J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 10, No. 1 (2026), pp. 111–120.
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN: 2581-0154
DOI: doi.org/10.26740/jram.v10n1.p111-120

DIMENSI METRIK BIDANG PADA GRAF *DOUBLE FAN*

Deddy Rahmadi*

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sunan Kalijaga, Yogyakarta, Indonesia

*Penulis Korespondensi: deddy.rahmadi@uin-suka.ac.id

ABSTRAK

Dimensi metrik bidang (*face metric dimension*) merupakan parameter baru dalam teori graf yang bertujuan untuk membedakan setiap pasangan bidang pada graf planar berdasarkan jarak ke himpunan simpul tertentu. Parameter ini diperkenalkan untuk memberikan perspektif tambahan dalam analisis struktural graf, khususnya pada graf planar yang memiliki pembagian wilayah (bidang). Penelitian ini memfokuskan pada graf *double fan*, yaitu graf planar yang dibentuk dari penggabungan *null graph* order 2 dengan graf lintasan. Dengan memanfaatkan pendekatan algoritmik dan pemrograman *Python*, penelitian ini menentukan himpunan pembeda bidang terkecil (*face-resolving set*) dan menghitung nilai dimensi metrik bidang dari graf *double fan*. Hasil yang diperoleh menunjukkan pola nilai dimensi metrik bidang terhadap jumlah simpul graf, yaitu $fmd(f_{2,n})$ adalah $\lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$.
Kata kunci: graf planar, bidang, himpunan pembeda, dimensi metrik bidang, graf double fan.

ABSTRACT

The face metric dimension is a newly introduced resolvability parameter in graph theory, aimed at distinguishing every pair of faces in a planar graph based on their distances to a specific set of vertices. This parameter offers an additional perspective for structural analysis, particularly in planar graphs that form distinct regions (faces) when embedded in the plane. This study focuses on the double fan graph, a planar graph constructed by connecting null graph order 2 to a path graph. Using algorithmic approaches and Python programming, this research determines the smallest face-resolving set and calculates the face metric dimension of double fan graphs for various graph orders. The results reveal a pattern in the growth of the face metric dimension relative to the number of vertices, so $fmd(f_{2,n})$ *is* $\lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$.
Keywords*: planar graph, face, resolving set, face metric dimension, double fan.*

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang matematika yang mempelajari graf, yaitu struktur matematis yang digunakan untuk memodelkan hubungan pasangan antara objek-objek. Sebuah graf terdiri dari simpul (*vertices*) sebagai simpul, dan sisi (*edges*) sebagai penghubung antar objek. Kerangka ini banyak digunakan dalam berbagai bidang seperti ilmu komputer, biologi, kimia, dan lainnya. Sebagai contoh, dalam jaringan, simpul dapat merepresentasikan entitas seperti individu atau kota, sementara sisi menggambarkan relasi seperti pertemanan atau jalan penghubung.

Dengan menganalisis struktur dan sifat graf, dapat diketahui cara menyelesaikan berbagai permasalahan, seperti pencarian rute terpendek, optimasi komunitas, dan sistem molekuler dalam kimia. Salah satu teori penting dalam teori graf adalah dimensi metrik, yaitu ukuran

2020 Mathematics Subject Classification: 05C12, 05C76.
Diterima: 13-11-2025, direvisi: 19-04-2026, dimuat: 01-05-2026.

seberapa baik setiap simpul dalam graf dapat dikenali secara tunggal berdasarkan jaraknya terhadap himpunan simpul tertentu, yang kemudian disebut sebagai himpunan pembeda (*resolving set*). Konsep ini diperluas pada dimensi metrik sisi (*edge metric dimension*), di mana himpunan simpul dipilih sedemikian rupa sehingga setiap sisi dalam graf dapat dikenali secara unik berdasarkan jarak dari simpul-simpul tersebut ke ujung-ujung sisi yang bersangkutan [1].

Dalam konteks teori graf, ide tentang himpunan pembeda muncul dari kebutuhan untuk membedakan setiap simpul dalam graf secara unik berdasarkan vektor jaraknya ke himpunan simpul tertentu. Sebuah **himpunan pembeda** untuk graf G adalah himpunan $S \subseteq V(G)$ yang menjamin bahwa setiap simpul dalam G dapat dikenali secara tunggal berdasarkan vektor jaraknya ke anggota-anggota S. Himpunan pembeda terkecil disebut **basis metrik**, dan banyaknya anggota dalam basis tersebut disebut sebagai **dimensi metrik** dari graf [2].

Sejarah konsep dimensi metrik dapat ditelusuri kembali ke penelitian Slater pada tahun 1975 [3], yang pertama kali memperkenalkan gagasan ini dalam konteks analisis unit pengenal pada jaringan komunikasi. Secara independen dan hampir bersamaan, Harary dan Melter juga mengembangkan ide serupa dengan istilah dimensi metrik, namun dengan fokus pada sifat-sifat matematis dan aplikasinya [4]. Seiring waktu, kajian tentang dimensi metrik berkembang pesat, dan konsep ini telah digunakan dalam berbagai bidang seperti perancangan jaringan, navigasi robot, hingga bioinformatika. Salah satu varian dari konsep ini adalah dimensi metrik sisi (*edge metric dimension*), di mana yang dibedakan adalah sisi-sisi dalam graf, bukan simpul-simpulnya. Varian ini memperluas cakupan pendekatan dimensi metrik untuk menjawab permasalahan yang lebih spesifik, seperti pelacakan infrastruktur atau analisis senyawa kimia [5]. Konsep-konsep ini sangat bermanfaat terutama dalam bidang-bidang yang menuntut kemampuan membedakan komponen struktural secara akurat demi keperluan optimasi maupun klasifikasi.

Dalam teori graf, konsep bidang (*face*) memiliki peranan penting dalam memahami sifat struktural dari graf planar. Bidang merepresentasikan daerah atau wilayah yang dibatasi oleh sisi-sisi graf saat graf tersebut digambar di bidang tanpa saling berpotongan. Studi resolvabilitas dalam graf bertujuan untuk mengidentifikasi elemen-elemen yang berbeda berdasarkan jarak dalam struktur graf. Salah satu parameter yang banyak diteliti adalah **dimensi metrik**—jumlah minimum simpul yang diperlukan untuk membedakan setiap pasangan simpul lainnya berdasarkan vektor jarak. Dalam pengembangan konsep tersebut, diperkenalkan suatu parameter baru yang dikhususkan untuk graf planar, yaitu dimensi metrik bidang (*face metric dimension*) [6].

Dimensi metrik bidang merupakan ukuran minimum dari himpunan simpul $R \subseteq V(G)$ sehingga setiap pasangan bidang yang berbeda $f_1, f_2 \in F(G)$ dapat dibedakan berdasarkan jaraknya ke setidaknya satu simpul di R. Jarak antara bidang dan simpul didefinisikan sebagai jarak minimum dari simpul tersebut ke simpul-simpul pembentuk bidang. Himpunan R yang memiliki kemampuan membedakan semua pasangan bidang dalam graf disebut sebagai himpunan pembeda bidang, dan ukuran terkecil dari himpunan tersebut dinotasikan sebagai $\text{fmd}(G)$ dari graf G [6]. Hingga saat ini, konsep dimensi metrik dalam graf yang pertama kali diperkenalkan oleh [4] dan [3] telah berkembang menjadi berbagai variasi yang bertujuan untuk memperkaya kemampuan representasi dan pembedaan struktur graf. Beberapa variasi tersebut antara lain dimensi metrik sisi yang mengidentifikasi sisi graf [5], dimensi metrik lokal yang hanya mempertimbangkan pasangan titik bertetangga [7], serta dimensi k-metrik yang memperkuat konsep resolvabilitas dengan melibatkan lebih dari satu pembeda [8]. Selain itu, pengembangan terbaru juga memperkenalkan parameter baru seperti dimensi metrik berbasis bidang (*face metric dimension*) yang memperluas konsep resolvabilitas pada representasi graf planar [6]. Kajian komprehensif mengenai dimensi metrik dan aplikasinya juga telah dirangkum dalam survei oleh [9].

Berbagai penelitian telah dilakukan untuk menentukan nilai dimensi metrik dan variasinya pada kelas graf tertentu. Misalnya, dimensi metrik kuat pada graf *wheel* telah dikaji oleh [10], sedangkan dimensi metrik lokal pada beberapa graf khusus seperti *dipyramidal graph* dan *generalized fan* diteliti dalam [11, 12]. Selanjutnya, dimensi k-metrik pada graf tertentu seperti *barbell graph* dan double fan graph telah dianalisis oleh [13, 14], termasuk pengembangannya dalam bentuk mixed metric dimension [15]. Penelitian lain juga mencakup dimensi metrik pada graf hasil operasi seperti join dan corona [16, 17], serta pada berbagai struktur graf khusus seperti *wheel*, *complete multipartite*, produk graf, dan graf jaringan tertentu [18, 19, 20, 21, 22, 23]. Selain itu, studi lebih lanjut juga mengkaji variasi lanjutan seperti doubly metric dimension pada graf kaktus dan *block graph* [24]. Keseluruhan hasil tersebut menunjukkan bahwa kajian dimensi metrik dan variannya masih menjadi topik yang aktif dan terus berkembang dalam teori graf.

Penelitian ini secara khusus mengkaji dimensi metrik bidang pada graf *double fan*, yaitu graf yang diperoleh dari operasi *join* antara graf *null* berorde dua dan graf lintasan. Meskipun berbagai variasi dimensi metrik telah banyak diteliti pada beragam kelas graf, kajian mengenai dimensi metrik berbasis bidang, khususnya pada graf *double fan*, masih sangat terbatas. Oleh karena itu, penelitian ini menawarkan kebaruan dengan mengkaji resolvabilitas berbasis bidang pada struktur graf planar tersebut serta menentukan kardinalitas minimum himpunan pembeda bidangnya.

Analisis dilakukan dengan pendekatan eksperimental menggunakan bahasa pemrograman *Python* untuk menghitung jarak antar simpul, mengidentifikasi himpunan bidang, serta membangun representasi pembeda yang sesuai. Pendekatan ini tidak hanya memberikan verifikasi komputasional terhadap hasil teoretis, tetapi juga membuka kemungkinan eksplorasi lebih lanjut pada graf planar lainnya. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memperluas kajian dimensi metrik, khususnya dalam konteks resolvabilitas berbasis bidang, serta memberikan kontribusi potensial dalam aplikasi seperti analisis jaringan dan optimasi berbasis struktur graf planar.

2. Tinjauan Pustaka

Dimensi metrik merupakan konsep penting dalam teori graf yang berkaitan dengan identifikasi posisi simpul secara tunggal melalui jarak ke himpunan pembeda. Perkembangan konsep ini mengarah pada dimensi metrik bidang, yang secara khusus diterapkan pada graf planar dengan mempertimbangkan jarak antara simpul dan bidang-bidang graf. Berikut diberikan beberapa definisi untuk membahas dimensi metrik bidang.

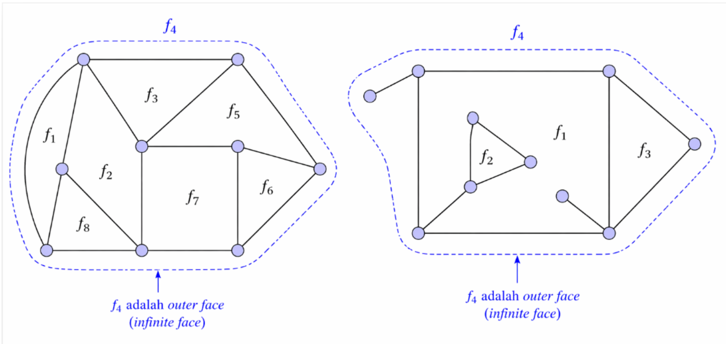
Definisi 2.1. *Sebuah graf planar adalah graf $G = (V, E)$ yang dapat digambar pada bidang tanpa ada sisi-sisi yang saling bersilangan, kecuali pada simpul ujungnya.*

Graf planar adalah graf yang dapat digambar pada suatu bidang tanpa adanya dua sisi yang saling berpotongan, kecuali pada titik ujungnya. Graf siklik C_n juga merupakan contoh graf planar, karena dapat digambar sebagai poligon sederhana di bidang tanpa adanya perpotongan sisi. Pada graf ini, terdapat tepat dua face, yaitu satu face interior yang dibatasi oleh siklus, dan satu *outer face* yang tidak terbatas.

Definisi 2.2. *Misalkan G adalah graf planar terhubung dengan himpunan simpul $V(G)$, sisi $E(G)$, dan bidang $F(G)$. Sebuah bidang dalam graf planar adalah sebuah daerah terhubung yang dibatasi oleh sisi-sisi graf. Ini termasuk:*

- *bidang luar (daerah tak terbatas yang mengelilingi keseluruhan graf),*
- *bidang dalam (daerah-daerah yang dibentuk oleh sisi dan simpul graf dan dikelilingi oleh sisi-sisinya).*

Apabila G merupakan graf planar, maka sebarang penggambaran bidang dari G membagi himpunan titik-titik pada bidang yang tidak terletak pada G menjadi beberapa wilayah yang disebut sebagai **muka** (*faces*). Sebagai contoh, graf-graf bidang pada Gambar 1 kiri dan kanan berturut-turut memiliki delapan muka dan empat muka. Perlu diperhatikan bahwa dalam setiap kasus, muka f_4 bersifat tidak terbatas, yang kemudian disebut sebagai **muka tak hingga** (*infinite face*).



Gambar 1. Contoh Graf Planar dengan *Infinite Face*

Definisi 2.3. *Jarak antara sebuah bidang $f \in F(G)$ dan simpul $v \in V(G)$, dinotasikan $d(f, v)$, didefinisikan sebagai:*

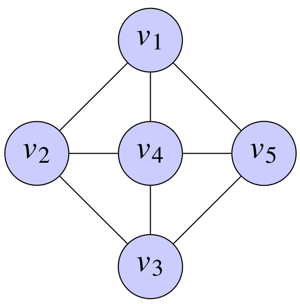
$$d(f, v) = \min\{d(u, v) \mid u \in V(f)\},$$

di mana $V(f)$ adalah himpunan simpul yang membentuk batas bidang f, dan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara simpul u dan v pada graf G.

Definisi 2.4. *Himpunan $R \subseteq V(G)$ disebut himpunan penyelesai bidang jika untuk setiap pasangan bidang berbeda $f_1, f_2 \in F(G)$, terdapat setidaknya satu simpul $r \in R$ sehingga jarak $d(f_1, r)$ dan $d(f_2, r)$ berbeda.*

Definisi 2.5. *Dimensi metrik bidang dari G, dinotasikan $fmd(G)$, adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda bidang $R \subseteq V(G)$.*

Berikut diberikan contoh untuk menentukan dimensi metrik bidang pada suatu graf. Misalkan $R = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah himpunan simpul pada Gambar 2 dan terdapat 5 bidang. Terlihat bahwa representasi semua bidang terhadap R bersifat tunggal. Maka, R adalah himpunan penyelesai bidang dengan kardinalitas 3. Himpunan dengan kardinalitas 1 atau 2 tidak memberikan representasi yang berbeda, sehingga kardinalitas 3 adalah minimum. Oleh karena itu, dimensi metrik bidang dari graf G adalah 3.



Gambar 2. Graf G

3. Hasil dan Pembahasan

Graf *double fan* yang dinotasikan $f_{2,n}$ adalah graf yang diperoleh dari operasi *join* antara graf *null* berorde dua dan graf lintasan dengan n simpul. Graf *null* sendiri adalah graf yang tidak memiliki sisi (edge), sehingga semua simpulnya saling tidak bertetangga. Dengan demikian, graf *double fan* $f_{2,n}$ memiliki $n + 2$ simpul.

Berikut diberikan tabel jarak setiap dua simpul dan bidang dengan simpul pada graf *double fan* yang disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Jarak setiap dua simpul berbeda pada graf $f_{2,n}$

Jarak	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	v_4	$\ldots$	v_n
u_1	0	2	1	1	1	1	$\ldots$	1
u_2	2	0	1	1	1	1	$\ldots$	1
v_1	1	1	0	1	2	2	$\ldots$	2
v_2	1	1	1	0	1	2	$\ldots$	2
v_3	1	1	2	1	0	1	$\ldots$	2
v_4	1	1	2	2	1	0	$\ldots$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	1	1	2	2	2	0	$\ldots$	0

Berikut diberikan lemma dan teorema mengenai dimensi metrik bidang pada graf *double fan*.

Lemma 3.1. *Jika S adalah sebarang himpunan pembeda bidang dari graf double fan, maka* $|S| \geq \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$.

BUKTI. Graf *double fan* $f_{2,n}$ memiliki $n+2$ simpul. Andaikan $|S| < \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$, diperoleh $\binom{n+2}{|S|}$ kemungkinan nilai S. Diketahui $V_a = \{v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n\}$ dan $V_b = \{u_1, u_2\}$. Didefinisikan $S_a = S \cap V_a$ dan $S_b = S \cap V_b$. Karena $|S_a| + |S_b| < \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$, maka terdapat $u, v \in V_a$ yang tidak ada di S. Hal ini bertentangan dengan pernyataan bahwa S adalah himpunan pembeda bidang, sehingga S bukan himpunan pembeda bidang. Oleh karena itu, $|S| \geq \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$.

■

Teorema 3.1. *Misalkan $f_{2,n}$ adalah graf double fan dengan $n \geq 3$, maka* $fmd(f_{2,n}) = \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$.

BUKTI. Diketahui graf *double fan* memiliki $n + 2$ simpul dan $3n - 1$ sisi, kemudian berdasarkan ilustrasi, bisa diketahui bahwa jumlah bidang dari graf *double fan* secara umum adalah $2n - 1$. Dengan demikian menggunakan persamaan *euler* $F + V - E = 2$, diperoleh

$$2n - 1 + n + 2 - (3n - 1) = 2n + n - 3n - 1 + 2 + 1 = 2.$$

Oleh karena itu, diperoleh bahwa graf *double fan* adalah graf planar. Selanjutnya, pembuktian dimensi metrik bidang akan dibagi menjadi tiga kasus.

1. Untuk $n \equiv 0 \ (mod\ 3)$.
   Dipilih $S = \{u_1, u_2, v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{12}, ..., v_{n-2}\}$, diperoleh representasi bidang terhadap simpul sebagai berikut.

$$r(f_1|S) = (0, 0, 0, 1, 1, \ldots, 1);$$
$$r(f_2|S) = (0, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1);$$

$$r(f_3|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,0);$$
$$r(f_4|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,0,0);$$
$$r(f_5|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,0,1);$$
$$r(f_6|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,1);$$
$$r(f_7|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,1);$$
$$r(f_8|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,1);$$
$$r(f_9|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,1);$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$r(f_{2n-3}|S) = (1,0,1,1,1,\ldots,1,1);$$
$$r(f_{2n-2}|S) = (1,0,1,1,1,\ldots,0,0);$$
$$r(f_{2n-1}|S) = (1,0,1,1,1,\ldots,1,1);$$

2. Untuk $n \equiv 1(\ mod\ 3)$. Dipilih $S = \{u_1, v_1, v_2, v_5, v_8, v_{10}, ..., v_{n-2}\}$, diperoleh representasi bidang terhadap simpul sebagai berikut.

$$r(f_1|S) = (0,0,1,1,1,\ldots,1);$$
$$r(f_2|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1);$$
$$r(f_3|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,0);$$
$$r(f_4|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,0,0);$$
$$r(f_5|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,0,1);$$
$$r(f_6|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,1);$$
$$r(f_7|S) = (0,1,1,1,0,0,\ldots,1);$$
$$r(f_8|S) = (0,1,1,1,0,1,\ldots,1);$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$r(f_{2n-3}|S) = (1,1,1,1,\ldots,0,0);$$
$$r(f_{2n-2}|S) = (1,1,1,1,\ldots,1,0);$$
$$r(f_{2n-1}|S) = (1,1,1,1,\ldots,1,1);$$

3. Untuk $n \equiv 2(\ mod\ 3)$.
Dipilih $S = \{u_1, u_2, v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{11}, v_{14}, ..., v_{n-2}\}$, diperoleh representasi bidang terhadap simpul sebagai berikut.

$$r(f_1|S) = (0,0,1,1,1,\ldots,1,1);$$
$$r(f_2|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,1);$$
$$r(f_3|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,0);$$
$$r(f_4|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,0,0);$$
$$r(f_5|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,0,1);$$
$$r(f_6|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,1);$$
$$r(f_7|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,0,0,1,1);$$
$$r(f_8|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,0,1,1,1);$$
$$r(f_9|S) = (0,1,1,1,1,\ldots,1,1,1,1);$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$r(f_{25}|S) = (1, 0, 1, 1, 1, \ldots, 0, 0);$$
$$r(f_{26}|S) = (1, 0, 1, 1, 1, \ldots, 1, 0);$$
$$r(f_{27}|S) = (1, 0, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1).$$

Diperoleh bahwa setiap metrik representasi berbeda, dengan demikian S adalah himpunan pembeda bidang, jadi $S \leq \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$. Berdasarkan Lemma 3.1, adalah himpunan pembeda bidang dengan kardinalitas minimum dan dimensi metrik bidang dari graf *double fan* adalah $\lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$. ■

4. Algoritma dan Kompleksitas Algoritma Dimensi Metrik Bidang

Untuk memahami alur kerja program yang digunakan dalam perhitungan dimensi metrik dan dimensi metrik bidang pada graf *double fan*, diperlukan representasi algoritmik dalam bentuk pseudocode. Bagian ini menyajikan pseudocode dari program yang mencakup konstruksi graf, visualisasi, perhitungan dimensi metrik, perhitungan dimensi metrik bidang, serta memeriksa sifat planar dan validasi rumus Euler pada graf *double fan*.

Permasalahan *dimensi metrik (Metric Dimension Problem)* pada graf merupakan salah satu persoalan penting dalam teori graf yang tergolong *NP-hard*. Secara umum, dimensi metrik didefinisikan sebagai kardinalitas dari himpunan simpul terkecil yang dapat membedakan setiap pasangan simpul berdasarkan jarak terpendeknya. Himpunan ini disebut *resolving set*, sedangkan elemen-elemennya disebut *landmarks*. Meskipun telah ditemukan algoritma dengan kompleksitas linear untuk kelas graf tertentu seperti graf pohon, permasalahan ini tetap sulit diselesaikan secara umum, bahkan tidak dapat diaproksimasi secara efisien kecuali *P=NP*. Sejumlah penelitian lanjutan menunjukkan bahwa permasalahan ini tetap *NP-complete* untuk graf planar, serta *APX-hard* untuk graf dengan derajat terbatas maupun graf padat. Oleh karena itu, pendekatan komputasional berbasis enumerasi dan validasi jarak digunakan dalam penelitian ini untuk menghitung dan menganalisis nilai *dimensi metrik* serta *dimensi metrik bidang* pada graf *double fan*.

5. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah dianalisis dimensi metrik bidang pada graf *double fan*. Berdasarkan hasil yang diperoleh, dimensi metrik bidang graf $f_{2,n}$ adalah $\lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$. Hasil ini memberikan kontribusi baru karena, sejauh pengetahuan penulis, belum terdapat kajian sebelumnya yang secara khusus membahas dimensi metrik berbasis bidang pada graf *double fan*. Selain itu, penelitian ini juga mengusulkan suatu algoritma komputasional untuk menentukan dimensi metrik bidang pada graf planar. Algoritma ini bekerja dengan menghitung jarak antar simpul, mengonstruksi himpunan face, serta mengidentifikasi himpunan pembeda bidang minimum secara sistematis. Dengan demikian, kontribusi penelitian ini tidak hanya bersifat teoretis melalui perolehan formula eksplisit, tetapi juga metodologis melalui penyediaan pendekatan algoritmik yang dapat diimplementasikan dan diperluas pada kelas graf planar lainnya.

Algoritma 1 Program Penentuan Dimensi Metrik Bidang

HT

```
Start program
Prompt user to input number of vertices for a path graph
Create path graph with that number of vertices
Perform full join between the path graph and an empty graph with 2 nodes → G1
Set double_fan_graph = G1
# Jarak Antar Simpul
for each pair of nodes (v, w) in double_fan_graph do
    Compute shortest path length between v and w
    Store distance in a table
end for
# Dimensi Metrik Bidang
try
Check if graph is planar
if graph is not planar then
    Raise error
end if
Get planar embedding
Traverse and collect all unique faces (with cyclic normalization)
for r = 1 to number of nodes do
    for each combination R of r nodes do
        for each face do
            Compute vector of distances from each node in R to the face (minimum to any vertex
            in face)
        end for
        if all face distance vectors are unique then
            Set face_resolving_set = R
            Set fmd = r
            break
        end if
    end for
    if face_resolving_set found then
        break
    end if
end for
Display face metric dimension and face resolving set
except not planar
Display error
# Rincian Bidang
try
Get and display all faces (sorted)
except error
Display error
# Statistik Akhir
Display:
     Number of vertices (V)
     Number of edges (E)
     Number of faces (F)
     Euler's formula: V − E + F
End program
```

Daftar Pustaka

[1] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, vol. 2. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.

[2] M. Azeem, "Cycle-super magic labeling of polyomino linear and zig-zag chains," *Journal of Operations Intelligence*, vol. 1, no. 1, pp. 67–81, 2023.

[3] P. J. Slater, "Leaves of trees," *Congressus Numerantium*, vol. 14, pp. 549–559, 1975.

[4] F. Harary and R. A. Melter, "On the metric dimension of a graph," *Ars Combinatoria*, vol. 2, pp. 191–195, 1976.

[5] A. Kelenc, N. Tratnik, and I. G. Yero, "Uniquely identifying the edges of a graph: the edge metric dimension," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 251, pp. 204–220, 2018.

[6] S. Ali and M. K. Jamil, "A novel resolvability parameter: Face metric dimension and its applications," *Open Journal of Discrete Applied Mathematics*, 2025. Received: 02 January 2025; Accepted: 20 March 2025; Published: 28 March 2025.

[7] F. Okamoto, B. Phinezy, and P. Zhang, "The local metric dimension of a graph," *Mathematica Bohemica*, pp. 239–255, 2010.

[8] A. Estrada-Moreno, J. Rodriguez-Velazquez, and I. Yero, "The k-metric dimension of a graph," *Applied Mathematics and Information Sciences*, pp. 2829–2840, 2015.

[9] R. Tillquist, R. Frongillo, and M. Lladser, "Getting the lay of the land in discrete space, a survey of metric dimension and its applications," *SIAM Review*, pp. 1–29, 2021.

[10] T. Kusmayadi, S. Kuntari, D. Rahmadi, and F. Lathifah, "On the strong metric dimension of some related wheel graph," *Far East Journal of Mathematical Sciences*, pp. 1325–1334, 2016.

[11] J. Pratama and T. Kusmayadi, "On the local metric dimension of dipyramidal graph and king graph," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 2326, p. 020018, 2021.

[12] R. Sholekhah and T. Kusmayadi, "On the local metric dimension of t-fold wheel, $p_n \odot k_m$, and generalized fan," *Indonesian Journal of Combinatorics*, pp. 88–96, 2018.

[13] E. Setyawan and T. Kusmayadi, "On the k-metric dimension of a barbell graph and a t-fold wheel graph," in *Proceedings of the SEMANTIK Conference of Mathematics Education (SEMANTIK 2019)*, pp. 23–26, 2019.

[14] D. Rahmadi and Y. Susanti, "The k-metric dimension of double fan graph," *Quadratic: Journal of Innovation and Technology in Mathematics and Mathematics Education*, pp. 31–35, 2022.

[15] D. Rahmadi, "Mixed metric dimension of double fan graph," *Jurnal Diferensial*, pp. 52–56, 2024.

[16] B. Rawat and P. Pradhan, "Metric dimension of some graphs under join operation," *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, pp. 3331–3348, 2017.

[17] V. Karthick, I. M. Kassim, and D. J. Francis, "A metric dimension computation of corona graph," *International Journal of All Research Education and Scientific Methods (IJARESM)*, pp. 563–566, 2022.

[18] B. Shanmukha, B. Sooryanarayana, and K. S. Harinath, "Metric dimension of wheels," *Far East Journal of Applied Mathematics*, pp. 217–229, 2002.

[19] S. Saputro, E. Baskoro, A. Salman, and D. Suprijanto, "The metric dimension of a complete n-partite graphs and its cartesian product with a path," *J. Combin. Math. Comb. Comput.*, vol. 71, pp. 283–293, 2009.

[20] S. Saputro, R. Simanjuntak, S. Uttunggadewa, H. Assiyatun, E. Baskoro, A. Salman, and M. Baca, "The metric dimension of the lexicographic product of graphs," *Discrete Mathematics*, vol. 313, no. 9, pp. 1045–1051, 2013.

[21] L. Yulianti, A. Putri, B. Rudianto, Yanita, and D. Welyyanti, "On the metric dimension of the triangle-net graph," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 2920, p. 040002, Feb. 2024.

[22] L. Yulianti, D. Welyyanti, Yanita, M. Fajri, and S. Saputro, "On the metric dimension of buckminsterfullerene-net graph," *Indonesian Journal of Combinatorics*, pp. 63–72, 2023.

[23] R. Silalahi and Mulyono, "Metric dimensions and partition dimensions of a multiple fan graph," *Formosa Journal of Science and Technology*, pp. 81–88, 2023.

[24] K. Nie and K. Xu, "The doubly metric dimensions of cactus graphs and block graphs," *Journal of Combinatorial Optimization*, 2024.