

MODIFIKASI METODE *IMPROVED RUNGE-KUTTA* ORDER KEEMPAT DENGAN INTEGRASI RATA-RATA HARMONIK

DHITA NATASYA AHMAD* DAN YULITA MOLLIQ RANGKUTI

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan, Sumatera Utara, Indonesia.

*Penulis Korespondensi: dhitanatasyaahmad@mhs.unimed.ac.id

ABSTRAK

Persamaan diferensial nonlinier yang bersifat kaku (*stiff*) merupakan pemodelan fenomena alam yang melibatkan perubahan skala waktu berbeda, sehingga diperlukan metode numerik yang mampu mempertahankan akurasi dan kestabilan pada pemilihan ukuran langkah (*step size*) tertentu. Meskipun berbagai metode numerik telah dikembangkan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, peningkatan akurasi pada solusi numerik masih menjadi aspek yang penting untuk dikaji. Penelitian ini mengusulkan memodifikasi metode *Improved Runge-Kutta* orde ke-4 (IRKH4) dengan integrasi rata-rata harmonik untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang bersifat kaku (*stiff*). Metode ini dikonstruksi menggunakan pendekatan deret Taylor guna memenuhi syarat akurasi orde empat. Kinerja metode dievaluasi pada tiga persamaan diferensial nonlinier yang bersifat kaku (*stiff*), dengan karakteristik yang berbeda, yaitu masalah relaksasi nonlinier, masalah dengan struktur eksponensial/rasional, dan masalah nonlinier dengan pemaksaan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa IRKH4 secara konsisten menghasilkan galat global maksimum yang lebih kecil dibandingkan IRK4, RK4, dan RKH4 pada tiga kasus pengujian yang diuji. Pemilihan ukuran langkah (*step size*) berpengaruh terhadap tingkat akurasi seluruh metode yang dibandingkan. Pada ketiga kasus pengujian, IRKH4 memberikan galat mutlak maksimum yang lebih rendah daripada IRK4, RK4, dan RKH4, yang menunjukkan peningkatan akurasi tanpa mengubah formulasi dasar pada metode. Dari aspek kestabilan, metode IRKH4 bersifat stabil bersyarat dengan daerah kestabilan yang terbatas pada sumbu real negatif, sehingga kondisi tersebut menyebabkan metode memerlukan ukuran langkah (*step size*) yang cukup kecil agar solusi numerik tetap stabil.

Kata Kunci: *Improved Runge-Kutta* orde ke-4, Persamaan diferensial nonlinier kaku, Rata-Rata Harmonik

ABSTRACT

Stiff nonlinear differential equations are used to model natural phenomena involving multiple time scales, making their numerical solution challenging and requiring numerical methods that can maintain accuracy and stability for appropriate step sizes. Although various numerical methods have been developed to address such problems, improving the accuracy of numerical solutions remains an important area of research. This study proposes a modification of the fourth-order Improved Runge-Kutta (IRK4) method by incorporating the harmonic mean into its function evaluation for solving stiff nonlinear differential equations. The proposed method is constructed using a Taylor series expansion to satisfy the fourth-order accuracy conditions. The performance of the method is evaluated on three stiff nonlinear differential equations with different characteristics, namely a nonlinear relaxation problem, a problem with an exponential/rational structure, and a nonlinear forced problem. The simulation results show that IRKH4 consistently produces lower maximum global errors than IRK4,

2020 Mathematics Subject Classification: 65L05, 65L06, 65L20

Diterima: 14-06-2026, direvisi: 08-10-2026, dimuat: 12-10-2026

RK4, and RKH4 across all three test problems. The choice of step size affects the accuracy of all compared methods. In all three test problems, IRKH4 achieves lower maximum absolute errors than IRK4, RK4, and RKH4, indicating improved accuracy without altering the fundamental formulation of the method. In terms of stability, IRKH4 is conditionally stable, with a stability region limited to the negative real axis. Consequently, a sufficiently small step size is required to maintain the stability of the numerical solution.

Keywords: *Harmonic Mean, Fourth Order Improved Runge-Kutta, Nonlinear Stiff Differential Equations.*

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial nonlinier sering digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena alam atau dinamika kehidupan nyata, termasuk perambatan gelombang tsunami, dan dinamika sistem yang kompleks [1],[2],[3]. Dalam banyak fenomena, model yang dihasilkan bersifat *stiff*, yaitu ditandai oleh adanya perubahan solusi yang sangat cepat dan sangat lambat secara bersamaan [4]. Kondisi ini menyebabkan solusi eksak sulit diperoleh sehingga diperlukan metode numerik untuk mendekati solusinya [5].

Salah satu metode numerik yang paling sering digunakan adalah metode *Runge-Kutta* (RK) [6]. Metode ini telah dikembangkan ke berbagai orde untuk meningkatkan akurasi [7], bahkan mencapai orde yang lebih tinggi, seperti orde 10 dengan 16 tahap [8]. Dari berbagai orde yang ada, salah satu yang sering digunakan adalah metode *Runge-Kutta* orde 4, karena memiliki keseimbangan yang baik antara akurasi dan biaya komputasi [9]. Namun, metode *Runge-Kutta* orde-4 memiliki keterbatasan ketika digunakan untuk persamaan yang bersifat *stiff*, terutama terkait stabilitas numerik, sehingga memerlukan ukuran langkah (*step size*) yang sangat kecil untuk mempertahankan kestabilan solusi numerik [10].

Seiring penelitian yang terus berkembang, berbagai modifikasi metode *Runge-Kutta* telah dikembangkan untuk meningkatkan kinerja numerik, terutama pada permasalahan dengan karakteristik dinamika yang lebih kompleks. Pengembangan ini bertujuan meningkatkan akurasi tanpa menambah kompleksitas komputasi. Salah satu pendekatan yang banyak diteliti adalah penggunaan berbagai jenis rata-rata, seperti rata-rata aritmatika, harmonik, geometri, heronian, yang digunakan untuk meningkatkan kinerja metode *Runge-Kutta* melalui modifikasi pada tahap-tahap perhitungannya [11], [12].

Perkembangan selanjutnya menghasilkan metode *Improved Runge-Kutta* (IRK), yang bertujuan meningkatkan akurasi melalui penyesuaian fungsi evaluasi pada setiap tahap [13]. Metode ini terus berkembang, termasuk *Improved Runge-Kutta* orde 3 (IRK3) [13] dan IRK4 yang meminimalkan norma galat (*error norm*) [14]. Metode-metode tersebut telah diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa khusus berorde tinggi [15], serta masalah osilatori menggunakan pendekatan trigonometri [16]. Selain itu, metode IRK5 telah diterapkan dalam pemodelan keuangan yang bersifat kacau (*chaos system*) [17].

Meskipun berbagai modifikasi IRK4 telah dikembangkan, sebagian besar penelitian masih berfokus dengan tidak mengubah struktur bobot pada fungsi evaluasi tahap, melainkan hanya memodifikasi titik evaluasi. Penelitian terdahulu umumnya memodifikasi IRK untuk meningkatkan akurasi melalui pendekatan trigonometri [16], maupun minimisasi galat [14]. Berbagai jenis rata-rata, termasuk rata-rata geometri, harmonik, dan heronian, juga telah digunakan dalam metode *Runge-Kutta*, dan hasil perbandingan menunjukkan bahwa pemilihan jenis rata-rata dapat memengaruhi kinerja metode numerik [18]. Rata-rata harmonik memberikan pengaruh relatif lebih besar pada nilai yang lebih kecil, sedangkan rata-rata geometri bersifat multiplikatif dan rata-rata heronian merupakan kombinasi rata-rata aritmetik

dan geometri [12]. Karakteristik tersebut menjadi dasar untuk mengkaji rata-rata harmonik sebagai alternatif dalam fungsi evaluasi tahap IRK4 pada persamaan diferensial nonlinier yang bersifat kaku (*stiff*). Meskipun metode implisit banyak digunakan untuk menangani permasalahan *stiff* karena karakteristik kestabilannya, metode eksplisit tetap menjadi alternatif yang relevan untuk dikembangkan karena formulasi dan evaluasi numeriknya relatif sederhana [20]. Oleh karena itu, penelitian ini mengintegrasikan rata-rata harmonik ke dalam bentuk umum dan fungsi evaluasi tahap IRK4 untuk meningkatkan akurasi pada persamaan diferensial nonlinier yang bersifat kaku (*stiff*), tanpa mengubah formulasi dasar metode.

Berdasarkan keterbatasan pada penelitian terdahulu, penelitian ini mengusulkan memodifikasi metode *Improved Runge-Kutta* orde-4 dengan mengintegrasikan rata-rata harmonik ke dalam kerangka pengerjaan bentuk umum dan fungsi evaluasi tahap pada metode *Improved Runge-Kutta* orde-4. Integrasi rata-rata harmonik tersebut bertujuan untuk memperoleh formulasi metode yang mampu mengendalikan pengaruh fungsi evaluasi tahap yang berbeda secara signifikan, sehingga diharapkan dapat meningkatkan akurasi solusi numerik dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier bersifat kaku (*stiff*). Metode yang dikembangkan digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier bersifat kaku (*stiff*) serta dianalisis kestabilan dan galat numeriknya dengan metode IRK4, RK4, dan RK Harmonik 4. Modifikasi ini diharapkan mampu menghasilkan solusi numerik yang lebih stabil dan akurat dalam menangani karakteristik *stiff*.

2. Tinjauan Pustaka

Persamaan diferensial adalah suatu yang melibatkan fungsi yang belum diketahui serta satu atau lebih turunannya [19]. Secara umum, persamaan diferensial menghubungkan satu atau lebih variabel dependen dengan satu atau lebih variabel independen melalui operator diferensial [20].

Persamaan diferensial nonlinier kaku adalah sistem persamaan diferensial nonlinier yang komponen-komponen solusinya berubah pada waktu skala waktu yang sangat berbeda. Karakteristik ini mengakibatkan metode numerik harus menggunakan ukuran langkah yang sangat kecil guna mempertahankan stabilitas numerik dan memperoleh hasil perhitungan yang akurat [21].

2.1. Metode *Runge-Kutta* orde 4

Metode *Runge-Kutta* ialah metode deret Taylor yang memiliki derajat ketelitian yang lebih tinggi dan tidak membutuhkan perhitungan turunan dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih dalam setiap subselang [22]. Metode *Runge-Kutta* pada orde ke-4 dapat dituliskan dalam bentuk umum:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4), \quad (1)$$

dimana,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) = f, \\ k_2 &= hf(t_n + c_2h, y_n + ha_{21}k_1), \\ &= f + hc_2F_1 + \frac{h^2}{2}c_2^2F_2 + \frac{h^3}{6}c_2^3F_3 + O(h^4), \\ k_3 &= f(t_n + c_3h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)), \\ &= f + hc_3F_1 + \frac{h^2}{2}(2a_{32}c_2f_yF_1 + c_3^2F_2) + \frac{h^3}{6}c_3^3F_3 + O(h^4), \\ k_4 &= f(t_n + c_4h, y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)), \\ &= f + c_4hF_1 + \frac{h^2}{2}(2a_{42}c_2f_yF_1 + 2a_{43}c_3f_yF_1 + c_4^2F_2) + \frac{h^3}{6}c_4^3F_3 + O(h^4), \end{aligned} \quad (2)$$

2.2. Metode *Improved Runge-Kutta* orde 4

Metode *Improved Runge-Kutta* (IRK) adalah pengembangan dari *Runge-Kutta* yang memperbaiki ketelitian dan stabilitas melalui penyesuaian fungsi evaluasi tahap [13]. Metode ini merupakan varian metode *Runge-Kutta* yang memodifikasi tahap-tahap evaluasi fungsi untuk mengurangi error numerik [14].

Bentuk umum *Improved Runge-Kutta* (IRK) orde ke-4 sebagai berikut [13]:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 - b_{-1} k_{-1} + b_2(k_2 - k_{-2}) + b_3(k_3 - k_{-3}) + b_4(k_4 - k_{-4})), \quad (3)$$

dimana,

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_{-1} = f(t_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1),$$

$$k_{-2} = f(t_{n-1} + c_2 h, y_{n-1} + h a_{21} k_{-1}),$$

$$k_3 = f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)),$$

$$k_{-3} = f(t_{n-1} + c_3 h, y_{n-1} + h(a_{31} k_{-1} + a_{32} k_{-2})),$$

$$k_4 = f(t_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)),$$

$$k_{-4} = f(t_{n-1} + c_4 h, y_{n-1} + h(a_{41} k_{-1} + a_{42} k_{-2} + a_{43} k_{-3})),$$

Untuk menentukan kondisi order metode yang diberikan Persamaan (3), akan dijabarkan menggunakan ekspansi deret Taylor.

$$y_{n+1} = y(t_n) + h y' t_n + \frac{h^2}{2!} y'' t_n + \frac{h^3}{3!} y''' t_n + \frac{h^4}{4!} y^{iv} t_n + O(h^5), \quad (4)$$

diketahui bahwa,

$$y' = f, \quad y'' = f_t + f f_y, \quad y''' = (f_t^2 + 2 f_{yt} f + f_{y^2} f^2) + f_y (f_t + f_y f), \quad \text{dan}$$

$$y^{iv} = (f_t^3 + 3 f_{t^2} y f + 3 f_{ty^2} f^2 + f_{y^3} f^3) + f_y (f_t^2 + 2 f_{ty} f + f_{y^2} f^2) + (3 f_{y^2} f + 3 f_{ty} + f_{y^2}) (f_t + f_y f),$$

maka Persamaan (4) akan menjadi persamaan berikut:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & y(t_n) + h f t_n + \frac{h^2}{2!} (f_t + f f_y) t_n \\ & + \frac{h^3}{3!} ((f_t^2 + 2 f_{yt} f + f_{y^2} f^2) + f_y (f_t + f_y f)) t_n \\ & + \frac{h^4}{4!} ((f_t^3 + 3 f_{t^2} y f + 3 f_{ty^2} f^2 + f_{y^3} f^3) + f_y (f_t^2 + 2 f_{ty} f + f_{y^2} f^2) \\ & + (3 f_{y^2} f + 3 f_{ty} + f_{y^2}) (f_t + f_y f)) t_n + O(h^5). \end{aligned} \quad (5)$$

Misalkan, dengan mendefinisikan $F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_{t^{n-k} y^k} f^k$, untuk $n = 1, 2, 3$,

$F_1 = f_t + f_y f$, $F_2 = f_t^2 + 2 f_{yt} f + f_{y^2} f^2$, dan $F_3 = f_t^3 + 3 f_{t^2} y f + 3 f_{ty^2} f^2 + f_{y^3} f^3$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & y(t_n) + h f + \frac{h^2}{2!} F_1 + \frac{h^3}{3!} (F_2 + f_y F_1) + \frac{h^4}{4!} (F_3 + f_y F_2 \\ & + (3 f_{y^2} f + 3 f_{ty} + f_{y^2}) F_1 + O(h^5)). \end{aligned} \quad (6)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan ekspansi pada Persamaan (5), akan dicari nilai

$k_1, k_{-1}, k_2, k_{-2}, k_3, k_{-3}, k_4$, dan k_{-4} , yang digunakan dalam Persamaan (4), maka diperoleh:

$$k_1 = f(t_n, y_n) = f,$$

$$k_{-1} = f - h F_1 + (F_2 + f_y F_1) \frac{h^2}{2!}$$

$$- (F_3 + f_y F_2 + (3 f_{y^2} f + 3 f_{ty} + f_{y^2}) F_1) \frac{h^3}{3!} + O(h^4),$$

$$k_2 = h f(t_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1),$$

$$\begin{aligned}
&= f + hc_2F_1 + \frac{h^2}{2}c_2^2F_2 + \frac{h^3}{6}c_2^3F_3 + O(h^4), \\
k_{-2} &= f - h(1 - c_2)F + \frac{h^2}{2}((1 - c_2)^2F_2 + (1 - 2c_2)f_yF_1) \\
&\quad - \frac{h^3}{3!}((1 - c_2^3)F_3 + f_yF_2 + (3f_{y^2}f + 3f_{ty} + f_{y^2})F_1) + O(h^4), \\
k_3 &= f(t_n + c_3h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)), \\
&= f + hc_3F_1 + \frac{h^2}{2}(2a_{32}c_2f_yF_1 + c_3^2F_2) + \frac{h^3}{6}c_3^3F_3 + O(h^4), \\
k_{-3} &= f - h(1 - c_3)F_1 + \frac{h^2}{2}((1 - c_3)^2F_2 \\
&\quad + (1 - 2(c_3 - a_{32}c_2)f_yF_1) \\
&\quad - \frac{h^3}{6}((1 - c_3^3)F_3 + f_yF_2 + (3f_{y^2}f + 3f_{ty} + f_{y^2})F_1) + O(h^4), \\
k_4 &= f(t_n + c_4h, y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)), \\
&= f + c_4hF_1 + \frac{h^2}{2}(2a_{42}c_2f_yF_1 + 2a_{43}c_3f_yF_1 + c_4^2F_2) + \frac{h^3}{6}c_4^3F_3 + O(h^4), \\
k_{-4} &= f - h(1 - c_4)F_1 \\
&\quad + \frac{h^2}{2!}((1 - 2c_4)F_2 + (1 - 2(c_4 - a_{42}c_2 - a_{43}c_3)f_yF_1) \\
&\quad - \frac{h^3}{3!}((1 + c_4^3)F_3 - 3c_4^2F_2 + f_yF_2 + (3f_{y^2} + 3f_{ty} + f_{y^2})F_1) + O(h^4), \tag{7}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, disubstitusikan nilai $k_1, k_{-1}, k_2, k_{-2}, k_3, k_{-3}, k_4, k_{-4}$ pada Persamaan (3). Kemudian, nilai-nilai dari parameter $a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, c_2, c_3, c_4, b_{-1}, b_1, b_2, b_3$, dan b_4 akan diperoleh dari hasil substitusi tersebut. Nilai parameter tersebut terdapat pada **Tabel 2**, yaitu,

$$\begin{aligned}
a_{21} &= \frac{25+\sqrt{449}}{48}, a_{31} = -\frac{53}{528}(25 - \sqrt{449}), a_{32} = \frac{4(25-\sqrt{449})}{33}, a_{41} = -\frac{4745}{264}, a_{42} = \\
&\frac{4(25-\sqrt{449})}{11}, a_{43} = \frac{4(25+\sqrt{449})}{11}, c_2 = \frac{25+\sqrt{449}}{48}, c_3 = \frac{25-\sqrt{449}}{48}, c_4 = \frac{5}{24}, b_{-1} = -\frac{1}{8}, b_1 = \frac{1}{8}, b_2 = \\
&\frac{3}{8}, b_3 = \frac{3}{8}, \text{ dan } b_4 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya gunakan pendekatan deret Taylor pada Persamaan (6) untuk menentukan parameter-parameter tersebut, dengan ketentuan kondisi order sebagai berikut:

Tabel 1. Kondisi Order Metode *Improved Runge-Kutta* sampai orde ke-4 [23].

Order Metode	Kondisi Order
Order 1	$b_1 - b_{-1} = 1$
Order 2	$b_{-1} + \sum_i b_i = \frac{1}{2}$
Order 3	$\sum_i b_i c_i = \frac{5}{12}, \sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{3},$
Order 4	$\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}, \sum_i b_i c_i^3 = \frac{31}{120},$

Sehingga akan menghasilkan nilai-nilai parameter yang disajikan dalam table butcher berikut:

Tabel 2. Tabel Butcher untuk *Improved Runge-Kutta* orde ke-4

c_i	a_{ij}			
0	0			
$\frac{25 + \sqrt{449}}{48}$	$\frac{25 + \sqrt{449}}{48}$	0		
$\frac{25 - \sqrt{449}}{48}$	$-\frac{53}{528}(25 - \sqrt{449})$	$\frac{4(25 - \sqrt{449})}{33}$	0	
$\frac{5}{24}$	$-\frac{4745}{264}$	$\frac{4(25 - \sqrt{449})}{11}$	$\frac{4(25 + \sqrt{449})}{11}$	0
$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Selanjutnya, menyubstitusikan nilai parameter $a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, c_2, c_3, c_4, b_{-1}, b_1, b_2, b_3$, dan b_4 ke dalam Persamaan (3) dan (4). sehingga rumus *Improved Runge-Kutta* order keempat, menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4) - h(-b_{-1}k_{-1} + b_2k_{-2} + b_3k_{-3} + b_4k_{-4}), \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{1}{8}k_4\right) - h\left(\frac{1}{8}k_{-1} + \frac{3}{8}k_{-2} + \frac{3}{8}k_{-3} + \frac{1}{8}k_{-4}\right) \quad (9)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) - \frac{h}{8}(k_{-1} + 3k_{-2} + 3k_{-3} + k_{-4}) \quad (10)$$

dimana,

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_{-1} = f(t_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{25 + \sqrt{449}}{48}h, y_n + h\frac{25 + \sqrt{449}}{48}k_1\right),$$

$$k_{-2} = f\left(t_{n-1} + \frac{25 + \sqrt{449}}{48}h, y_{n-1} + h\frac{25 + \sqrt{449}}{48}k_{-1}\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{25 - \sqrt{449}}{48}h, y_n + h\left(-\frac{53}{528}(25 - \sqrt{449})k_1 + \frac{4(25 - \sqrt{449})}{33}k_2\right)\right),$$

$$k_{-3} = f\left(t_{n-1} + \frac{25 - \sqrt{449}}{48}h, y_{n-1} + h\left(-\frac{53}{528}(25 - \sqrt{449})k_{-1} + \frac{4(25 - \sqrt{449})}{33}k_{-2}\right)\right),$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= f\left(t_n + \frac{5}{24}h, y_n + h\left(-\frac{4745}{264}k_1 + \frac{4(25 - \sqrt{449})}{11}k_2 + \frac{4(25 + \sqrt{449})}{11}k_3\right)\right), \\
k_{-4} &= f\left(t_{n-1} + \frac{5}{24}h, y_{n-1} + h\left(-\frac{4745}{264}k_{-1} + \frac{4(25 - \sqrt{449})}{11}k_{-2} + \frac{4(25 + \sqrt{449})}{11}k_{-3}\right)\right),
\end{aligned} \tag{11}$$

2.3. Rata-rata Harmonik

Rata-rata harmonik adalah nilai rata-rata yang diperoleh dengan membagi jumlah data dengan jumlah kebalikan dari setiap data [24]. Rata-rata harmonik untuk dua variabel yang setara x_1 dan x_2 dapat ditulis:

$$H = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \tag{12}$$

Galat berhubungan dengan seberapa dekat solusi hampiran (aproksimasi) terhadap solusi sejatinya (solusi eksak). Semakin kecil galat yang dihasilkan, maka semakin akurat dan teliti solusi numerik yang didapatkan [25]. Galat mutlak dapat dituliskan sebagai berikut,

$$|\varepsilon| = |a - \hat{a}|. \tag{13}$$

Galat mutlak maksimum, yaitu:

$$\max|\varepsilon| = \max_{1 \leq i \leq N} |a_i - \hat{a}_i|. \tag{14}$$

2.4. Analisis Stabilitas

Analisis stabilitas akan menentukan apakah solusi numerik akan tetap mendekati solusi eksak seiring bertambahnya iterasi [27]. Biasanya, untuk mengetahui wilayah stabilitas dari suatu metode numerik, yaitu dengan menggunakan persamaan diferensial berikut [26]:

$$y' = \lambda y, \tag{15}$$

dimana λ adalah bilangan kompleks. Dengan ukuran Langkah h konstan, sehingga menghasilkan persamaan diferensial linier. Karakteristik polynomial dari persamaan diferensial ini disebut dengan stabilitas polynomial dan himpunan semua real $\bar{h}$ disebut interval stabilitas. Wilayah stabilitas metode adalah himpunan nilai-nilai $\bar{h} \in \mathbb{C}$ sehingga semua akar dari stabilitas polynomial berada dalam lingkaran satuan. Wilayah stabilitas dari metode *Runge-Kutta* didefinisikan sebagai $\{\bar{x} \in \mathbb{C} : |R(\bar{h})| \leq 1$ [27].

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Metode *Improved Runge-Kutta* Order Keempat Berdasarkan Rata-rata Harmonik

Bentuk umum *Improved Runge-Kutta* (IRK) orde ke-4 dari Persamaan (10) adalah:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) - \frac{h}{8}(k_{-1} + 3k_{-2} + 3k_{-3} + k_{-4})$$

Berdasarkan Persamaan (10) dapat dibentuk persamaan baru yang mengandung unsur rata-rata aritmatik sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1}{2} + \frac{3k_2}{2} + \frac{3k_3}{2} + \frac{k_4}{2}\right) - \frac{h}{4}\left(\frac{k_{-1}}{2} + \frac{3k_{-2}}{2} + \frac{3k_{-3}}{2} + \frac{k_{-4}}{2}\right) \tag{16}$$

Persamaan (16) dapat disederhanakan menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} \left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2} \right) - \frac{h}{4} \left(\frac{k_{-1} + k_{-2}}{2} + \frac{k_{-2} + k_{-3}}{2} + \frac{k_{-2} + k_{-3}}{2} + \frac{k_{-3} + k_{-4}}{2} \right) \quad (17)$$

Persamaan (17) merupakan persamaan *Improved Runge-Kutta* order keempat berdasarkan rata-rata aritmatik. Persamaan umum rata-rata harmonik (12):

$$H = \frac{2k_i k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}},$$

dengan $i = 1, 2, 3$. Kemudian substitusi Persamaan (12) ke Persamaan (17) sehingga didapat:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2h}{4} \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4} \right) - \frac{2h}{4} \left(\frac{k_{-1} k_{-2}}{k_{-1} + k_{-2}} + \frac{k_{-2} k_{-3}}{k_{-2} + k_{-3}} + \frac{k_{-2} k_{-3}}{k_{-2} + k_{-3}} + \frac{k_{-3} k_{-4}}{k_{-3} + k_{-4}} \right), \quad (18)$$

Persamaan (18) dapat disederhanakan menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + 2 \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4} \right) - \frac{h}{2} \left(\frac{k_{-1} k_{-2}}{k_{-1} + k_{-2}} + 2 \frac{k_{-2} k_{-3}}{k_{-2} + k_{-3}} + \frac{k_{-3} k_{-4}}{k_{-3} + k_{-4}} \right), \quad (19)$$

dengan fungsi evaluasi pada Persamaan (4) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_{-1} &= f(t_{n-1}, y_{n-1}), \\ k_2 &= f(t_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1), \\ k_{-2} &= f(t_{n-1} + c_2 h, y_{n-1} + h a_{21} k_{-1}), \\ k_3 &= f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)), \\ k_{-3} &= f(t_{n-1} + c_3 h, y_{n-1} + h(a_{31} k_{-1} + a_{32} k_{-2})), \\ k_4 &= f(t_n + c_4 h, y_n + h(a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{43} k_3)), \\ k_{-4} &= f(t_{n-1} + c_4 h, y_{n-1} + h(a_{41} k_{-1} + a_{42} k_{-2} + a_{43} k_{-3})), \end{aligned}$$

Persamaan (19) dikenal sebagai modifikasi metode *Improved Runge-Kutta* orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik (IRKH4). Berbeda dengan *Improved Runge-Kutta* orde-4 yang menggunakan kombinasi linier berbobot dari nilai fungsi pada setiap tahap, IRKH4 mengombinasikan nilai evaluasi tahap melalui rata-rata harmonik. Selanjutnya, dengan:

$$\begin{aligned} c_2 &= a_{21} \\ c_3 &= a_{31} + a_{32} \\ c_4 &= a_{41} + a_{42} + a_{43} \end{aligned}$$

Nilai dari $a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}$ diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan nilai $k_1, k_{-1}, k_2, k_{-2}, k_3, k_{-3}, k_4$, dan k_{-4} . Jabarkan nilai $k_1, k_{-1}, k_2, k_{-2}, k_3, k_{-3}, k_4$, dan k_{-4} kedalam bentuk deret Taylor, sehingga akan diperoleh Persamaan (7). Persamaan (7) akan disubstitusikan ke Persamaan (19) dan untuk menghindari adanya pembagian dua polynomial, maka Persamaan (19) dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} \quad (20)$$

Selanjutnya membandingkan metode yang telah termodifikasi atau Persamaan (20) dengan deret Taylor pada Persamaan (6) sehingga diperoleh:

$$y_n + \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} = y_n + \text{Taylor},$$

atau,

$$\text{pembilang} = \text{Taylor} \times \text{penyebut}, \quad (21)$$

dengan,

$$\begin{aligned}
\text{pembilang} &= \frac{h}{2} \{ (k_1 k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + 2(k_2 k_3)(k_1 + k_2)(k_3 + k_4) \\
&\quad + (k_3 k_4)(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) \} \\
&\quad - \frac{h}{2} \{ (k_{-1} k_{-2})(k_{-2} + k_{-3})(k_{-3} + k_{-4}) \\
&\quad + 2(k_{-2} k_{-3})(k_{-1} + k_{-2})(k_{-3} + k_{-4}) + (k_{-3} k_{-4})(k_{-1} + k_{-2})(k_{-2} + k_{-3}) \} \\
\text{penyebut} &= ((k_1 + k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_4)) - ((k_{-1} + k_{-2})(k_{-2} + k_{-3})(k_{-3} + k_{-4}))
\end{aligned}$$

Selanjutnya Substitusi nilai $k_1, k_2, k_3, k_4, k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, k_{-4}$ yang telah diperoleh pada Persamaan (7) ke dalam Persamaan (21) dengan memperhatikan h^n dengan $n \leq 4$ dan untuk penyederhanaan aljabar dipilih $c_3 = a_{31} + a_{32}$, dan $c_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43}$. dengan mengambil nilai $a_{21} = \frac{25+\sqrt{449}}{48}$, $c_3 = \frac{25-\sqrt{449}}{48}$, $c_4 = \frac{5}{24}$, sehingga, dihasilkan untuk nilai parameter $a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}$, dan a_{43} adalah sebagai berikut:

$$a_{31} = \frac{25-\sqrt{449}}{96}, a_{32} = \frac{25-\sqrt{449}}{96}, a_{41} = \frac{5}{96}, a_{42} = \frac{5}{48}, \text{ dan } a_{43} = \frac{5}{96}.$$

Substitusikan semua nilai parameter yang telah diperoleh ke dalam Persamaan (4) sehingga diperoleh metode *Improved Runge-Kutta* Order keempat berdasarkan rata-rata harmonik yang ditulis:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + 2 \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4} \right) - \frac{h}{2} \left(\frac{k_{-1} k_{-2}}{k_{-1} + k_{-2}} + 2 \frac{k_{-2} k_{-3}}{k_{-2} + k_{-3}} + \frac{k_{-3} k_{-4}}{k_{-3} + k_{-4}} \right),$$

dengan

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n), \\
k_{-1} &= f(t_{n-1}, y_{n-1}), \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{25 + \sqrt{449}}{48} h, y_n + h \frac{25 + \sqrt{449}}{48} k_1\right), \\
k_{-2} &= f\left(t_{n-1} + \frac{25 + \sqrt{449}}{48} h, y_{n-1} + h \frac{25 + \sqrt{449}}{48} k_{-1}\right), \\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{25 - \sqrt{449}}{48} h, y_n + h \left(\frac{25 - \sqrt{449}}{96} k_1 + \frac{25 - \sqrt{449}}{96} k_2 \right)\right), \\
k_{-3} &= f\left(t_{n-1} + \frac{25 - \sqrt{449}}{48} h, y_{n-1} + h \left(\frac{25 - \sqrt{449}}{96} k_{-1} + \frac{25 - \sqrt{449}}{96} k_{-2} \right)\right), \\
k_4 &= f\left(t_n + \frac{5}{24} h, y_n + h \left(\frac{5}{96} k_1 + \frac{5}{48} k_2 + \frac{5}{96} k_3 \right)\right), \\
k_{-4} &= f\left(t_{n-1} + \frac{5}{24} h, y_{n-1} + h \left(\frac{5}{96} k_{-1} + \frac{5}{48} k_{-2} + \frac{5}{96} k_{-3} \right)\right),
\end{aligned} \tag{22}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1}$$

Persamaan (1) adalah deret fourier. Rumus yang tidak dirujuk ditulis seperti biasa

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

3.2. Analisis Stabilitas

Untuk menganalisis kestabilan metode IRKH4, digunakan persamaan uji linear scalar [28]:

$$y' = \lambda y, \text{ dengan } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Selanjutnya, didefinisikan $z = h\lambda$, dengan $h > 0$ menyatakan ukuran langkah. Pada persamaan uji tersebut, setiap evaluasi tahap menjadi proporsional terhadap solusi numerik. Oleh karena itu, fungsi tahap pada metode IRKH4 yang diusulkan dapat dituliskan sebagai,

$$l_i = \lambda y_n \phi_i(z), \quad z = h\lambda, \text{ dengan } z \in \mathbb{C}$$

dengan $\phi_i(z)$ menyatakan faktor penguatan tahap pada setiap tahap. Dengan mensubstitusikan persamaan uji ke dalam formulasi IRKH4, diperoleh relasi rekurensi numerik dalam bentuk

$$y_{n+1} = R(z)y_n,$$

dengan $R(z)$ disebut sebagai fungsi kestabilan dari metode tersebut.

Menggunakan deret Taylor dan mempertahankan suku hingga order keempat, diperoleh pendekatan fungsi kestabilan sebagai berikut:

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + O(z^5).$$

Karena metode IRKH4 yang diusulkan menggunakan kombinasi tahap berbasis *harmonic mean*, maka fungsi kestabilan yang dihasilkan berbentuk fungsi rasional yang secara umum dapat dituliskan sebagai

$$R(z) = \frac{1 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3}{1 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4}.$$

Daerah kestabilan absolut dari metode didefinisikan sebagai,

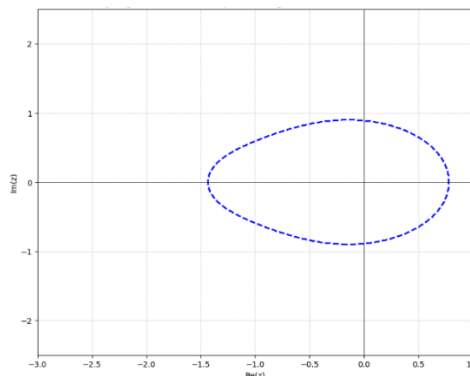
$$S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}.$$

Daerah kestabilan tersebut dievaluasi secara numerik dengan meninjau nilai-nilai z yang memenuhi kondisi di atas. Karena derajat polinom pembilang lebih tinggi dibandingkan derajat polinom penyebut, maka diperoleh

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} R(z) = 0.$$

Dengan demikian, metode IRKH4 yang diusulkan tidak bersifat *A-stable* maupun *L-stable*. Daerah kestabilannya terutama terkonsentrasi pada sebagian terbatas dari sumbu real negatif, yang menunjukkan bahwa metode ini bersifat stabil bersyarat (*conditionally stable*). Oleh karena itu, pemilihan ukuran langkah harus dilakukan secara hati-hati ketika menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier kaku. Untuk masalah kaku dengan nilai eigen negatif yang besar, penggunaan ukuran langkah yang terlalu besar dapat menyebabkan $z = h\lambda$ berada di luar daerah kestabilan sehingga menimbulkan ketidakstabilan numerik.

Berikut adalah wilayah stabilitas dari metode IRKH4 pada **Gambar 1**.



Gambar 1. Wilayah stabilitas metode IRKH4

Gambar 1. menunjukkan bahwa daerah kestabilan metode IRKH4 yang diusulkan terutama berada di sepanjang sumbu real negatif. Perilaku ini konsisten dengan banyak metode tipe *Runge-Kutta* eksplisit yang diterapkan pada persamaan diferensial kaku. Meskipun modifikasi rata-rata harmonik meningkatkan akurasi numerik, metode ini tetap memiliki daerah kestabilan yang terbatas. Oleh sebab itu, kestabilan metode sangat bergantung pada pemilihan ukuran langkah. Untuk nilai h yang cukup kecil, solusi numerik tetap stabil dan akurat. Namun, ketika h terlalu besar, nilai $z = h\lambda$ dapat keluar dari daerah kestabilan sehingga menyebabkan penguatan galat numerik dan akhirnya menimbulkan ketidakstabilan. Dengan demikian, solusi numerik yang dihasilkan oleh metode IRKH4 hanya berada dalam kondisi stabil pada interval (z) tertentu yang termasuk dalam daerah kestabilan absolutnya, pada interval terbatas (z) , yaitu untuk $h\lambda \in [-1.4, 0.8]$.

3.3. Simulasi Numerik

Penyelesaian persamaan diferensial nonlinier dengan menggunakan Metode *Improved Runge-Kutta* orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik (IRKH4), IRK4, RK4, dan RKH4.

Contoh 1 Persamaan diferensial kaku nonlinier relaksasi [21]

$$y' = x'(t) - 30(y - x) - 75(y - x)^3, \text{ dengan, } x(t) = 1 + 0.25\sin(t) + e^{-2t}$$

Contoh 2 Persamaan kaku nonlinier eksponensial/rasional [27].

$$y' = x'(t) - 45(y - x) - 90(y - x)^3, \text{ dengan, } x(t) = \frac{1}{1+t} + 0.2\cos(2t)$$

Contoh 3 Persamaan diferensial kaku nonlinier paksa [29].

$$y' = x'(t) - 60(y - x) - 120(y - x)^3, \text{ dengan, } x(t) = \sqrt{1+t} + 0.15e^{-t}$$

Penyelesaian:

Contoh 1, 2, dan 3 diselesaikan dengan menggunakan *python* secara metode IRKH4, IRK4, RK4, dan RKH4, dengan $h = 0.01$, dan $h = 0.001$, $t_0 = 0$ dan $y_0 = 1$. Perbandingan error dari 3 contoh disajikan dalam tabel 3 dan tabel 4

Tabel 3. Perbandingan galat mutlak maksimum pada $h = 0.01$

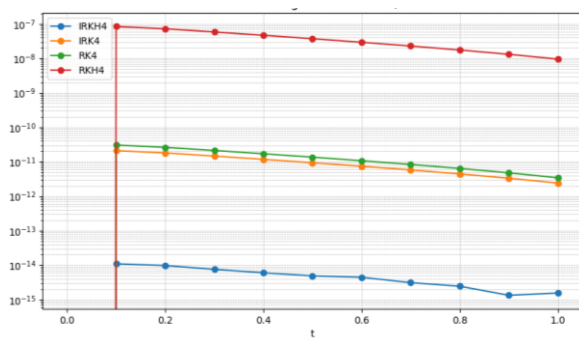
Contoh	Metode	Galat Mutlak Maksimum	Rerata Galat Maksimum	Error akhir di $t = 1$
1	IRKH4	1.185319e-09	5.073695e-10	1.417897e-10
	IRK4	2.411813e-07	1.026840e-07	2.784755e-08
	RK4	3.504227e-07	1.487224e-07	3.960727e-08
	RKH4	8.177332e-06	3.451029e-06	9.276965e-07
2	IRKH4	1.066823e-09	4.063203e-10	6.212679e-10
	IRK4	1.443836e-07	5.915823e-08	9.632095e-08
	RK4	2.052580e-07	8.769947e-08	1.474576e-07
	RKH4	2.032148e-06	8.568248e-07	1.403315e-06
3	IRKH4	2.505880e-10	1.325194e-10	9.665424e-11
	IRK4	2.816593e-08	1.507712e-08	1.114298e-08
	RK4	4.157686e-08	2.239904e-08	1.666829e-08
	RKH4	1.963428e-07	1.057883e-07	7.866526e-08

Tabel 4. Perbandingan galat mutlak maksimum pada $h = 0.001$

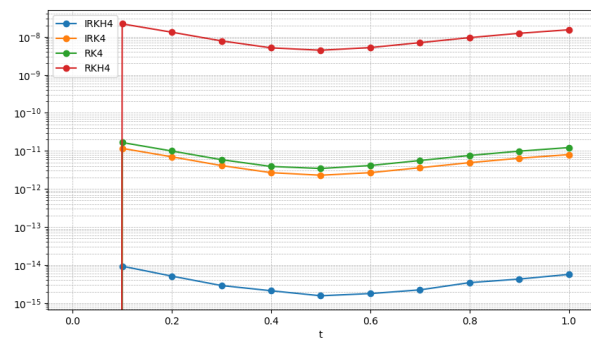
Contoh	Metode	Galat Mutlak Maksimum	Rerata Galat Maksimum	Error akhir di $t = 1$
1	IRKH4	1.088019e-14	4.703308e-15	1.554312e-15
	IRK4	2.098632e-11	8.928333e-12	2.410294e-12

Contoh	Metode	Galat Mutlak Maksimum	Rerata Galat Maksimum	Error akhir di $t = 1$
2	RK4	3.052092e-11	1.294401e-11	3.433476e-12
	RKH4	8.427054e-08	3.560962e-08	9.554009e-09
	IRKH4	9.325873e-15	3.487110e-15	5.662137e-15
	IRK4	1.165290e-11	4.848157e-12	7.989998e-12
	RK4	1.660161e-11	7.193655e-12	1.221800e-11
3	RKH4	2.183359e-08	9.241523e-09	1.526840e-08
	IRKH4	2.442491e-15	1.271710e-15	2.220446e-16
	IRK4	2.161826e-12	1.160950e-12	8.613110e-13
	RK4	3.194556e-12	1.725690e-12	1.287859e-12
	RKH4	2.324550e-09	1.252111e-09	9.311836e-10

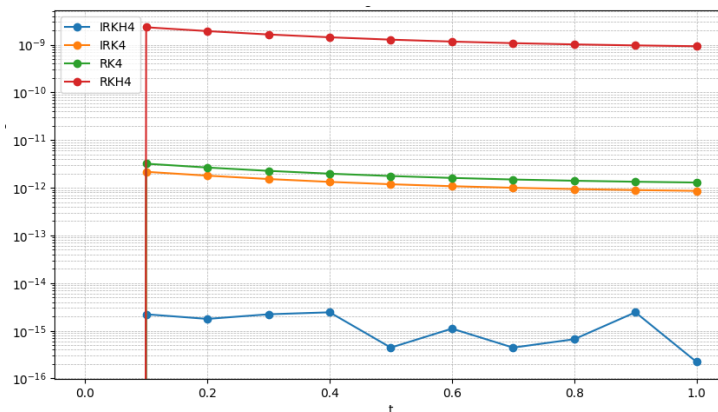
Berikut adalah hasil grafik perbandingan error dari metode IRKH4, IRK4, RK4, dan RKH4, dengan ukuran langkah $h = 0.001$ untuk contoh soal 1, 2, dan 3:



(a)



(b)



(c)

Gambar 2. Grafik perbandingan galat mutlak maksimum dari metode IRKH4, IRK4, RK4, dan RKH4 dengan $h = 0.001$ untuk (a) Contoh 1 (b) Contoh 2 (c) Contoh 3

Berdasarkan **Tabel 3**, **Tabel 4** dan **Gambar 2**, menunjukkan bahwa metode IRKH4 secara konsisten menghasilkan galat mutlak maksimum paling kecil pada seluruh uji yang digunakan. Pada ukuran langkah $h = 0.01$ sebagaimana ditunjukkan pada tabel 3 metode IRKH4 menghasilkan galat mutlak maksimum paling kecil dibandingkan metode lainnya pada seluruh contoh pengujian. Pada Contoh 1, metode IRKH4 menghasilkan galat mutlak maksimum sebesar 1.185319×10^{-9} , sedangkan metode IRK4 dan RK4 masing-masing menghasilkan galat sebesar 2.411813×10^{-7} dan 3.504227×10^{-7} . Sementara itu, metode RKH4 menghasilkan galat sebesar 8.177332×10^{-6} . Perbedaan ini menunjukkan bahwa metode IRKH4 memiliki kemampuan pengendalian galat yang lebih baik dibandingkan metode

lainnya. Hasil serupa juga terlihat pada Contoh 2 dan Contoh 3. Pada Contoh 2, metode IRKH4 menghasilkan galat mutlak maksimum sebesar 1.066823×10^{-9} , sedangkan metode IRK4 dan RK4 menghasilkan galat masing-masing sebesar 1.443836×10^{-7} dan 2.052580×10^{-7} . Metode RKH4 menghasilkan galat sebesar 2.032148×10^{-6} . Pada Contoh 4.3, metode IRKH4 tetap memberikan hasil terbaik dengan galat mutlak maksimum sebesar 2.505880×10^{-10} , sedangkan metode IRK4, RK4, dan RKH4 menghasilkan galat yang lebih besar.

Pada ukuran langkah yang lebih kecil, yaitu $h = 0.001$ sebagaimana disajikan pada **Tabel 4**, seluruh metode mengalami peningkatan akurasi yang cukup signifikan. Namun demikian, metode IRKH4 tetap menunjukkan performa terbaik. Pada Contoh 1, galat mutlak maksimum metode IRKH4 menurun drastis dari 10^{-9} menjadi 10^{-14} . Penurunan yang sangat signifikan ini menunjukkan bahwa metode IRKH4 sangat sensitif terhadap perubahan ukuran langkah dan mampu memanfaatkan diskretisasi yang lebih halus untuk menghasilkan solusi yang sangat mendekati solusi eksak. Hal yang sama juga terjadi pada Contoh 2 dan Contoh 3. Metode IRKH4 menghasilkan galat mutlak maksimum masing-masing sebesar 9.325873×10^{-15} dan 2.442491×10^{-15} . Nilai tersebut jauh lebih kecil dibandingkan metode IRK4, RK4, maupun RKH4.

Berdasarkan **Gambar 2**, terlihat bahwa seluruh metode memiliki pola perubahan galat yang relatif serupa pada setiap contoh pengujian, yaitu galat mengalami perubahan yang cukup signifikan pada tahap awal interval waktu, kemudian cenderung stabil hingga akhir interval. Kondisi ini menunjukkan bahwa pengaruh kekakuan (*stiffness*) sistem lebih dominan pada fase awal perhitungan sehingga akumulasi galat terjadi lebih besar pada tahap tersebut. Grafik juga memperlihatkan bahwa metode IRKH4 secara konsisten menghasilkan kurva galat paling rendah dibandingkan metode lainnya pada seluruh interval waktu. Pada ketiga contoh, galat metode IRKH4 berada pada order 10^{-14} hingga 10^{-15} , sedangkan metode IRK4 dan RK4 berada pada order 10^{-11} hingga 10^{-12} . Sementara itu, metode RKH4 menghasilkan galat pada order 10^{-8} hingga 10^{-9} . Perbedaan order galat tersebut menunjukkan bahwa metode IRKH4 memiliki akurasi yang jauh lebih baik dibandingkan metode IRK4, RK4, maupun RKH4 dalam menyelesaikan persamaan diferensial kaku nonlinier.

Berdasarkan hasil pengujian dan pembahasan yang telah dilakukan, metode IRKH4 menunjukkan performa terbaik dibandingkan metode IRK4, RK4, dan RKH4, dalam menyelesaikan persamaan diferensial kaku nonlinier. Metode IRKH4 secara konsisten menghasilkan galat yang paling kecil dan memiliki kestabilan numerik yang lebih baik pada seluruh contoh pengujian. Selain itu, penggunaan ukuran langkah yang lebih kecil meningkatkan akurasi semua metode, namun IRKH4 tetap memberikan hasil yang paling akurat dan stabil. Dengan demikian, metode IRKH4 efektif digunakan sebagai alternatif metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial kaku nonlinier.

4. Kesimpulan

Hasil analisis kestabilan pada metode IRKH4 bersifat stabil bersyarat (*conditionally stable*). Daerah kestabilannya berada pada sebagian sumbu real negatif, yaitu untuk $h\lambda \in [-1.4, 0.8]$. sehingga kestabilan metode sangat dipengaruhi oleh pemilihan ukuran langkah (*step size*). Pada ukuran langkah ($h = 0.01$), galat mutlak maksimum IRKH 4 masing-masing pada ketiga kasus pengujian sebesar 295,64 kali, 192,40 kali, dan 165,92 kali, atau mengalami penurunan galat sebesar 99,66%, 99,48%, dan 99,40%. Hasil tersebut menunjukkan bahwa integrasi rata-rata harmonik pada bentuk umum dan fungsi evaluasi tahap IRK4 dapat meningkatkan akurasi tanpa mengubah formulasi dasar metode. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan formulasi IRKH4 dalam bentuk implisit untuk memperoleh daerah kestabilan yang lebih luas dan meningkatkan kemampuan dalam menangani permasalahan *stiff*.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, masukan, dan bimbingan selama proses penelitian ini. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada pihak-pihak yang telah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung sehingga penelitian ini dapat dikerjakan dan diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] P. Tandel, H. Patel, and T. Patel, "Tsunami wave propagation model: A fractional approach," *Journal of Ocean Engineering and Science*, vol. 7, no. 6, pp. 509–520, Dec. 2022, doi: [10.1016/j.joes.2021.10.004](https://doi.org/10.1016/j.joes.2021.10.004).
- [2] M. J. Berger and R. J. LeVeque, "Implicit Adaptive Mesh Refinement for Dispersive Tsunami Propagation," Mar. 2024, doi: [10.1137/23M1585210](https://doi.org/10.1137/23M1585210).
- [3] K. Pakoksung, A. Suppasri, A. Muhari, Syamsidik, and F. Imamura, "Global optimization of a numerical two-layer model using observed data: a case study of the 2018 Sunda Strait tsunami," Dec. 01, 2020, *Springer Science and Business Media Deutschland GmbH*. doi: [10.1186/s40562-020-00165-5](https://doi.org/10.1186/s40562-020-00165-5).
- [4] V. L. Makarov and D. V. Dragunov, "An efficient approach for solving stiff nonlinear boundary value problems," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 345, pp. 452–470, Jan. 2019, doi: [10.48550/arXiv.1601.04272](https://doi.org/10.48550/arXiv.1601.04272).
- [5] M. Ahsan, W. Lei, M. Bohner, and A. A. Khan, "A high-order multi-resolution wavelet method for nonlinear systems of differential equations," *Math. Comput. Simul.*, vol. 215, pp. 543–559, 2024, doi: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.08.032>.
- [6] P. Lata Sharma and A. Kumar, "Review Paper on the Runge-Kutta Methods To Study Numerical Solutions of Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations." [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/362591935> [Accessed: 1 September 2025]
- [7] R. Resmawan, B. M. Rosyda, and R. P. Handayani, "Komparasi Skema Numerik Euler, Runge-Kutta dan Adam-Basforth-Moulton untuk Menyelesaikan Solusi Persamaan Osilator Harmonik," *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, vol. 11, no. 2, pp. 282–292, Dec. 2023, doi: [10.37905/euler.v11i2.22420](https://doi.org/10.37905/euler.v11i2.22420).
- [8] D. K. Zhang, "An explicit 16-stage Runge–Kutta method of order 10 discovered by numerical search," *Numer. Algorithms*, vol. 96, no. 3, pp. 1243–1267, 2024, doi: [10.1007/s11075-024-01783-2](https://doi.org/10.1007/s11075-024-01783-2).
- [9] Y. Brika Enkekes and L. Mardianto, "Metode Runge-Kutta Orde 4 Dalam Penyelesaian Persamaan Gelombang 1D Syarat Batas Dirichlet," *Original Article Indonesian Journal of Applied Mathematics*, vol. 2, no. 1, pp. 1–8, 2022, [Online]. Available: <https://journal.itera.ac.id/index.php/indojam/>
- [10] B. Baron, J. Kolanska-Pluska, M. Łukaniszyn, D. Spalek, and T. Kraszewski, "Solution of nonlinear stiff differential equations for a three-phase no-load transformer using a Runge-Kutta implicit method," *Archives of Electrical Engineering*, vol. 71, no. 4, pp. 1081–1106, 2022, doi: [10.24425/aee.2022.142126](https://doi.org/10.24425/aee.2022.142126).

- [11] M. Dr and K. Mary Jansirani, “Jamshida-Composite Runge-Kutta Method Fourth Order For Based On Variety Of Means By Using Intuitionistic Fuzzy Differential Equations-Palarch’s,” 2020. Doi: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v32i1.1>
- [12] P. M. Khudhur, J. Ö. Sigurjónsson, and D. Maghdid, “Modification of the Fourth Order Runge Kutta Method Based on the Contra Harmonic Average,” *Interval: Indonesian Journal of Mathematical Education*, vol. 3, no. 1, pp. 69–81, May 2025, doi: [10.37251/ijome.v3i1.1588](https://doi.org/10.37251/ijome.v3i1.1588)
- [13] F. Rabiei and F. Ismail, “Third-Order Improved Runge-Kutta Method for Solving Ordinary Differential Equation,” *International Journal of Applied Physics and Mathematics*, vol. 1, no. 3, 2011. [10.7763/IJAPM.2011.V1.37](https://doi.org/10.7763/IJAPM.2011.V1.37)
- [14] F. Rabiei and F. Ismail, “Fourth order 4-stages improved Runge-Kutta method with minimized error norm,” in *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics Inc., 2014, pp. 153–158. doi: [10.1063/1.4894341](https://doi.org/10.1063/1.4894341).
- [15] K. A. Hussain, F. Ismail, N. Senu, and F. Rabiei, “Fourth-order improved runge-kutta method for directly solving special third-order ordinary differential equations,” *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.*, vol. 41, no. 2, pp. 429–437, Jun. 2017, doi: [10.1007/s40995-017-0258-1](https://doi.org/10.1007/s40995-017-0258-1).
- [16] K. A. Hussain and W. J. Hasan, “Improved Runge-Kutta Method for Oscillatory Problem Solution Using Trigonometric Fitting Approach,” *Ibn AL-Haitham Journal For Pure and Applied Sciences*, vol. 36, no. 1, pp. 345–354, Jan. 2023, doi: [10.30526/36.1.2963](https://doi.org/10.30526/36.1.2963).
- [17] Y. M. Rangkuti and A. Huda, “Accuracy of Fifth-Order Improved Runge-Kutta Method for Handling Hyperchaotics Finance Systems,” in *Journal of Physics: Conference Series*, Institute of Physics Publishing, Mar. 2020. doi: [10.1088/1742-6596/1462/1/012025](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1462/1/012025).
- [18] Murugesan, K., D. Paul Dhayabaran, E.C. Henry Amirtharaj, and David J. Evans. 2001. “A Comparison of Extended Runge-Kutta Formulae Based on Variety of Means to Solve System of Ivps.” *International Journal of Computer Mathematics* 78 (2): 225–52. doi:[10.1080/00207160108805108](https://doi.org/10.1080/00207160108805108).
- [19] R. Meher, “Textbook on Ordinary Differential Equations: A Theoretical Approach,” 2023. [Online]. Available: www.riverpublishers.com [Accessed: 1 September 2025].
- [20] D. G. Zill, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 9th ed. Cengage Learning, 2018.
- [21] E. Hairer and G. Wanner, “Examples of Stiff Equations,” in *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, E. Hairer and G. Wanner, Eds., Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1996, pp. 2–14. doi: [10.1007/978-3-642-05221-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-05221-7).
- [22] S. Conte and C. de Boor, *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. 2017. doi: [10.1137/1.9781611975208](https://doi.org/10.1137/1.9781611975208).
- [23] F. Rabiei, F. Ismail, and M. Suleiman, “Improved Runge-Kutta Methods for Solving Ordinary Differential Equations,” 2013.

<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16933730>

- [24] K. Nam, “On a Mixed Arithmetic-Mean, Geometric-Mean, Harmonic-Mean Inequality,” Jun. 2025, doi: [10.14445/22315373/IJMTT-V69I5P507](https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V69I5P507).
- [25] R. Munir, *Metode Numerik*. Bandung: Informatika, 2021.
- [26] R. L. Burden and D. J. Faires, *Numerical Analysis*, 9th ed. USA: Cengage Learning, 2015.
- [27] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. England: John Wiley & Sons. Ltd, 2016.
- [28] Sand, Jorgen dan Oserby, Ole. *Region of Absolute Stability*. Denmark: Aarhus University. 1979.
- [29] E. Süli and D. F. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.