah makanan yang dimakan oleh predator sebagai fungsi kepadatan makanan. Dalam hal ini fungsi respon dibagi atas tiga macam, yaitu fungsi respon holling tipe I, tipe II, dan tipe III.

2.8.1 Holling Tipe I

Fungsi respon holling tipe I merupakan hubungan dengan tingkat konsumsi. Tingkat konsumsi predator meningkat linear dengan kepadatan prey, tetapi akan konstan ketika predator berhenti memangsa. Peningkatan linear mengasumsikan bahwa waktu yang dibutuhkan oleh konsumen untuk memproses pokok makanan diabaikan, atau bahwa mengkonsumsi makanan tidak mengganggu pencarian makanan. Fungsi respon holling tipe I terjadi pada predator yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu preynya, sebagai contoh predatornya adalah laba-laba. Fungsi respon holling tipe I adalah fungsi respon pertama yang dijelaskan dan juga yang paling sederhana dari tiga fungsi respon yang ada saat ini. Adapun tingkat pertumbuhan mangsa pada model fungsi respon holling tipe I diberikan

$$F^{(I)}(x) = ax$$

dengan $F^{(I)}$ menyatakan fungsi holling tipe I, a menyatakan tingkat konsumsi maksimum predator terhadap prey, dan x menyatakan jumlah populasi mangsa [15].

2.8.2 Holling Tipe II

Pada model holling tipe II, terlihat bahwa rata-rata tingkat konsumsi dari predator, ketika predator menghabiskan waktu untuk mencari prey. Fungsi respon tipe II terjadi pada predator yang berkarakteristik aktif dalam mencari prey, sebagai contoh predator -nya adalah serigala. Fungsi ini akan meningkat jika tingkat konsumsi menurun dan akan konstan jika mencapai titik kejenuhan (*half saturation*). Hal ini disebabkan setiap pemangsa hanya dapat memakan sejumlah mangsa pada saat satu satuan waktu. Adapun tingkat pertumbuhan mangsa pada model holling tipe II ditulis pada persamaan (4),

$$F^{(II)}(x) = \frac{ax}{1 + bx} \quad (4)$$

dengan $F^{(II)}$ menyatakan fungsi holling tipe II, a tingkat konsumsi maksimum predator terhadap prey, b menyatakan waktu pencarian prey, dan x menyatakan jumlah populasi mangsa [16].

2.8.3 Holling Tipe III

Model holling tipe III juga menggambarkan tingkat pertumbuhan pemangsa. Tetapi pada model ini dapat terlihat mengenai penurunan tingkat pemangsaan pada saat kepadatan mangsa rendah. Hal tersebut tidak dapat terlihat pada model holling tipe III. Fungsi respon holling tipe III terjadi pada predator yang cenderung akan mencari populasi prey yang lain ketika populasi prey yang dimakan mulai berkurang. Karena predator yang cenderung akan mencari populasi prey yang lain, maka tingkat pertemuan antara predator dan prey adalah dua. Hal inilah yang menyebabkan variabel populasi prey menjadi N^2 , sehingga laju populasi menjadi lebih cepat. Adapun tingkat pertumbuhan mangsa pada model holling tipe III ditulis

$$F^{(III)}(x) = \frac{ax^2}{1 + bx^2}$$

dengan $F^{(III)}$ menyatakan fungsi holling tipe III, a tingkat konsumsi maksimum predator terhadap prey, b menyatakan tingkat kejenuhan pemangsaan, dan x menyatakan jumlah populasi mangsa [17].

3 Metode

3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini didahului dengan studi literatur terkait sistem dinamik dan model predator-prey. Studi literatur adalah kegiatan menelusuri dan mempelajari sejumlah buku, *text-book*, jurnal, ataupun artikel yang berhubungan dengan fokus penelitian untuk dijadikan rujukan. Setelah dilakukan studi literatur, diperoleh beberapa asumsi sebagai berikut.

1. Predator-prey bertumbuh secara logistik.
2. Model yang digunakan fungsi respon Holling tipe II.
3. Pemberian racun hanya berpengaruh pada predator.

3.2 Tahapan Penelitian

Adapun tahapan-tahapan dan prosedur penelitian adalah sebagai berikut.

1. Penelusuran jurnal dan referensi.
Tahap paling awal pada penelitian ini yaitu melakukan penelusuran beberapa referensi dan artikel yang berkaitan dengan fokus penelitian. Dari hasil penelusuran beberapa referensi dan artikel, model Leslie-Gower dipilih untuk dijadikan objek penelitian.
2. Penentuan asumsi
Setelah ditemukan model yang akan diteliti, ditentukan beberapa asumsi yang akan digunakan.
3. Modifikasi model
Setelah ditentukan asumsi, model dimodifikasi berdasarkan asumsi yang ada.
4. Penskalaan model
Pada tahapan ini, dilakukan penskalaan pada model untuk memudahkan proses analisis.
5. Mencari titik kesetimbangan.
6. Menganalisis dinamika model di sekitar titik kesetimbangan.
7. Simulasi numerik
Pada tahapan ini, dibuat simulasi numerik dari model. Untuk keperluan simulasi numerik, digunakan aplikasi Phyton versi 3.7.3150.0.
8. Interpretasi dan kesimpulan
Hasil simulasi numerik model diinterpretasi kemudian berdasarkan hasil analisis dan interpretasi simulasi numerik, disimpulkan hasil tujuan penelitian.

4 Hasil dan Pembahasan

Model yang digunakan pada tulisan ini mengacu pada persamaan (2) dan (3) dengan menggunakan fungsi respon tipe II pada persamaan (4). Selain itu diterapkan penggunaan racun pada predator (β) sehingga diperoleh model sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{axy}{1 + h\alpha x} \\ \dot{y} &= sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right) - \beta y\end{aligned}\quad (4)$$

dengan x dan y masing-masing menyatakan kepadatan populasi prey dan predator, sedangkan $r, s, k, nx, \alpha, h, \beta$ berturut-turut menyatakan laju pertumbuhan intrinsik prey, laju pertumbuhan intrinsik predator, keterbatasan daya dukung lingkungan prey, keterbatasan daya dukung lingkungan predator, tingkat pencarian dan penangkapan prey oleh predator, tingkat penanganan dan pencernaan predator, serta efektivitas racun.

4.1 Penskalaan

Sebelum mencari titik kesetimbangan, terlebih dahulu dilakukan penskalaan terhadap model (4) ke dalam bentuk yang lebih sederhana tanpa mengubah model sistem persamaan. Penskalaan model akan memangkas beberapa parameter. Penskalaan dapat dilakukan karena tidak merubah skala pengukuran [18]. Dengan melakukan penskalaan $(x, y, t) \rightarrow (h\alpha x, \frac{\alpha}{r}y, rt)$, model (4) tereduksi menjadi,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \left(1 - \frac{x}{\mu}\right) - \frac{xy}{1 + x} \\ \dot{y} &= \eta y \left(1 - \frac{\sigma y}{x}\right) - \xi y\end{aligned}\quad (5)$$

dengan

$$\mu = \alpha hk, \quad \sigma = \frac{rh}{n}, \quad \eta = \frac{s}{r}, \quad \xi = \frac{\beta}{r}, \quad \alpha, \beta, h, k, n, r, s > 0.$$

4.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan model pada persamaan (5) diperoleh pada saat $\dot{x} = \dot{y} = 0$, sehingga dapat ditulis,

$$\begin{aligned}x \left(1 - \frac{x}{\mu}\right) - \frac{xy}{1 + x} &= 0 \\ \eta y \left(1 - \frac{\sigma y}{x}\right) - \xi y &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

Dari persamaan (6) diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu:

$$E_0(\mu, 0) \text{ dan } E_1(x^*, y^*)$$

dengan

$$x^* = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4\mu}}{2}; \quad y^* = \frac{\eta - \xi}{\eta\sigma} x^*$$

$$A = \frac{\mu\eta + \sigma\eta - \mu\xi - \mu\sigma\eta}{\sigma\eta}$$

4.3 Eksistensi Titik Kesetimbangan

Berdasarkan kondisi biologis di alam, jumlah populasi spesies tak negatif, maka solusi dari persamaan (6) harus tak negatif. Eksistensi titik kesetimbangan dari (6) dinyatakan sebagai berikut:

- (i) $E_0 \in R^+$, maka E_0 adalah titik ekuilibrium.
- (ii) E_1 adalah titik ekuilibrium jika $A^2 - 4\mu \geq 0$

a) $A^2 - 4\mu > 0$

Jika $A^2 - 4\mu \geq 0$, maka $\sqrt{A^2 - 4\mu} > 0$. Akibatnya

$$x_1^* = \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4\mu}}{2}$$

$$x_2^* = \frac{-A - \sqrt{A^2 - 4\mu}}{2}$$

Dalam hal ini $x_1^* > 0$ jika

$$\frac{A < 0}{\frac{\mu\eta + \sigma\eta - \mu\xi - \mu\sigma\eta}{\sigma\eta} < 0} < 0$$

$$\eta(\mu + \sigma) < \mu(\xi + \sigma\eta)$$

dan x_2^* dapat ditunjukkan bernilai positif. $x_2^* > 0$, jika

$$-A - \sqrt{A^2 - 4\mu} > 0 \Leftrightarrow A^2 > A^2 - 4\mu. \square$$

Selanjutnya jika $x_1^*, x_2^* > 0$, maka $y_1^*, y_2^* > 0$.

b) $A^2 - 4\mu = 0$

Jika $A^2 - 4\mu = 0$, maka $\sqrt{A^2 - 4\mu} = 0$. Akibatnya

$$x^* = \frac{-A}{2} \Leftrightarrow x^* = \frac{\left(\frac{\mu\sigma\eta + \mu\xi - \mu\eta - \sigma\eta}{\sigma\eta}\right)}{2}$$

Dalam hal ini $x^* > 0$ jika

$$\mu\sigma\eta + \mu\xi - \mu\eta - \sigma\eta > 0 \Leftrightarrow \eta(\mu + \sigma) < \mu(\xi + \sigma\eta)$$

Selanjutnya karena $x^* > 0$, maka $y^* > 0$ jika $\eta - \xi > 0$.

Dengan demikian $E_1 \in R^+$ jika memenuhi syarat $\eta(\mu + \sigma) < \mu(\xi + \sigma\eta)$ dan $\eta > \xi$.

4.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian.

4.4.1 Matriks Jacobian

Dinamika model di sekitar E_0 dan E_1 dapat dipelajari terlebih dahulu dengan menentukan matriks Jacobian. Matriks Jacobian diperoleh dengan mencari turunan dari persamaan (6). Berdasarkan persamaan (6) diperoleh matriks Jacobian,

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x}{\mu} - \frac{y}{(1+x)^2} & -\frac{x}{1+x} \\ \frac{\eta\sigma y^2}{x^2} & \eta - \frac{2\eta\sigma y}{x} - \xi \end{bmatrix} \quad (7)$$

4.4.2 Kestabilan E_0

Linierisasi di sekitar titik kesetimbangan E_0 pada persamaan (7) menghasilkan matriks Jacobian untuk titik tetap E_0 sebagai berikut

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{\mu}{1+\mu} \\ 0 & \eta - \xi \end{bmatrix} \quad (8)$$

Matriks jacobian pada persamaan (8) selanjutnya dievaluasi untuk menentukan nilai eigen. Dalam hal ini,

$$J(E_0) - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -\frac{\mu}{1+\mu} \\ 0 & \eta - \xi - \lambda \end{bmatrix} \quad (9)$$

Dari persamaan (9) diperoleh

$$\begin{aligned} |J(E_0) - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -\frac{\mu}{1+\mu} \\ 0 & \eta - \xi - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda_1 &= -1 \text{ dan } \lambda_2 = \eta - \xi \end{aligned}$$

λ_1 jelas bernilai negatif sedangkan λ_2 bernilai negatif jika $\eta < \xi$ yang kontradiktif dengan syarat eksistensi titik kesetimbangan bahwa $\eta > \xi$. Dengan demikian, titik kesetimbangan E_0 tidak dapat mencapai kondisi stabil.

4.4.3 Kestabilan E_1

Linearisasi di sekitar titik kesetimbangan E_1 pada persamaan (7) menghasilkan matriks Jacobian untuk titik tetap E_1 sebagai berikut,

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x^*}{\mu} - \frac{(\eta - \xi)x^*}{\eta\sigma(1+x^*)^2} & -\frac{x^*}{1+x^*} \\ y^*(\eta - \xi) & \eta - \xi \end{bmatrix} \quad (10)$$

Matriks jacobian pada persamaan (10) selanjutnya dievaluasi untuk menentukan nilai eigen. Dalam hal ini,

$$J(E_1) - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x^*}{\mu} - \frac{(\eta - \xi)x^*}{\eta\sigma(1+x^*)^2} - \lambda & -\frac{x^*}{1+x^*} \\ y^*(\eta - \xi) & \eta - \xi - \lambda \end{bmatrix} \quad (11)$$

Dari persamaan (11) diperoleh

$$\begin{cases} |J(E_1) - \lambda I| = 0 \\ \left| \begin{array}{cc} 1 - \frac{2x^*}{\mu} - \frac{(\eta - \xi)x^*}{\eta\sigma(1+x^*)^2} - \lambda & -\frac{x^*}{1+x^*} \\ y^*(\eta - \xi) & \eta - \xi - \lambda \end{array} \right| = 0 \end{cases}$$

menghasilkan persamaan karakteristik

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (\delta_1 + \eta - \xi - 1)\lambda + (\delta_1 + \delta_2 - 1)(\eta - \xi) = 0$$

dengan

$$\delta_1 = \frac{2x^*}{\mu} + \frac{(\eta - \xi)x^*}{\eta\sigma(1+x^*)^2} \quad \text{dan} \quad \delta_2 = \frac{x^*y^*}{1+x^*}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4D}}{2}$$

dengan

$$\begin{aligned} C &= (\delta_1 + \eta - \xi - 1) > 0 \\ D &= (\delta_1 + \delta_2 - 1)(\eta - \xi) > 0. \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan E_1 dapat mencapai kondisi stabil jika $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$, dengan ketentuan sebagai berikut:

i) Untuk $C^2 - 4D > 0$,

$$\lambda_1 = \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-C - \sqrt{C^2 - 4D}}{2}$$

Dalam hal ini, $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ dapat ditunjukkan kebenarannya.

$\lambda_1 < 0$ jika $-C + \sqrt{C^2 - 4D} < 0 \Leftrightarrow C^2 < C^2 - 4D$. \square

$\lambda_2 < 0$ jika $-C - \sqrt{C^2 - 4D} < 0$. Karena $C^2 - 4D > 0$, maka jelas bahwa $\lambda_2 < 0$.

ii) Untuk $C^2 - 4D < 0$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-C \pm (C^2 - 4D)i}{2}$$

yang menunjukkan bahwa $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$.

iii) Untuk $C^2 - 4D = 0$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-C}{2} < 0.$$

Dengan demikian, titik kesetimbangan E_1 dapat mencapai kondisi stabil dengan memenuhi syarat eksistensi kesetimbangan, yaitu $\eta(\mu + \sigma) < \mu(\xi + \sigma\eta)$ dan $\eta > \xi$.

4.5 Simulasi Numerik

Pada bahasan ini, dilakukan simulasi numerik untuk melihat dinamika model di sekitar titik-titik kesetimbangan dan efek pemberian racun terhadap populasi predator.

4.5.1 Simulasi Numerik E_0

Dari persamaan (6), diperoleh titik kesetimbangan $E_0 = (\mu, 0)$. Kondisi kestabilan dan dinamika populasi untuk titik kesetimbangan E_0 dapat dilihat dengan melakukan simulasi menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 1.

Tabel 1: Nilai Parameter untuk Simulasi E_0

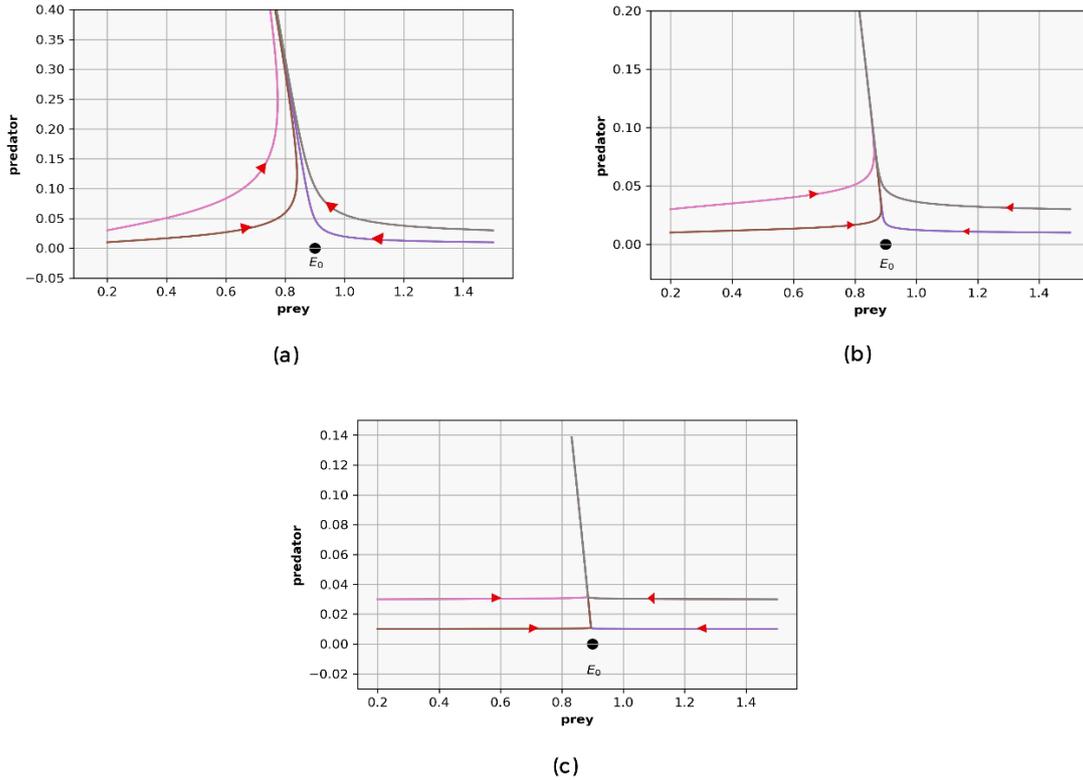
Kondisi	μ	σ	η	ξ	$E_0 = (\mu, 0)$
1	0.9	0.2	0.3	0	(0.9, 0)
2	0.9	0.2	0.3	0.15	(0.9, 0)
3	0.9	0.2	0.3	0.29	(0.9, 0)

Ketiga kondisi pada Tabel 1 menggunakan nilai awal yang disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2: Nilai Awal untuk Simulasi E_0

x	1.5	0.2	0.2	1.5
y	0.01	0.01	0.03	0.03

Selanjutnya diperoleh plot grafik untuk melihat dinamika dari setiap populasi. Dinamika populasi di titik kesetimbangan E_0 disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1: Dinamika Populasi untuk Titik Kesetimbangan E_0

Simulasi yang ditampilkan pada Gambar 1 menunjukkan tiga kondisi. Kondisi (a) menunjukkan tidak adanya racun yang diberikan pada predator ($\xi = 0$), kondisi (b) menunjukkan banyaknya racun yang di berikan pada predator setengah dari laju pertumbuhan intrinsik predator ($\xi = 0.15$) dan kondisi (c) menunjukkan banyaknya racun yang di berikan pada predator hampir mendekati laju pertumbuhan intrinsik predator ($\xi = 0.29$). Populasi predator pada titik ini mengalami kepunahan. Gambar 1 memperlihatkan dinamika disekitar titik E_0 yang tidak stabil *saddle*. Kedua populasi awalnya bergerak menuju E_0 kemudian menjauh setelah berada di sekitar titik E_0 .

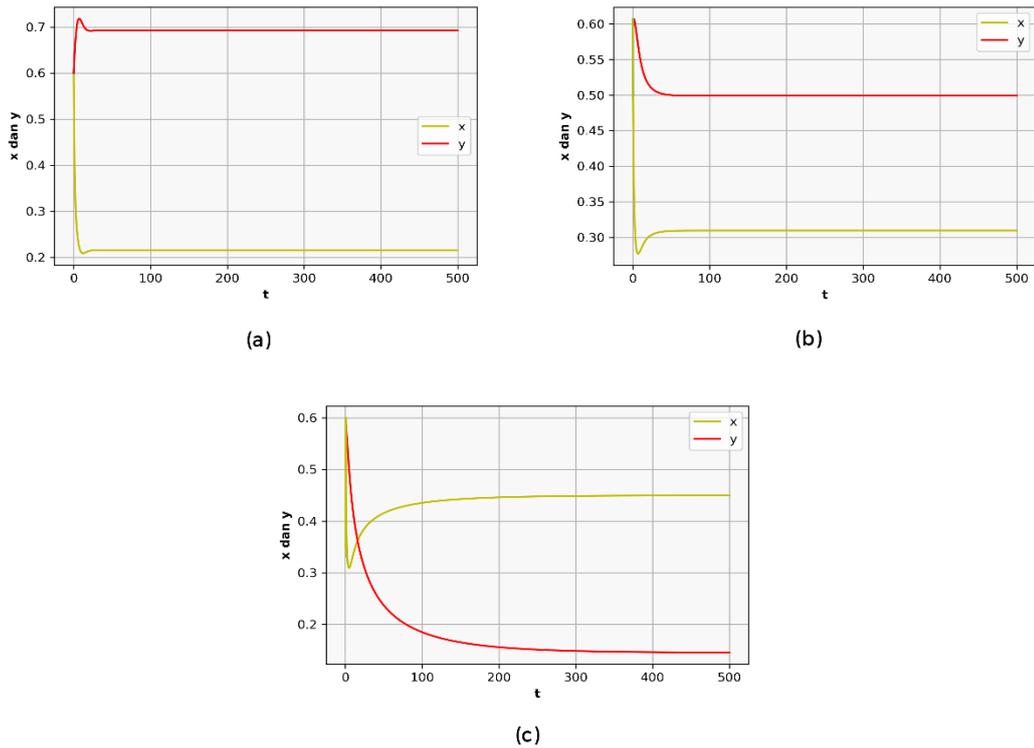
4.5.2 Simulasi Numerik E_1

Dari persamaan (6), diperoleh titik kesetimbangan $E_1 = (x^*, y^*)$. Titik E_1 dikatakan stabil jika memenuhi syarat kestabilan untuk $D_\lambda > 0$ dan $D_\lambda < 0$. Kondisi kestabilan dan dinamika populasi untuk titik kesetimbangan E_1 dapat dilihat dengan melakukan simulasi menggunakan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.

Tabel 3: Nilai Parameter untuk Simulasi E_1

Kondisi	μ	σ	η	ξ	$E_0 = (\mu, 0)$
1	0.5	0.31	0.1	0	(0.2148, 0.6929)
2	0.5	0.31	0.1	0.05	(0.3094, 0.4990)
3	0.5	0.31	0.1	0.09	(0.4499, 0.1451)

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 3, diperlihatkan dinamika populasi populasi *Predator* dan *Prey*. Dinamika yang terjadi antara kedua populasi ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2: Dinamika Populasi *Predator-Prey* pada Titik Kestimbangan E_1

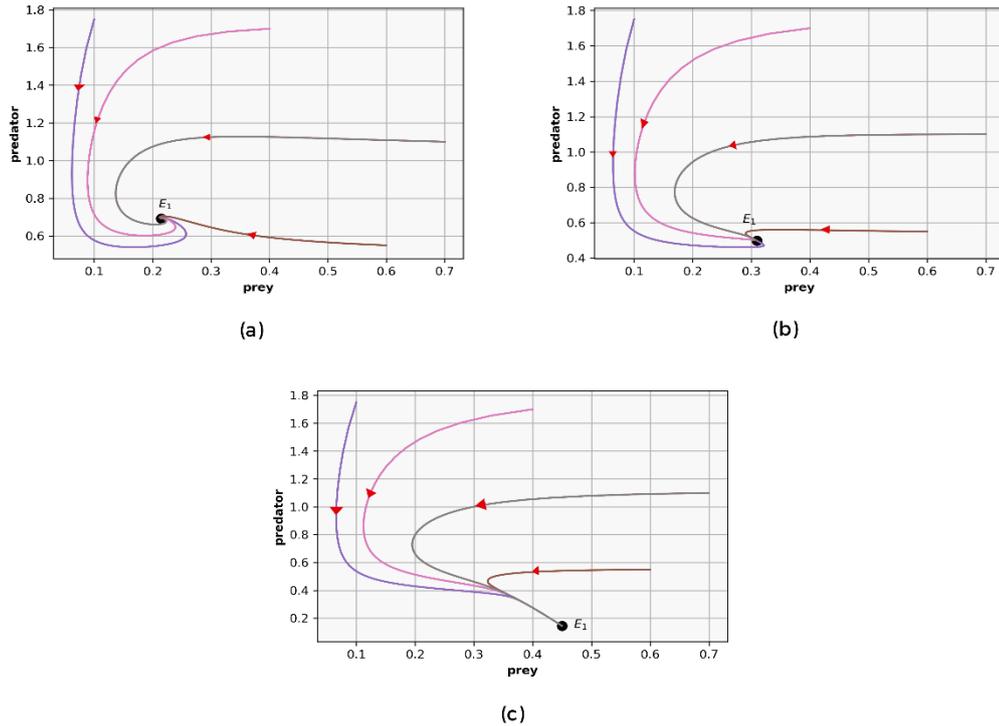
Dinamika yang terjadi pada Gambar 2 menunjukkan tiga kondisi. Kondisi pertama menunjukkan tidak adanya racun yang di berikan pada predator ($\xi = 0$), kondisi kedua menunjukkan banyaknya racun yang di berikan pada predator adalah setengah dari laju pertumbuhan intrinsik predator ($\xi = 0.05$) dan kondisi ketiga menunjukkan banyaknya racun yang di berikan pada predator hampir mendekati laju pertumbuhan intrinsik predator ($\xi = 0.09$). Gambar 2 menunjukkan bahwa setiap variabel akan konstan menuju ke suatu titik yang artinya laju pertumbuhan populasi *predator-prey* sudah mencapai kondisi stabil. Pada ketiga kondisi tersebut, populasi kedua spesies tidak punah.

Selanjutnya, untuk melihat dinamika dari setiap populasi pada ketiga kondisi tersebut digunakan nilai awal pada Tabel 4.

Tabel 4: Nilai Awal untuk Simulasi E_1 pada Kondisi Stabil dengan $D_\lambda > 0$

x	0.1	0.6	0.4	0.7
y	1.75	0.55	1.7	1.1

Dinamika populasi untuk titik kesetimbangan E_1 pada kondisi stabil dengan $D_\lambda > 0$ disajikan pada Gambar 3.



Gambar 3: Dinamika Populasi untuk E_1 pada kondisi stabil dengan $D_\lambda > 0$

Gambar 3 menunjukkan dinamika populasi *predator-prey* yang bergerak menuju titik E_1 dan stabil di titik tersebut.

Selanjutnya, kondisi kestabilan dan dinamika populasi titik kesetimbangan E_1 untuk $D_\lambda < 0$ dapat dilihat dengan melakukan simulasi menggunakan nilai parameter pada Tabel 5.

Tabel 5: Nilai Parameter untuk Simulasi E_1 dengan $D_\lambda < 0$

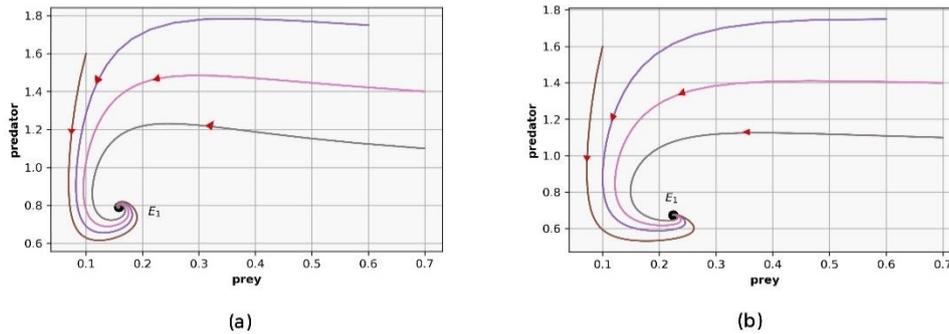
Kondisi	μ	σ	η	ξ	$E_1 = (x^*, y^*)$
1	0.5	0.2	0.2	0	(0.1583, 0.7916)
2	0.5	0.31	0.1	0.05	(0.2247, 0.6742)

Kedua kondisi ini disimulasikan dengan menggunakan nilai awal pada Tabel 6.

Tabel 6: Nilai Awal untuk Simulasi E_1 pada Kondisi Stabil dengan $D_\lambda < 0$

x	0.6	0.1	0.7	0.7
y	1.75	1.6	1.4	1.1

Selanjutnya, dinamika populasi untuk titik kesetimbangan E_1 pada kondisi stabil dengan $D_\lambda < 0$ disajikan pada Gambar 4.



Gambar 4: Dinamika Populasi untuk E_1 pada kondisi stabil dengan $D_\lambda < 0$

Simulasi yang ditunjukkan pada Gambar 4 menunjukkan dinamika populasi pada dua kondisi. Kondisi (a) menunjukkan tidak adanya racun yang di berikan pada predator ($\xi = 0$), dan kondisi (b) yang menunjukkan banyaknya racun yang di berikan pada predator adalah sebesar $\xi = 0.08$. Pada kedua kondisi tersebut, populasi *predator-prey* tidak mengalami kepunahan. Gambar 4 menunjukkan bahwa populasi predator-prey bergerak menuju titik E_1 dan mencapai kondisi stabil di titik tersebut.

5 Kesimpulan

Titik kesetimbangan E_0 tidak dapat mencapai kondisi stabil, sedangkan titik kesetimbangan E_1 mencapai kondisi stabil apabila memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan, yaitu $\eta(\mu + \sigma) < \mu(\xi + \sigma\eta)$ dan $\eta > \xi$.

Referensi

- [1] Aftyah, S.N., 2015, 'Analisis Dinamik Model Predator-Prey Leslie-ttower dengan Fungsi Respon Holling Tipe II'. *Jurnal Ilmiah Teknologi dan Informasia ASIA (JITIKA)*, Vol. 9, No. 2.
- [2] Panigoro, H.S., Rahmi, E., 2017, Modifikasi Sistem Predator-Prey: Dinamika Model Leslie-ttower dengan Daya Dukung yang Tumbuh Logistik, *SEMIRATA MIPA*, UNSRAT, Manado.
- [3] Leslie, P. H. 1948, 'Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics', Oxford University Press, Biometrika, Vol. 35.
- [4] Sholeh, M., Kholipah, S., 2013, 'Model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit', *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*, Vol. 10 No. 2.
- [5] Keong, A.T., Safuan, H.M., Jacob, K., 2018, 'Dynamical Behaviours of Prey-predator Fishery Model with Harvesting Affected by Toxic Substances', Universiti Tun Hussein Press, Volume 34.
- [6] N. Hasan, R. Resmawan, and E. Rahmi, "Analisis Kestabilan Model Eko-Epidemiologi dengan Pemanenan Konstan pada Predator," *J. Mat. Stat. dan Komputasi*, vol. 16, no. 2, pp. 121–142, Dec. 2020.
- [7] H. S. Panigoro, E. Rahmi, N. Achmad, and S. L. Mahmud, "The Influence of Additive Allee Effect and Periodic Harvesting to the Dynamics of Leslie-Gower Predator- Prey

- Model,” *Jambura J. Math.*, vol. 2, no. 2, pp. 87–96, 2020.
- [8] Braun, M., 1978, *Differential Equation and Their Applications*, New York, Springer-Verlag.
- [9] Perko, L., 1991, *Differential Equation and Dynamical System*, New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [10] Wiggins, S., 2003, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Second Edition, New York, Springer-Verlag.
- [11] Anton, H., 1991, *Aljabar Linear Elementer*, Jakarta, Erlangga.
- [12] Edelstein-Keshet, L., 1998, '*Mathematical Models in Biology*', Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA 19104.
- [13] Barnes, B., Fulford, G.R., 2002, *Mathematical Modelling with Case Studies (a Differential Equation Approach Using Maple)*, London, Taylor and Francis.
- [14] Berryman, A., 1992, *Ecology*, Ecologi society of America.
- [15] Boyce, W.E., DiPrima, R.C., 2001, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, New York, John Wiley and Sons.
- [16] Skalski, G.T., Gilliam J.F., 2001, 'Functional Respons with Predator Interference: Viable Alternatives to the Holling Type II Model', *Ecology*, 82: 3083-3092.
- [17] Ndam, J.N., Kaseem T.G., 2009, *Stability of Dinamical Systems*, Elsevier, Netherlands.
- [18] Edelstein-Keshet, L., 2005, *Mathematical Models in Biology*, New York, Random House.