J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 10 No. 2 (2026) pp. 365-379
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN: 2581-0154
DOI: doi.org/10.26740/jram.v10n2.p365-379

PEMODELAN DINAMIKA PENYEBARAN MALARIA *VIVAX* DENGAN INTERVENSI PENGGUNAAN KELAMBU DAN PENGOBATAN PASIEN DI KALIMANTAN BARAT

UMMI NUR FADILLA*, BAYU PRIHANDONO, NILAMSARI KUSUMASTUTI

Program Studi Matematika, Universitas Tanjungpura, Pontianak, Indonesia

*Penulis Korespondensi: umminurfadilla5@gmail.com

ABSTRAK

Malaria *vivax* merupakan penyakit yang disebabkan oleh parasit *Plasmodium vivax* dan ditularkan melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina. Provinsi Kalimantan Barat merupakan wilayah endemis sehingga diperlukan strategi pengendalian yang efektif. Penelitian ini menganalisis dinamika penyebaran malaria menggunakan model yang melibatkan interaksi antara manusia dan nyamuk *Anopheles* betina. Pada populasi manusia, kelas terbagi menjadi rentan, terpapar, terinfeksi, dan sembuh, sedangkan pada populasi nyamuk terbagi menjadi rentan, terpapar, dan terinfeksi. Model ini berupa sistem persamaan diferensial *nonlinear* yang mempertimbangkan parameter kontrol, berupa efektivitas penggunaan kelambu (κ_1), dan pengobatan pasien (κ_2). Model menghasilkan titik ekuilibrium bebas penyakit (S), dan titik ekuilibrium endemik (SS). Analisis kestabilan terhadap titik ekuilibrium S menghasilkan bilangan reproduksi dasar (R_0). Analisis selanjutnya menunjukkan bahwa titik S stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$, sedangkan titik ekuilibrium SS stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penggunaan kelambu ($\kappa_1 = 1$) menurunkan R_0 hingga mencapai nol, meskipun masih terdapat proporsi manusia yang terinfeksi. Sementara itu, pengobatan pasien ($\kappa_2 = 1$) menurunkan R_0 sebesar 99,95%. Kombinasi kedua intervensi ($\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 1$) menghasilkan efektivitas tertinggi karena mampu menurunkan R_0 hingga mendekati nol dan menghilangkan proporsi manusia terinfeksi pada akhir simulasi. Oleh karena itu, kombinasi kedua intervensi direkomendasikan sebagai strategi pengendalian paling efektif untuk mendukung eliminasi malaria secara menyeluruh.
Kata Kunci: Analisis Kestabilan, Bilangan Reproduksi Dasar, Model SEIR-SEI, Nyamuk *Anopheles* Betina

ABSTRACT

Vivax malaria is a mosquito-borne disease caused by Plasmodium vivax and remains endemic in West Kalimantan Province, Indonesia. This study analyzes malaria transmission dynamics using a nonlinear model describing interactions between humans and female Anopheles mosquitoes. The human population is divided into susceptible, exposed, infected, and recovered classes, while the mosquito population consist of susceptible, exposed, and infected classes. The model incorporates two control measures: insecticide-treated bed nets and patient treatment. Disease free and endemic equilibrium points are derived, and stability analysis is conducted through the basic reproduction number (R_0). The disease-free equilibrium is locally asymptotically stable when $R_0 < 1$, whereas the endemic equilibrium becomes locally asymptotically stable when $R_0 > 1$. Simulation results indicate that the use of bed nets ($\kappa_1 = 1$) reduces R_0 to nearly zero, although a proportion of the human population remains infected. In comparison, patient treatment ($\kappa_2 = 1$) decreases R_0 by 99,95%. The combination of these two interventions ($\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 1$) yields the highest effectiveness by reducing R_0 to nearly zero and eliminating the infected human proportion by the end of the simulation period. Therefore, the combined interventions are recommended as the most effective control strategy to support comprehensive malaria elimination.

2020 *Mathematics Subject Classification*: 92D30, 34D20, 34C60
Diterima: 29-09-2026, direvisi: 29-10-2026, dimuat: 30-10-2026

Keywords: *Basic Reproduction Number, Female Anopheles Mosquitoes, SEIR-SEI model, Stability Analysis*

1. Pendahuluan

Malaria adalah penyakit menular yang disebabkan oleh protozoa dari genus *Plasmodium* dan ditularkan melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina. Terdapat lima jenis *Plasmodium* yang menyebabkan malaria, yaitu *P. falciparum* dengan masa inkubasi 7-14 hari, *P. vivax* dengan masa inkubasi 8-14 hari, *P. ovale* dengan masa inkubasi 8-14 hari, *P. knowlesi* dengan masa inkubasi 9-12 hari, dan *P. malariae* dengan masa inkubasi 7-30 hari [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Di negara-negara endemis, malaria termasuk penyakit yang mematikan. Provinsi Kalimantan Barat termasuk wilayah endemis malaria di Indonesia, di mana salah satu jenis kasus malaria yang banyak dijumpai di Kalimantan Barat yaitu malaria *vivax*. Pada tahun 2024 tercatat 62 kasus malaria positif di provinsi ini, dengan kasus terbanyak di Kabupaten Kapuas Hulu (31 kasus) dan Kabupaten Sintang (10 kasus) [7]. *Annual Parasite Incidence* (API) pada tahun yang sama sebesar 0,01. API adalah jumlah kasus malaria positif yang terkonfirmasi laboratorium dalam satu tahun per 1.000 penduduk [13]. Nilai 0,01 berarti sekitar satu kasus per 100.000 penduduk. Pada tahun 2024 juga dilaporkan dua kematian akibat malaria [7]. Oleh karena itu, dibutuhkan upaya pencegahan yang optimal dan berkelanjutan. Tindakan pencegahan sederhana yang dapat dilakukan antara lain penggunaan kelambu, pemasangan kawat kasa, pemakaian obat nyamuk, serta pengobatan yang tepat bagi penderita [8]. Kalimantan Barat masih mencatat kasus dan kematian akibat malaria [7], sehingga diperlukan strategi pengendalian yang efektif. Dua upaya yang sederhana dan dapat langsung dilakukan adalah penggunaan kelambu [8], [11] dan pengobatan pasien [8]. Resmawan dan Nurwan [3] memodelkan vaksinasi dan pengobatan tanpa memuat kelambu, sedangkan Lubis dkk. [11] hanya menguji pengaruh kelambu secara statistik. Pada penelitian yang dikaji tersebut, belum ada model SEIR-SEI yang memuat kelambu dan pengobatan pasien secara bersamaan.

Dalam penelitian ini, digunakan model yang menekankan peran signifikan nyamuk dalam proses penularan malaria. Dengan mempertimbangkan interaksi antara manusia dan nyamuk ke dalam model, diharapkan dapat diperoleh gambaran yang lebih akurat terhadap penyebaran penyakit malaria [9]. Penelitian ini bertujuan untuk: (1) membangun model penyebaran malaria vivax antara manusia dan nyamuk Anopheles betina dengan parameter efektivitas kelambu (κ_1) dan pengobatan pasien (κ_2); (2) menentukan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar (R_0), serta menganalisis kestabilan lokalnya; dan (3) mensimulasikan model dengan data Kalimantan Barat tahun 2024 untuk membandingkan empat kondisi, yaitu tanpa intervensi, kelambu saja, pengobatan saja, dan kombinasi keduanya.

2. Tinjauan Pustaka

Malaria *vivax* merupakan salah satu penyakit menular yang mematikan di berbagai wilayah endemis. Untuk memahami dinamika penyebaran penyakit tersebut, salah satu pendekatan yang banyak digunakan adalah pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan metode untuk merepresentasikan sistem yang kompleks menjadi lebih sederhana yang dimuat dalam bentuk sistem persamaan matematika. Secara umum, model matematika terdiri atas variabel, parameter, dan fungsi yang menghubungkan variabel dengan parameter [10].

Salah satu model yang sering digunakan dalam epidemiologi yaitu SEIR-SEI. Dalam model ini, populasi manusia dibagi ke dalam empat kompartemen (rentan, terpapar, terinfeksi, dan pulih), sedangkan populasi nyamuk dibagi ke dalam tiga kompartemen (rentan, terpapar, dan terinfeksi). Analisis model epidemi umumnya meliputi penentuan dan menganalisis kestabilan titik ekuilibrium, perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) dengan menggunakan pendekatan *Next Generation Matrix* (NGM), serta simulasi numerik model.

Resmawan dan Nurwan [3] mengembangkan model SEIRS-SEI untuk menggambarkan penyebaran malaria dengan mempertimbangkan intervensi berupa vaksinasi dan pengobatan pada pasien malaria. Model tersebut kemudian digunakan untuk menurunkan R_0 menggunakan pendekatan NGM. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa peningkatan efektivitas vaksinasi dan pengobatan dapat menurunkan nilai R_0 secara signifikan serta mengurangi jumah manusia dan nyamuk yang terinfeksi. Penelitian ini merupakan bahwa intervensi medis berperan penting dalam menekan penyebaran penyakit dan mencegah malaria menjadi penyakit endemik.

Lubis et al. [11] melakukan sebuah penelitian yang bertujuan untuk mengkaji secara mendalam pengaruh penggunaan kelambu terhadap kejadian malaria di wilayah Kabupaten Batu Bara, yang merupakan salah satu daerah endemis malaria di Indonesia. Penelitian ini dilaksanakan pada tahun 2018 dengan pendekatan studi kasus-kontrol, melibatkan total 136 responden. Hasil analisis statistik menunjukkan bahwa individu yang tidak menggunakan kelambu memiliki risiko 2,8 kali lebih tinggi untuk tertular malaria dibandingkan dengan mereka yang secara rutin menggunakan kelambu saat tidur. Temuan ini merupakan bukti bahwa intervensi sederhana seperti penggunaan kelambu dapat menjadi strategi yang efektif, dan praktis dalam menurunkan angka kejadian malaria.

Kedua penelitian menunjukkan bahwa intervensi medis, seperti vaksinasi dan pengobatan, serta intervensi fisik, seperti kelambu, memiliki peran penting dalam pengendalian penyakit menular, khususnya malaria. Karena kedua penelitian belum mempertimbangkan intervensi penggunaan kelambu dan pengobatan pasien ke dalam model SEIR-SEI, maka penelitian ini mengembangkan model SEIR-SEI ($H_1H_2H_3H_4 - V_1V_2V_3$) untuk menganalisis pengaruh dari kedua intervensi tersebut terhadap dinamika penyebaran malaria vivax di Kalimantan Barat.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Model $\boldsymbol{H_1H_2H_3H_4 - V_1V_2V_3}$

Penelitian ini menggunakan model yang membagi sistem ke dalam dua jenis populasi. Model pertama merepresentasikan populasi manusia (*host*), sedangkan model kedua merepresentasikan populasi vektor, yaitu nyamuk *Anopheles* betina. Populasi manusia dibagi ke dalam empat kelas, yaitu manusia rentan (H_1), manusia terpapar (H_2), manusia terinfeksi (H_3), dan manusia yang telah sembuh (H_4). Adapun populasi nyamuk *Anopheles* betina dikelompokkan ke dalam tiga kelas, yaitu nyamuk rentan (V_1), nyamuk terpapar (V_2), dan nyamuk terinfeksi (V_3). Dalam membangun model matematika pada kasus penyebaran penyakit malaria, digunakan asumsi berikut sebagai penyederhanaan agar model dapat dianalisis:

1. Total populasi manusia dan nyamuk Anopheles betina dianggap konstan. Simulasi hanya berlangsung 350 hari dan migrasi diabaikan. Dengan $\varepsilon_1 = \sigma_1 N_1$ dan $\varepsilon_2 = \sigma_2 N_2$, laju kelahiran sama dengan laju kematian alami sehingga N_1 dan N_2 tetap.
2. Penularan hanya terjadi melalui gigitan nyamuk *Anopheles* betina yang terinfeksi, sehingga tidak terjadi penularan antarmanusia [1]. Jalur lain, misalnya transfusi darah, tidak dimodelkan.
3. Manusia yang telah sembuh memiliki kekebalan permanen. Asumsi ini menyederhanakan model agar kelas H_4 tidak kembali ke H_1. Keterbatasannya dibahas pada bagian kesimpulan, karena *P. vivax* dapat kambuh (*relaps*).
4. Nyamuk terinfeksi (V_3) hanya menggigit manusia rentan (H_1), dan nyamuk rentan (V_1) hanya menggigit manusia terinfeksi (H_3). Gigitan pada kelas lain tidak mengubah status siapa pun, sehingga model hanya memuat gigitan yang mengubah status.
5. Nyamuk terinfeksi (V_3) tidak dapat sembuh. Model tidak memuat pemulihan pada nyamuk, sehingga nyamuk di kelas V_3 hanya keluar melalui kematian alami (σ_2).

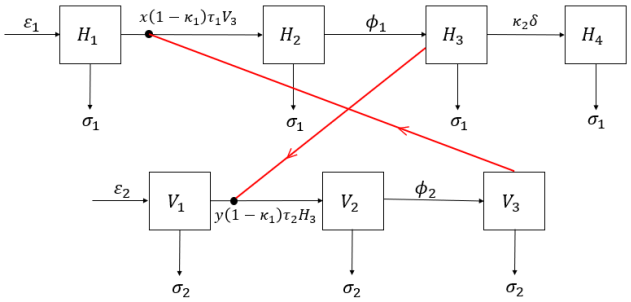
6. Penggunaan kelambu (κ_1) mengurangi peluang terjadinya gigitan, sehingga laju penularan dari nyamuk ke manusia dan dari manusia ke nyamuk dikalikan $(1 - \kappa_1)$. Nilai $\kappa_1 = 1$ adalah kondisi ideal, yaitu semua gigitan tercegah. Peran kelambu didukung temuan Lubis dkk. [11].
7. Efektivitas pengobatan (κ_2) memengaruhi kecepatan pemulihan manusia terinfeksi dengan laju $\kappa_2\delta$. Pada $\kappa_2 = 0$ tidak ada pemulihan melalui pengobatan.

Parameter model disajikan pada Tabel 1. Diasumsikan bahwa semua parameter bernilai positif, yaitu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma_1, \sigma_2, x, y, \tau_1, \tau_2, \delta, \phi_1, \phi_2 > 0$, semua variabel nonnegatif, yaitu $H_1, H_2, H_3, H_4, V_1, V_2, V_3 \geq 0$, di mana populasi total manusia dan nyamuk memenuhi $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 > 0$ dan $V_1 + V_2 + V_3 > 0$ dengan efektivitas intervensi berada dalam rentang $0 \leq \kappa_1 \leq 1$ dan $0 \leq \kappa_2 \leq 1$.

Tabel 1. Parameter Model

Parameter	Keterangan
ε_1	laju kelahiran manusia (orang per hari)
ε_2	laju keberhasilan perkembangan larva menjadi nyamuk *Anopheles* betina dewasa (nyamuk per hari)
σ_1	tingkat kematian alami manusia (per hari)
σ_2	tingkat kematian alami nyamuk *Anopheles* betina (per hari)
x	rata-rata jumlah gigitan nyamuk *Anopheles* betina terinfeksi terhadap manusia rentan (jumlah gigitan per nyamuk per hari)
y	rata-rata jumlah gigitan nyamuk *Anopheles* betina rentan terhadap manusia terinfeksi (jumlah gigitan per nyamuk per hari)
τ_1	tingkat keberhasilan penularan penyakit pada manusia (per orang per hari)
τ_2	tingkat keberhasilan penularan penyakit pada nyamuk *Anopheles* betina (per nyamuk per hari)
δ	tingkat pemulihan manusia (per hari)
κ_1	efektivitas penggunaan kelambu
κ_2	efektivitas pengobatan pada manusia
ϕ_1	laju perpindahan manusia terpapar ke manusia terinfeksi (orang per hari)
ϕ_2	laju perpindahan nyamuk *Anopheles* betina terpapar ke nyamuk *Anopheles* betina terinfeksi (nyamuk per hari)

Selanjutnya berdasarkan asumsi-asumsi sebelumnya, diagram transfer model disusun sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1:



Gambar 1. Diagram Transfer Proses Penyebaran Penyakit

Dengan demikian, diperoleh model penyebaran malaria vivax sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dH_1}{dt} &= \varepsilon_1 - (x(1-\kappa_1)\tau_1 V_3 + \sigma_1)H_1 \\
\frac{dH_2}{dt} &= x(1-\kappa_1)\tau_1 V_3 H_1 - (\phi_1 + \sigma_1)H_2 \\
\frac{dH_3}{dt} &= \phi_1 H_2 - (\kappa_2\delta + \sigma_1)H_3 \\
\frac{dH_4}{dt} &= \kappa_2\delta H_3 - \sigma_1 H_4 \\
\frac{dV_1}{dt} &= \varepsilon_2 - (y(1-\kappa_1)\tau_2 H_3 + \sigma_2)V_1 \\
\frac{dV_2}{dt} &= y(1-\kappa_1)\tau_2 H_3 V_1 - (\phi_2 + \sigma_2)V_2 \\
\frac{dV_3}{dt} &= \phi_2 V_2 - \sigma_2 V_3
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Total populasi manusia dan nyamuk Anopheles betina dapat ditulis sebagai:

$$N_1(t) = H_1(t) + H_2(t) + H_3(t) + H_4(t) \text{ dan } N_2(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t).$$

Diasumsikan bahwa $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ konstan, sehingga berlaku $\frac{dN_1}{dt} = 0$, yang akan terpenuhi jika dan hanya jika $\varepsilon_1 = \sigma_1 N_1$. Artinya, laju kelahiran sama dengan laju kematian alami dalam populasi manusia. Selain itu juga berlaku $\frac{dN_2}{dt} = 0$ yang terpenuhi jika dan hanya jika $\varepsilon_2 = \sigma_2 N_2$, artinya laju kematian nyamuk *Anopheles* betina dewasa seimbang dengan laju keberhasilan perkembangan larva menjadi nyamuk dewasa.

Selanjutnya dilakukan penskalaan (proporsi) dengan menyederhanakan notasi sebagai berikut:

$$h_1 = \frac{H_1}{N_1}, h_2 = \frac{H_2}{N_1}, h_3 = \frac{H_3}{N_1}, h_4 = \frac{H_4}{N_1}, v_1 = \frac{V_1}{N_2}, v_2 = \frac{V_2}{N_2}, v_3 = \frac{V_3}{N_2}$$

Sehingga, persamaan (1) menjadi

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= \sigma_1 - (x(1-\kappa_1)\tau_1 v_3 + \sigma_1)h_1 \\
\frac{dh_2}{dt} &= x(1-\kappa_1)\tau_1 v_3 h_1 - (\phi_1 + \sigma_1)h_2 \\
\frac{dh_3}{dt} &= \phi_1 h_2 - (\kappa_2\delta + \sigma_1)h_3 \\
\frac{dh_4}{dt} &= \kappa_2\delta h_3 - \sigma_1 h_4 \\
\frac{dv_1}{dt} &= \sigma_2 - (y(1-\kappa_1)\tau_2 h_3 + \sigma_2)v_1 \\
\frac{dv_2}{dt} &= y(1-\kappa_1)\tau_2 h_3 v_1 - (\phi_2 + \sigma_2)v_2 \\
\frac{dv_3}{dt} &= \phi_2 v_2 - \sigma_2 v_3
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dengan $h_1(t) + h_2(t) + h_3(t) + h_4(t) = 1$ dan $v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 1$ untuk setiap waktu t. Hal ini menunjukkan bahwa total proporsi pada setiap populasi bersifat konstan sepanjang waktu.

Selanjutnya, dianalisis titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit dari persamaan (2).

3.2. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium bebas penyakit (S) artinya tidak ada proporsi yang terpapar dan terinfeksi dalam populasi ($h_2 = h_3 = 0$ dan $v_2 = v_3 = 0$) ketika $t \to \infty$ (untuk waktu yang lama). Titik ekuilibrium pada Persamaan **Error! Reference source not found.** diperoleh ketika

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{dh_2}{dt} = \frac{dh_3}{dt} = \frac{dh_4}{dt} = \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = \frac{dv_3}{dt} = 0$$

Dari Persamaan **Error! Reference source not found.**, titik ekuilibrium bebas penyakit dinyatakan sebagai:

$$S = (h_1, h_2, h_3, h_4, v_1, v_2, v_3) = (h_1^*, h_2^*, h_3^*, h_4^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (1,0,0,0,1,0,0)$$

Artinya dalam waktu yang sangat lama, proporsi individu yang rentan akan tetap bertahan dalam populasi. Sementara itu, proporsi individu terpapar dan terinfeksi akan menghilang dari populasi. Selanjutnya, endemik akan terjadi apabila proporsi individu terpapar dan terinfeksi tidak nol ($h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$ dan $v_2 \neq 0, v_3 \neq 0$). Sehingga berdasarkan Persamaan **Error! Reference source not found.**, diperoleh titik ekuilibrium endemik sebagai berikut:

$$SS = (h_1^{**}, h_2^{**}, h_3^{**}, h_4^{**}, v_1^{**}, v_2^{**}, v_3^{**})$$

dengan

$$\boldsymbol{h_1^{**}} = \frac{(\phi_2+\sigma_2)\big(y\tau_2\phi_1(1-\kappa_1)\sigma_1 + \sigma_2(\delta\kappa_2+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)\big)}{\tau_2\phi_1(1-\kappa_1)\big(x\tau_1\phi_2(1-\kappa_1)+\sigma_1(\phi_2-\sigma_2)\big)}$$

$$\boldsymbol{h_2^{**}} = \frac{\sigma_1\big(xy\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2(1-\kappa_1)^2 - \sigma_2(\delta\kappa_2+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)(\phi_2+\sigma_2)\big)}{y\tau_2\phi_1(1-\kappa_1)(\phi_1+\sigma_1)\big(x\tau_1\phi_2(1-\kappa_1)+\sigma_1(\phi_2+\sigma_2)\big)}$$

$$\boldsymbol{h_3^{**}} = \frac{\sigma_1\big(xy\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2(1-\kappa_1)^2 - \sigma_2(\delta\kappa_2+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)(\phi_2+\sigma_2)\big)}{y\tau_2(1-\kappa_1)(\phi_1+\sigma_1)(\delta\kappa_2+\sigma_1)\big(x\tau_1\phi_2(1-\kappa_1)+\sigma_1(\phi_2+\sigma_2)\big)}$$

$$\boldsymbol{h_4^{**}} = \frac{\delta\kappa_2\big(xy\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2(1-\kappa_1)^2 - \sigma_2(\delta\kappa_2+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)(\phi_2+\sigma_2)\big)}{y\tau_2(1-\kappa_1)(\phi_1+\sigma_1)(\delta\kappa_2+\sigma_1)\big(x\tau_1\phi_1(1-\kappa_1)+\sigma_1(\phi_2+\sigma_2)\big)}$$

$$\boldsymbol{v_1^{**}} = \frac{\sigma_2(\phi_1+\sigma_1)(\delta\kappa_2+\sigma_1)\big(x\tau_1\phi_1(1-\kappa_1)+\sigma_1(\phi_2+\sigma_2)\big)}{x\tau_1\phi_2(1-\kappa_1)\big(y\tau_2\phi_1\sigma_1(1-\kappa_1)+\sigma_2(\phi_1+\sigma_1)(\delta\kappa_2+\sigma_1)\big)}$$

$$\boldsymbol{v_2^{**}} = \frac{\sigma_1\sigma_2\big(xy\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2(1-\kappa_1)^2 - \sigma_2(\delta\kappa_2+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)(\phi_2+\sigma_2)\big)}{x\tau_1\phi_2(\phi_2+\sigma_2)(1-\kappa_1)\big(y\tau_2\phi_1\sigma_1(1-\kappa_1)+\sigma_2(\phi_1+\sigma_1)(\delta\kappa_2+\sigma_1)\big)}$$

$$\boldsymbol{v_3^{**}} = \frac{\sigma_1\big(xy\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2(1-\kappa_1)^2 - \sigma_2(\delta\kappa_2+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)(\phi_2+\sigma_2)\big)}{x\tau_1(\phi_2+\sigma_2)(1-\kappa_1)\big(y\tau_2\phi_1\sigma_1(1-\kappa_1)+\sigma_2(\phi_1+\sigma_1)(\delta\kappa_2+\sigma_1)\big)}$$

Selanjutnya akan dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium.

3.3. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Pada subbab ini, dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

Untuk menyelidiki kestabilan titik ekuilibrium, sistem Persamaan **Error! Reference source not found.** dilinearisasi terlebih dahulu melalui matriks Jacobian. Masing-masing persamaan pada sistem Persamaan **Error! Reference source not found.** diturunkan secara parsial terhadap $h_1, h_2, h_3, h_4, v_1, v_2, v_3$. sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -(x(1-\kappa_1)\tau_1 v_3 + \sigma_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x(1-\kappa_1)\tau_1) \\ x(1-\kappa_1)\tau_1 v_3 & -(\phi_1+\sigma_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & x(1-\kappa_1)\tau_1 h_1 \\ 0 & \phi_1 & -(\kappa_2\delta+\sigma_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2\delta & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(y(1-\kappa_1)\tau_2) & 0 & -(y(1-\kappa_1)\tau_2 h_3 + \sigma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y(1-\kappa_1)\tau_2 v_1 & 0 & y(1-\kappa_1)\tau_2 h_3 & -(\phi_2+\sigma_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & -\sigma_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dalam menentukan kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit, terlebih dahulu dilakukan substitusi titik $S = (h_1^*, h_2^*, h_3^*, h_4^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*) = (1,0,0,0,1,0,0)$ ke dalam Matriks (1), sehingga diperoleh matriks Jacobian berikut:

$$J_S = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & d & -e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j & -h \end{bmatrix} \quad (2)$$

di mana

$a_1 = \sigma_1$ $\quad e = f + a_1$ $\quad i = j + h$
$b_1 = x(1-\kappa_1)\tau_1$ $\quad f = \kappa_2\delta$ $\quad j = \phi_2$
$c = d + a_1$ $\quad g = y(1-\kappa_1)\tau_2$
$d = \phi_1$ $\quad h = \sigma_2$

Selanjutnya, dicari nilai eigen dari J_S, yaitu λ yang memenuhi $|J_S - \lambda I| = 0$.

$$J_S - \lambda I = \begin{bmatrix} -a_1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & -c-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & d & -e-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & -a_1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 & -h-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & -i-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j & -h-\lambda \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan, diperoleh determinan dari matriks $J_S - \lambda I$ sebagai berikut

$$|J_S - \lambda I| = (-a_1-\lambda)^2(-c-\lambda)(-e-\lambda)(-h-\lambda)(-i-\lambda)\left(-h-\lambda-\frac{b_1dgj}{(-i-\lambda)(-e-\lambda)(-c-\lambda)}\right) \quad (3)$$

Berdasarkan Persamaan (3), didapat

$|J_S - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow$

i) $(-a_1-\lambda)^2 = 0$, dengan $\lambda_{1,2} = -a_1 = -\sigma_1 < 0$
ii) $(-c-\lambda) = 0$, dengan $\lambda_3 = -c = -(\phi_1 + \sigma_1) < 0$
iii) $(-e-\lambda) = 0$, dengan $\lambda_4 = -e = -(\kappa_2\delta + \sigma_1) < 0$
iv) $(-h-\lambda) = 0$, dengan $\lambda_5 = -h = -\sigma_2 < 0$
v) $(-i-\lambda) = 0$, dengan $\lambda_6 = -i = -(\phi_2 + \sigma_2) < 0$
vi) $\left(-h-\lambda-\frac{b_1dgj}{(-i-\lambda)(-e-\lambda)(-c-\lambda)}\right) = 0$ dengan

$$\lambda_7 = -h - \frac{b_1dgj}{(-i)(-e)(-c)} = -\sigma_2 + \frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)}$$

Nilai λ_7 tidak dapat ditentukan secara langsung apakah bernilai negatif atau positif. Oleh karena itu, untuk menjamin seluruh nilai eigen bernilai real negatif, maka kondisi $\lambda_7 < 0$ harus terpenuhi. Sehingga

$$\lambda_7 < 0 \Leftrightarrow -\sigma_2 + \frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{\sigma_2(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)} < 1$$

Bilangan $\frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{\sigma_2(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)}$ disebut sebagai bilangan reproduksi dasar (R_0).

Kestabilan lokal titik ekuilibrium dianalisis melalui linearisasi dan nilai eigen matriks Jacobian, dengan kondisi ambang mengacu pada van den Driessche dan Watmough [14] serta kriteria Routh–Hurwitz [12]. Hasil analisis kestabilan pada titik ekuilibrium bebas penyakit dirangkum dalam Teorema 3.1 berikut.

Teorema 3.1 ([2]). *Titik ekuilibrium bebas penyakit* $S = (1,0,0,0,1,0,0)$ *stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika* $R_0 < 1$*, dan tidak stabil jika dan hanya jika* $R_0 > 1$.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit S bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $R_0 < 1$. Hal ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa seluruh nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik S memiliki bagian real negatif. Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan pada operasi $|J_S - \lambda I|$, diperoleh bahwa nilai dari $\lambda_{1,2,3,4,5,6} < 0$, sementara

$$\lambda_7 < 0 \Leftrightarrow -\sigma_2 + \frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)} < \sigma_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{\sigma_2(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)} < 1$$

Dikarenakan telah diketahui bahwa $R_0 = \frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{\sigma_2(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)}$, maka diperoleh $\lambda_7 < 0 \Leftrightarrow R_0 < 1$. Sehingga terbukti bahwa titik ekuilibrium S bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $R_0 < 1$■.

Sementara itu, kestabilan titik ekuilibrium endemik $SS = (h_1^{**}, h_2^{**}, h_3^{**}, h_4^{**}, v_1^{**}, v_2^{**}, v_3^{**})$, dianalisis menggunakan Teorema 3.2 berikut.

Teorema 3.2([2]). *Titik ekuilibrium endemik penyakit* $SS = (h_1^{**}, h_2^{**}, h_3^{**}, h_4^{**}, v_1^{**}, v_2^{**}, v_3^{**})$ *stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika* $R_0 > 1$*, dan tidak stabil jika dan hanya jika* $R_0 < 1$.

BUKTI**.**

Akan dibuktikan bahwa titik ekuilibrium endemik SS bersifat stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $R_0 > 1$. Hal ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa seluruh nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik SS memiliki bagian real negatif. Ekuivalen dengan itu, semua akar-akar dari Polinomial karakteristik (7) memiliki bagian real negatif. Selanjutnya, ekuivalen pula dengan menunjukkan bahwa jika semua koefisien Polinomial karakteristik (7) dan seluruh determinan minor utama dari matriks Hurwitz bernilai positif, maka Polinomial karakteristik (7) merupakan polinomial Hurwitz.

Untuk menentukan kestabilan asimtotik lokal pada titik ekuilibrium endemik penyakit, terlebih dahulu dilakukan substitusi titik ekuilibrium SS ke dalam Matriks (1). Sehingga diperoleh matriks Jacobian berikut:

$$J_{SS} = \begin{bmatrix} -(a_1+\sigma_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ a_1 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & \phi_1 & -f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 & -(i+\sigma_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 & i & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & -\sigma_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

dengan

$a_1 = \frac{b_1\phi_2\sigma_1(R_0-1)}{R_0k\sigma_1 + b_1\phi_2}$	$b_1 = x(1-\kappa_1)\tau_1$	$c = \phi_1 + \sigma_1$	$j = \frac{h(b_1\phi_2+\sigma_1k)}{R_0\sigma_1k + b_1\phi_2}$

$d = \frac{b_1(R_0 k\sigma_1 + b_1\phi_2)}{R_0(b_1\phi_2 + \sigma_1 k)}$	$f = \mathrm{g} + \sigma_1$	$g = \kappa_2\delta$	
$i = \frac{\sigma_1\sigma_2 k(R_0 - 1)}{b_1\phi_2 + \sigma_1 k}$	$h = y(1-\kappa_1)\tau_2$	$k = \phi_2 + \sigma_2$	

Selanjutnya, dicari nilai eigen dari J_{SS}, yaitu λ yang memenuhi $|J_{SS} - \lambda I| = 0$.

$$J_{SS} - \lambda I = \begin{bmatrix} -(a_1+\sigma_1)-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ a_1 & -c-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & \phi_1 & -f-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & -\sigma_1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 & -(i+\sigma_2)-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 & i & -k-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_2 & -\sigma_2-\lambda \end{bmatrix} \quad (5)$$

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, diperoleh determinan dari matriks $J_{SS} - \lambda I$ sebagai berikut

$$|J_{SS} - \lambda I| = P(\lambda)(-\sigma_1 - \lambda) \quad (6)$$

di mana $P(\lambda) = \lambda^6 + A\lambda^5 + B\lambda^4 + C\lambda^3 + D\lambda^2 + E\lambda + F$. Berdasarkan Persamaan (6), diperoleh polinomial karakteristik $P(\lambda)$ sebagi berikut

$$\lambda^6 + A\lambda^5 + B\lambda^4 + C\lambda^3 + D\lambda^2 + E\lambda + F = 0 \quad (7)$$

di mana

$A = c + f + i + k + a_1 + \sigma_1 + 2\sigma_2$

$B = c(f + i + k + a_1 + \sigma_1 + 2\sigma_2) + f(i + k + a_1 + \sigma_1 + 2\sigma_2) + i(k + a_1 + \sigma_1 + \sigma_2)$
$+ k(a_1 + \sigma_1 + 2\sigma_2) + \sigma_2(2a_1 + 2\sigma_1 + \sigma_2)$

$C = cf(i + k + a_1 + \sigma_1 + 2\sigma_2) + (k + a_1 + \sigma_1 + \sigma_2)(ci + fi)$
$+ (a_1 + \sigma_1 + 2\sigma_2)(ck + fk) + (2a_1 + 2\sigma_1 + \sigma_2)(c\sigma_2 + f\sigma_2 + k\sigma_2)$
$+ ik(a_1 + \sigma_1 + \sigma_2) + (a_1 + \sigma_1)(i\sigma_2 + \sigma_2^2)$

$D = cfi(k + a_1 + \sigma_1 + \sigma_2) + kfc(a_1 + \sigma_1 + 2\sigma_2) + (a_1 + \sigma_1 + \sigma_2)(cik + fik)$
$+ (a_1 + \sigma_1)(ci\sigma_2 + c\sigma_2^2 + fi\sigma_2 + f\sigma_2^2 + ik\sigma_2 + k\sigma_2^2)$
$+ (2a_1 + 2\sigma_1 + \sigma_2)(cf\sigma_2 + ck\sigma_2 + fk\sigma_2) - dj\phi_1\phi_2$

$E = kfci(a_1 + \sigma_1 + \sigma_2) + (a_1 + \sigma_1)(cfi\sigma_2 + cf\sigma_2^2 + cik\sigma_2 + ck\sigma_2^2 + fik\sigma_2 + fk\sigma_2^2)$
$+ cfk\sigma_2(2a_1 + 2\sigma_1 + \sigma_2) + dih\phi_1\phi_2 + ja_1b_1\phi_1\phi_2$
$- dj\phi_1\phi_2(\sigma_1 + \sigma_2 + i + a_1)$

$F = (a_1 + \sigma_1)(cfik\sigma_2 + cfk\sigma_2^2) + di\phi_1\phi_2a_1(h - j) + di\phi_1\phi_2\sigma_1(h - j)$
$+ ia_1b_1\phi_1\phi_2(j - h) + ja_1\sigma_2\phi_1\phi_2(b_1 - d) - dj\phi_1\phi_2\sigma_1\sigma_2$

Karena seluruh parameter diasumsikan bernilai positif, maka diperoleh koefisien $A > 0$, $B > 0$, dan $C > 0$. Selanjutnya, terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa $D > 0, E > 0$, dan $F > 0$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$.

Sebelumnya diketahui bahwa $R_0 = \frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{\sigma_2(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)}$, maka $xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2 = R_0\sigma_2(\phi_2 + \sigma_2)(\kappa_2\delta + \sigma_1)(\phi_1 + \sigma_1)$.

Akan dibuktikan $D > 0$, dengan D didefinisikan sebagai berikut

$D = cfi(k + a_1 + \sigma_1 + \sigma_2) + kfc(a_1 + \sigma_1 + 2\sigma_2) + (a_1 + \sigma_1 + \sigma_2)(cik + fik)$
$+ (a_1 + \sigma_1)(ci\sigma_2 + c\sigma_2^2 + fi\sigma_2 + f\sigma_2^2 + ik\sigma_2 + k\sigma_2^2)$
$+ (2a_1 + 2\sigma_1 + \sigma_2)(cf\sigma_2 + ck\sigma_2 + fk\sigma_2) - dj\phi_1\phi_2$

Suku negatif $-dj\phi_1\phi_2$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$-dj\phi_1\phi_2 = -\frac{b_1(R_0 k\sigma_1 + b_1\phi_2)}{R_0(b_1\phi_2 + \sigma_1 k)}\frac{h(b_1\phi_2 + \sigma_1 k)}{R_0 k\sigma_1 + b_1\phi_2}\phi_1\phi_2$$

$$= -\frac{b_1 h\phi_1\phi_2}{R_0} = -\frac{R_0\sigma_2(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)}{R_0} = -\sigma_2 kfc$$

Selanjutnya, D dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} D = {} & kfc(a_1+\sigma_1) + cfi(k+a_1+\sigma_1+\sigma_2) + (a_1+\sigma_1+\sigma_2)(cik+fik) \\ & + (a_1+\sigma_1)(ci\sigma_2 + c\sigma_2^2 + fi\sigma_2 + f\sigma_2^2 + ik\sigma_2 + k\sigma_2^2) \\ & + (2a_1+2\sigma_1+\sigma_2)(cf\sigma_1 + ck\sigma_2 + fk\sigma_1) + \sigma_2 kfc \end{aligned}$$

Karena semua parameter diasumsikan positif, maka disimpulkan bahwa $D > 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan $E > 0$. Dengan E didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E = {} & kfci(a_1+\sigma_1+\sigma_2) + (a_1+\sigma_1)(cfi\sigma_2 + cf\sigma_2^2 + cik\sigma_2 + ck\sigma_2^2 + fik\sigma_2 + fk\sigma_2^2) \\ & + kfc\sigma_2(2a_1+2\sigma_1+\sigma_2) + dih\phi_1\phi_2 + ja_1b_1\phi_1\phi_2 \\ & - dj\phi_1\phi_2(\sigma_1+\sigma_2+i+a_1) \end{aligned}$$

Suku negatif $-dj\phi_1\phi_2(\sigma_1+\sigma_2+i+a_1)$ dapat dijabarkan menjadi $-dj\phi_1\phi_2(\sigma_1+\sigma_2+i+a_1) = -\sigma_2 kfc(\sigma_1+\sigma_2+i+a_1)$. Perhatikan suku positif dalam E, yaitu $\sigma_2 kfc(2a_1+2\sigma_1+\sigma_2) + kfci(a_1+\sigma_1+\sigma_2)$. Setelah dikurangi dengan suku negatif $-\sigma_2 kfc(\sigma_1+\sigma_2+i+a_1)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \sigma_2 kfc(2a_1+2\sigma_1+\sigma_2) + kfci(a_1+\sigma_1+\sigma_2) - \sigma_2 kfc(\sigma_1+\sigma_2+i+a_1) \\ & \quad = \sigma_2 a_1 kfc + \sigma_2\sigma_1 kfc + a_1 kfci + \sigma_1 kfci \end{aligned}$$

Oleh karena itu, bentuk E merupakan penjumlahan suku positif, sehingga dapat disimpulkan bahwa $E > 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan $F > 0 \Leftrightarrow R_0 > 1$. Dengan F didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F = {} & (a_1+\sigma_1)(\sigma_2 kfci + \sigma_2^2 kfc) + di\phi_1\phi_2\sigma_1(h-j) + dia_1\phi_1\phi_2(h-j) + \\ & ia_1b_1\phi_1\phi_2(j-h) + ja_1\sigma_2\phi_1\phi_2(b_1-d) - dj\phi_1\phi_2\sigma_1\sigma_2 \end{aligned}$$

Suku negatif $-dj\phi_1\phi_2\sigma_1\sigma_2 = -kfc\sigma_1\sigma_2^2$, akan dibandingkan dengan suku positif $(a_1+\sigma_1)(\sigma_2 kfci + \sigma_2^2 kfc)$. $(a_1+\sigma_1)(\sigma_2 kfci + \sigma_2^2 kfc) - kfc\sigma_1\sigma_2^2 = kfci\sigma_2 a_1 + kfc\sigma_2^2 a_1 + kfci\sigma_1\sigma_2$. Selanjutnya, apabila $h > j$, $b_1 > d$ dan $dia_1\phi_1\phi_2(h-j) > ia_1b_1\phi_1\phi_2(j-h)$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$ terpenuhi, maka seluruh suku dalam F bernilai positif. Dari hasil perhitungan, seluruh syarat terpenuhi, sehingga dapat disimpulkan bahwa $F > 0 \Leftrightarrow R_0 > 1$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa semua determinan minor utama matriks Hurwitz bernilai positif.

Berdasarkan Persamaan (7), matriks Hurwitz dapat dibentuk sebagai berikut [12]:

$$H = \begin{bmatrix} A & C & E & 0 & 0 & 0 \\ 1 & B & D & F & 0 & 0 \\ 0 & A & C & E & 0 & 0 \\ 0 & 1 & B & D & F & 0 \\ 0 & 0 & A & C & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 & B & D & F \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Hurwitz H, diperoleh determinan Hurwitz sebagai berikut:

$$\Delta_1 = |A| = A$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & C \\ 1 & B \end{vmatrix} = AB - C$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A & C & E \\ 1 & B & D \\ 0 & A & C \end{vmatrix} = ABC + AE - A^2D - C^2$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A & C & E & 0 \\ 1 & B & D & F \\ 0 & A & C & E \\ 0 & 1 & B & D \end{vmatrix}$$

$$= A^2BF - A^2D^2 - AB^2E + ABCD - ACF + 2ADE + BCE - C^2D - E^2$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} A & C & E & 0 & 0 \\ 1 & B & D & F & 0 \\ 0 & A & C & E & 0 \\ 0 & 1 & B & D & F \\ 0 & 0 & A & C & E \end{vmatrix} = E(\Delta_4) + AEF(\Delta_2) - CF(\Delta_3) - A^3F^2$$

$$\Delta_6 = |H| = \Delta_5 F$$

Berdasarkan kriteria Hurwitz, apabila $\Delta_i > 0$ untuk setiap $i = 1,2,3,4,5,6$ terpenuhi ketika $R_0 > 1$, yang mengindikasikan bahwa seluruh determinan minor utama matriks Hurwitz bernilai positif, maka semua akar dari polinomial karakteristik memiliki bagian real negatif. Dikarenakan dari hasil perhitungan seluruh syarat terpenuhi, maka titik ekuilibrium endemic dikatakan stabil asimtotik local pada saat $R_0 > 1$■.

3.4. Simulasi Numerik Model Penyebaran Penyakit Malaria

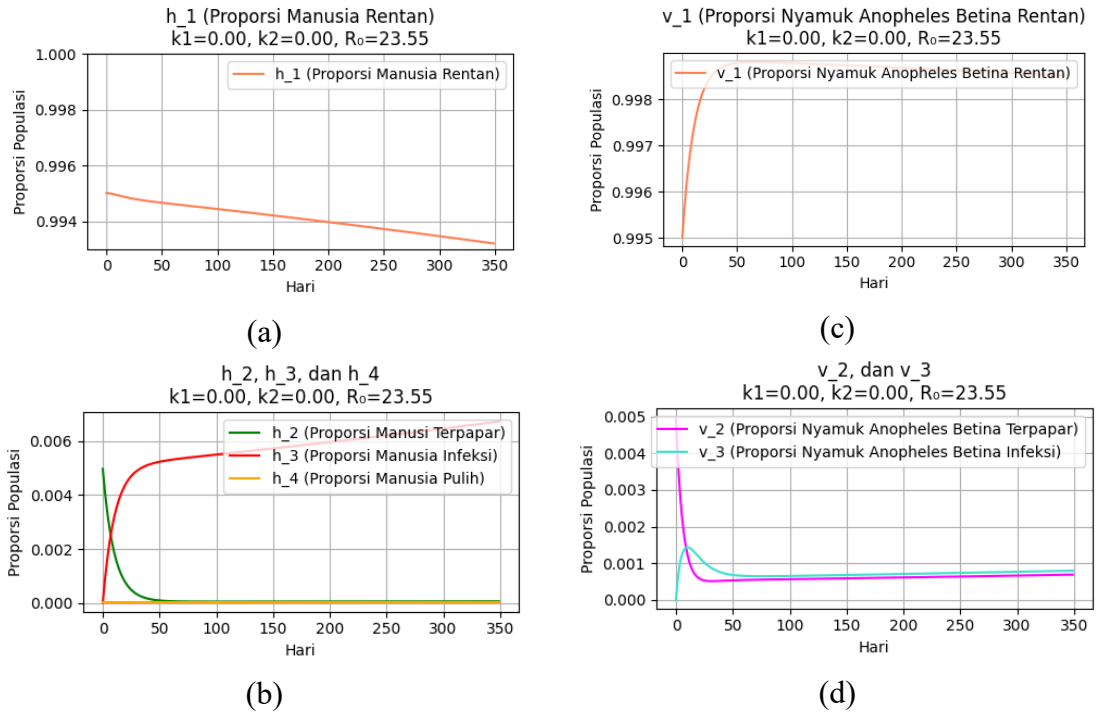
Penelitian ini menggunakan data malaria Kalimantan Barat tahun 2024 dari Profil Kesehatan Provinsi Kalimantan Barat 2024 [7]. Simulasi model dilakukan untuk melihat dinamika penyebaran penyakit malaria vivax. Simulasi juga dilakukan untuk menunjukkan efektivitas intervensi yang dilakukan, yaitu penggunaan kelambu, dan pengobatan pasien malaria. Nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini ditunjukkan pada

Tabel **2**:

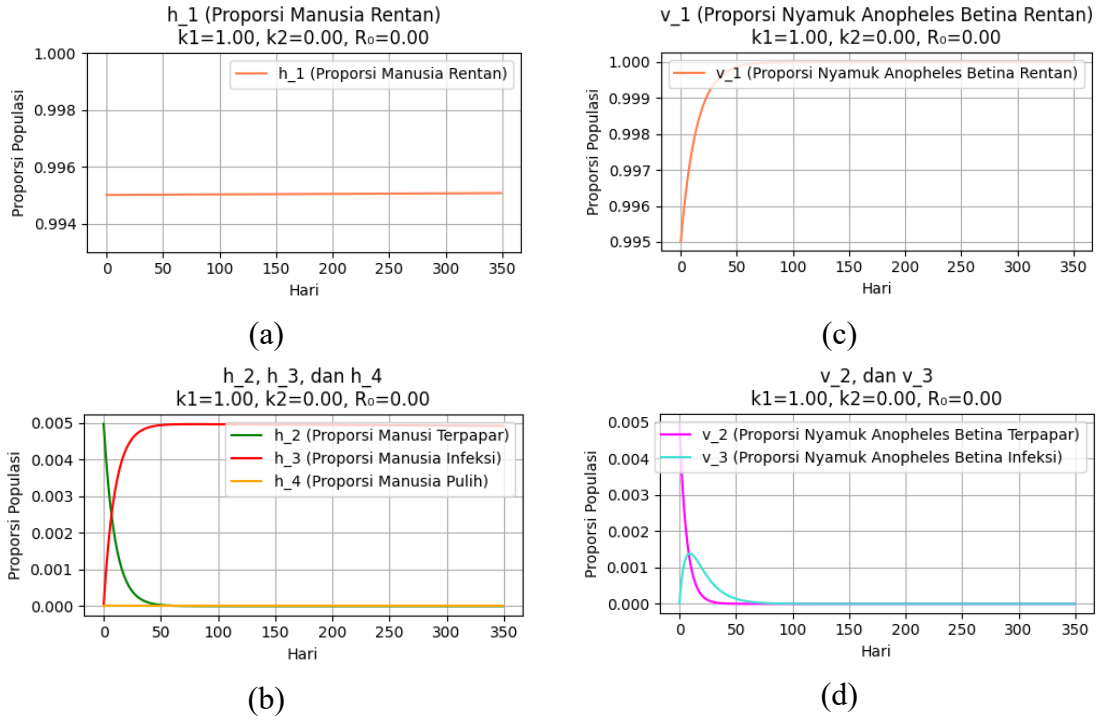
Tabel 2. Nilai Parameter

Parameter	Nilai
ε_1	$5.695.475/(73{,}94 \times 365)$
ε_2	$5.695.415/14$
σ_1	$1/(73{,}94 \times 365)$
σ_2	$1/14$
$x = y$	$1/3$
τ_1	$0{,}022$
τ_2	$0{,}048$
δ	$1/14 = 0{,}071$
ϕ_1	$0{,}1$
ϕ_2	$0{,}083$

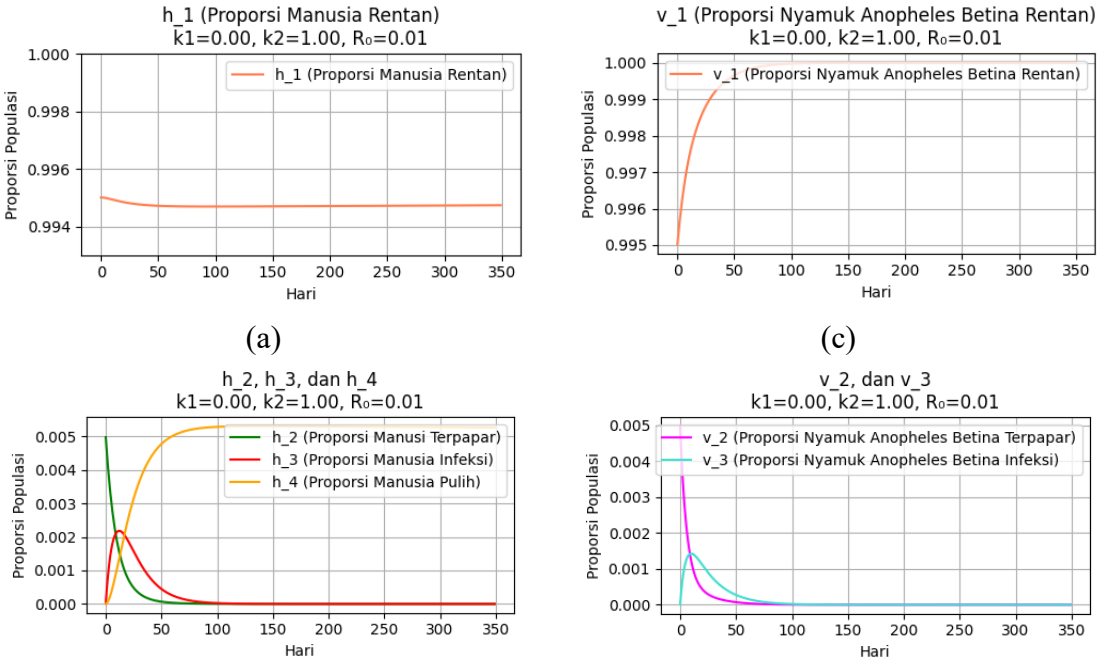
Dengan jumlah populasi manusia $N_1 = 5.695.475$ dan populasi nyamuk Anopheles betina $N_2 = 5.695.415$ [7], serta nilai awal $H_1(0) = 5.667.034$, $H_2(0) = 28.319$, $H_3(0) = 62$, $H_4(0) = 60$, $V_1(0) = 5.667.034$, $V_2(0) = 28.319$, dan $V_3(0) = 62$, diperoleh hasil simulasi dinamika penyebaran malaria di Kalimantan Barat selama 350 hari dengan empat kondisi intervensi dalam proporsi, yang ditunjukkan pada grafik berikut:



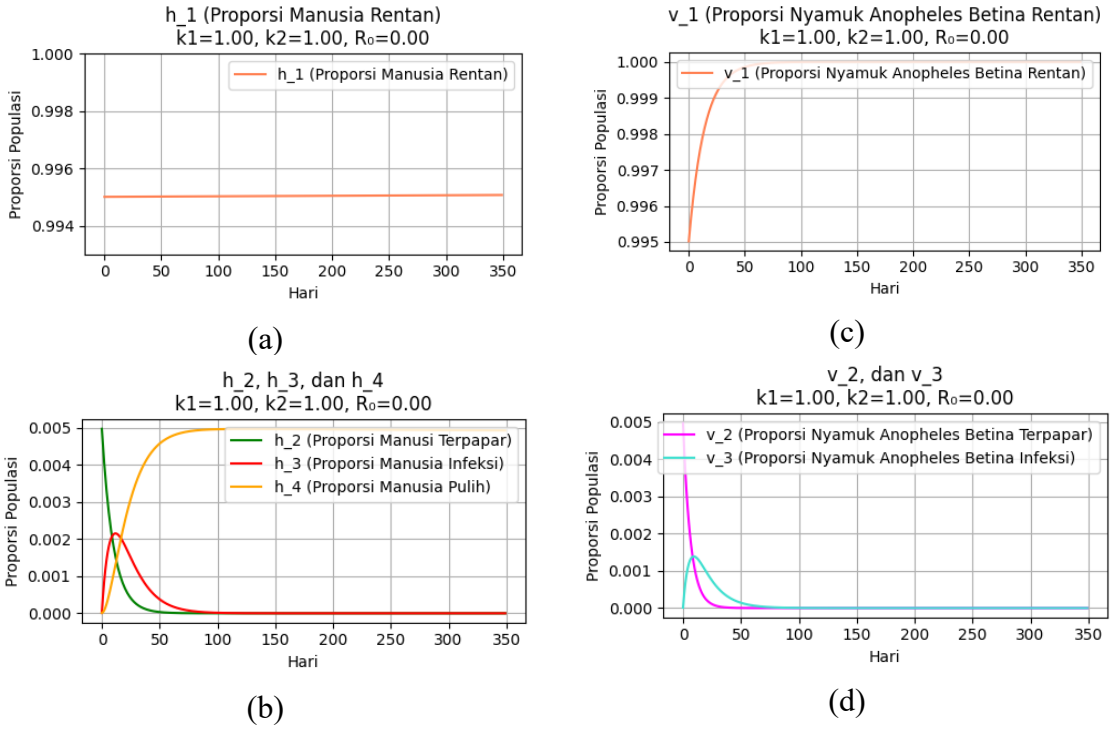
Gambar 2. Grafik h_1(a) dan h_2, h_3, h_4(b) pada Manusia, serta v_1(c) dan v_2, v_3(d) pada Nyamuk dengan Tanpa Intervensi



Gambar 3. Grafik h_1(a) dan h_2, h_3, h_4(b) pada Manusia, serta v_1(c) dan v_2, v_3(d) pada Nyamuk dengan Intervensi Kelambu



Gambar 4. Grafik h_1(a) dan h_2, h_3, h_4(b) pada Manusia, serta v_1(c) dan v_2, v_3(d) pada Nyamuk dengan Intervensi Pengobatan pada Pasien



Gambar 5. Grafik h_1(a) dan h_2, h_3, h_4(b) pada Manusia, serta v_1(c) dan v_2, v_3(d) pada Nyamuk dengan Kedua Intervensi Dilakukan Optimal

Gambar *2*-Gambar 5 menyatakan dinamika proporsi subpopulasi manusia dan nyamuk pada empat kondisi intervensi, yaitu: tanpa intervensi, penggunaan kelambu, pengobatan pasien, dan kombinasi keduanya. Pada kondisi tanpa intervensi, proporsi manusia terinfeksi mencapai puncak tertinggi pada hari ke-350 dengan nilai 0,00676, sedangkan proporsi nyamuk

terinfeksi bernilai 0,0008 pada hari ke-350 dengan $R_0 = 23{,}55$, yang menunjukkan bahwa setiap manusia yang terinfeksi dapat menularkan malaria vivax ke rata-rata 23 nyamuk Anopheles betina rentan, dan setiap nyamuk Anopheles betina terinfeksi juga dapat menularkan malaria vivax ke rata-rata 23 manusia rentan. Hal ini menunjukkan bahwa malaria dapat mewabah. Pada kondisi penggunaan kelambu, proporsi manusia yang terinfeksi bernilai 0,00492 pada hari ke-350, sedangkan proporsi nyamuk terinfeksi mencapai nol dengan nilai $R_0 = 0$, yang menunjukkan bahwa penularan malaria terhenti dikarenakan tidak terdapat vektor penular. Pada kondisi pengobatan pasien, proporsi manusia dan nyamuk terinfeksi keduanya mencapai nol pada hari ke-350 dengan nilai $R_0 = 0{,}01$, yang menunjukkan bahwa malaria akan menghilang seiring berjalannya waktu dikarenakan tidak terdapat manusia maupun nyamuk yang tetap terinfeksi. Sementara itu, pada kondisi kombinasi penggunaan kelambu dan pengobatan pasien, proporsi manusia dan nyamuk terinfeksi seluruhnya mencapai nol pada hari ke-350 dengan nilai $R_0 = 0$, sehingga penularan malaria dapat dihentikan sepenuhnya.

Berdasarkan proporsi individu terinfeksi, penggunaan kelambu saja mampu menurunkan infeksi secara signifikan dibanding kondisi tanpa intervensi, meskipun masih menyisakan kasus pada proporsi manusia terinfeksi. Sementara itu, pengobatan pasien mempercepat pemulihan dan menekan infeksi, tetapi kurang efektif dalam menghambat penyebaran malaria dibandingkan kelambu, sebagaimana yang dapat dilihat dari nilai R_0. Secara keseluruhan, kombinasi kedua intervensi memberikan dampak paling efektif dalam menekan dan menghentikan penyebaran malaria vivax.

4. Kesimpulan

Penelitian ini membangun model $H_1H_2H_3H_4 - V_1V_2V_3$ untuk penyebaran malaria *vivax* antara manusia dan nyamuk *Anopheles* betina dengan parameter efektivitas kelambu (κ_1) dan pengobatan pasien (κ_2). Model memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit S dan titik ekuilibrium endemik SS. Bilangan reproduksi dasar R_0 diperoleh dari kondisi kestabilan titik S, yaitu $R_0 = \frac{xy(1-\kappa_1)^2\tau_1\tau_2\phi_1\phi_2}{\sigma_2(\phi_2+\sigma_2)(\kappa_2\,\delta+\sigma_1)(\phi_1+\sigma_1)}$. Titik S stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika dan hanya jika $R_0 > 1$, sedangkan SS ada dan stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika $R_0 > 1$. Simulasi dengan data Kalimantan Barat tahun 2024 selama 350 hari menunjukkan $R_0 = 23{,}55$ tanpa intervensi, 0 dengan kelambu, 0,01 dengan pengobatan pasien, dan 0 dengan kombinasi keduanya. Kombinasi kelambu dan pengobatan paling efektif menurunkan R_0 serta proporsi manusia dan nyamuk terinfeksi. Hasil ini berlaku pada asumsi model, antara lain kekebalan permanen tanpa *relaps* dan populasi nyamuk yang diasumsikan sebanding dengan populasi manusia.

Daftar Pustaka

[1] D. A. M. Ginting, "Mengulas eliminasi malaria," *Buletin APBN*, ed. 192, Pusat Kajian Anggaran, Badan Keahlian DPR RI, 2023. [Online]. Available: https://berkas.dpr.go.id/pa3kn/buletin-apbn/public file/buletin-apbn-public-192.pdf

[2] I. R. Olii, T. Sigar, and A. M. A. Djafar, "Model Epidemik SEIR-SEI Penyebaran Penyakit Malaria dengan Peluang Kegagalan pada Vaksinasi," *Open Science Framework*. May 31, 2020, doi: 10.31219/osf.io/jk8e5.

[3] R. Resmawan and N. Nurwan, "Konstruksi Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan," J. *Mat. Integratif*, vol. 13, no. 2, pp. 105-114, Sep. 2017, doi: 10.24198/jmi.v13.n2.12332.105-

114.

[4] H. F. Setiawan, I. Hamisah, and F. Fahdhienie, "Faktor Risiko Kejadian Malaria Pada Masyarakat di Wilayah Kerja Puskesmas Krueng Sabee Kabupaten Aceh Jaya," *J. Bahana Kesehat. Masy.*, vol. 5, no. 2, pp. 65–71, 2021.

[5] S. Sulasmi, D. E. Setyaningtyas, A. Rosanji, and N. Rahayu, "Pengaruh curah hujan, kelembaban, dan temperatur terhadap prevalensi Malaria di Kabupaten Tanah Bumbu Kalimantan Selatan," *J. Heal. Epidemiol. Commun. Dis*, vol. 3, no. 1, pp. 22–27, 2017.

[6] S. B. Tondok et al., *Pencegahan dan Penanganan Malaria*. 2022. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=jbCcEAAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=id&source =gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[7] Dinas Kesehatan Provinsi Kalimantan Barat, *Profil Kesehatan Provinsi Kalimantan Barat 2024*. Pontianak, Indonesia: Dinas Kesehatan Provinsi Kalimantan Barat, 2025. [Online]. Available: https://dinkes.kalbarprov.go.id/dokumen/profil-kesehatan/

[8] H. Hermalini, F. Meliyanti, and E. Candra, "Faktor-Faktor yang Berhubungan dengan Upaya Pencegahan Malaria," *Babul Ilmi: Jurnal Ilmiah Multi Science Kesehatan*, vol. 15, no. 2, pp. 36–44, 2023.

[9] H. Purwanto, E. Noviani, and M. N. Mara, "Analisis dan Simulasi Model Matematika Penyakit Demam Dengue dengan Satu Serotipe Virus Dengue," *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika dan Statistika*, vol. 3, no. 3, pp. 153–162, 2014.

[10] M. Z. Ndii, *Pemodelan Matematika*. Pekalongan, Indonesia: Penerbit NEM, 2022.

[11] R. Lubis, B. J. Sinaga, and E. Mutiara, "Pengaruh Pemakaian Kelambu, Kawat Kasa dan Kondisi Geodemografis terhadap Kejadian Malaria di Kabupaten Batu Bara," *J. Kesehat. Lingkung. Indones.*, vol. 20, no. 1, pp. 53–58, 2021.

[12] M. S. Hamdin, A. Sani, and M. K. Djafar, "Model SVEITR pada Penyebaran Penyakit Tuberculosis dengan Faktor Vaksinasi dan Treatment," *J. Mat. Komputasi dan Stat.*, vol. 4, no. 3, pp. 779–789, 2024.

[13] Badan Pusat Statistik, "Angka kejadian Malaria," *Detail Metadata Indikator Statistik*. Sirusa BPS. [Online]. Available: https://sirusa.web.bps.go.id/metadata/indikator/61841

[14] P. van den Driessche and J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission," *Math. Biosci.*, vol. 180, no. 1–2, pp. 29–48, 2002, doi: 10.1016/S0025-5564(02)00108-6.