



ANALISIS STABILITAS SISTEM VAN DER POL MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE 4

MUHAMMAD IMAM AL PAQIH¹, ALDIYANSYAH², RIO SATRIYANTARA^{3*}

^{1,2,3}Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan IPA, Universitas Mataram

* riosatriyantara@staff.unram.ac.id

ABSTRAK

Studi ini mengkaji stabilitas sistem nonlinear Van der Pol, yang dimodelkan oleh persamaan $\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$, menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde 4 (RK-4). Tujuan utama penelitian ini adalah untuk menganalisis secara sistematis stabilitas titik ekuilibrium di $(0, 0)$ dan evolusi karakteristik siklus batas sebagai fungsi dari parameter nonlinearitas μ . Dengan menerapkan metode RK-4 untuk berbagai nilai μ dan kondisi awal, temuan utama mengonfirmasi bahwa titik ekuilibrium selalu tidak stabil untuk $\mu > 0$. Analisis stabilitas linear menunjukkan adanya transisi dari fokus tak stabil pada rentang $0 < \mu < 2$ menjadi simpul tak stabil untuk $\mu \geq 2$. Lebih lanjut, studi ini memvisualisasikan keberadaan siklus batas stabil yang berfungsi sebagai attractor bagi semua trayektori. Bentuk siklus batas ini berevolusi dari osilasi yang mendekati sinusoidal untuk μ kecil menjadi osilasi relaksasi yang tajam untuk μ besar. Hasil ini menunjukkan bahwa metode RK-4 merupakan alat yang akurat dan andal untuk menangkap dinamika kompleks sistem serta memberikan validasi kuantitatif bagi teori stabilitas yang ada.

Kata kunci: Sistem Van der Pol, Analisis Stabilitas, Metode Runge-Kutta, Siklus Batas, Osilasi Relaksasi

ABSTRACT

This study examines the stability of the Van der Pol nonlinear system, modeled by the equation $\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$, using the 4th-order Runge-Kutta (RK-4) numerical method. The main objective is to systematically analyze the stability of the equilibrium point at $(0, 0)$ and the evolution of the limit cycle's characteristics as a function of the nonlinearity parameter μ . By applying the RK-4 method for various values of μ and initial conditions, the primary findings confirm that the equilibrium point is always unstable for $\mu > 0$. Linear stability analysis reveals a transition from an unstable focus in the range $0 < \mu < 2$ to an unstable node for $\mu \geq 2$. Furthermore, this study visualizes the existence of a stable limit cycle that serves as an attractor for all trajectories. The shape of this limit cycle evolves from a nearly sinusoidal oscillation for small μ to a sharp relaxation oscillation for large μ . These results demonstrate that the RK-4 method is a precise and reliable tool for capturing the system's complex dynamics and provides quantitative validation for existing stability theory.

Keywords: Van der Pol System, Stability Analysis, Runge-Kutta Method, Limit Cycle, Relaxation Oscillation.

2020 Mathematics Subject Classification:

Diterima: 16-07-25, direvisi: 28-09-25, diterima: 26-10-25.

1 Pendahuluan

Sistem dinamik nonlinear merupakan landasan konseptual untuk memahami dan memodelkan berbagai fenomena kompleks di alam dan rekayasa [1]. Di antara jajaran model yang ada, Osilator Van der Pol menempati posisi yang ikonik dan fundamental. Persamaan ini pertama kali dirumuskan oleh fisikawan Belanda, Balthasar van der Pol, pada tahun 1920-an saat meneliti osilasi pada sirkuit tabung vakum. Hasilnya adalah sebuah model matematis yang secara elegan menangkap esensi dari osilasi mandiri (self-sustained oscillations). Pengaruh model ini meluas jauh melampaui bidang asalnya di elektronika. Saat ini, paradigma Van der Pol menjadi fondasi untuk memodelkan fenomena mutakhir, mulai dari sinkronisasi dalam sistem kuantum dan dinamika polariton di fisika material [2], hingga aplikasi biomedis yang krusial seperti pemodelan ritme jantung (ECG) dan investigasi osilasi saraf pada penyakit Parkinson [3].

Analisis stabilitas adalah pilar utama dalam memahami perilaku jangka panjang sistem dinamik, dan untuk Osilator Van der Pol, analisis ini berpusat pada kestabilan titik ekuilibrium di titik asal $(0, 0)$ dan atraktor siklus batas (limit cycle) yang unik. Perilaku sistem berubah secara drastis bergantung pada nilai parameter nonlinearitas μ . Untuk $\mu = 0$, sistem tereduksi menjadi osilator harmonik linier. Ketika $\mu > 0$, titik ekuilibrium $(0, 0)$ menjadi tidak stabil, dan semua trayektori, terlepas dari kondisi awal, akan konvergen menuju sebuah siklus batas yang stabil. Karakteristik osilasi ini sangat bergantung pada besarnya μ : untuk nilai yang kecil ($0 < \mu \ll 1$), osilasi mendekati sinusoidal (osilasi lemah), sedangkan untuk nilai yang besar ($\mu \gg 1$), osilasi menjadi sangat non-sinusoidal dan dikenal sebagai osilasi relaksasi (relaxation oscillations), yang ditandai dengan pelepasan energi yang lambat diikuti oleh perubahan yang sangat cepat. Studi kontemporer terus mengeksplorasi stabilitas dan bifurkasi sistem ini, sering kali membandingkan pendekatan analitis dengan simulasi numerik presisi tinggi [4]. Pemahaman mendalam tentang stabilitas fundamental ini juga menjadi dasar untuk menganalisis dinamika yang lebih kaya pada sistem Van der Pol yang diperluas, seperti yang ditemukan dalam model dengan umpan balik tunda waktu atau dalam jaringan osilator terkopel [5].

Meskipun perilaku kualitatif sistem Van der Pol telah dipelajari secara ekstensif menggunakan pendekatan analitis aproksimatif seperti metode perturbasi yang umumnya hanya akurat untuk nilai μ yang kecil [6] terdapat kebutuhan berkelanjutan untuk validasi numerik yang sistematis dan berketelitian tinggi. Urgensi penelitian ini terletak pada penyediaan tolok ukur komputasi yang jelas dan andal. Metode Runge-Kutta orde 4 (RK-4) dipilih karena dikenal luas akan akurasi, stabilitas, dan efisiensinya, serta sering digunakan sebagai standar emas untuk memvalidasi pendekatan analitis atau numerik lainnya [7]. Kebaruan yang ditawarkan dalam penelitian ini bukanlah penemuan metode baru, melainkan demonstrasi kuantitatif yang sistematis mengenai transisi kanonis dari osilasi lemah ke osilasi relaksasi yang kuat. Penelitian ini juga menyajikan verifikasi visual yang tegas mengenai konvergensi global trayektori menuju siklus batas dari berbagai kondisi awal, yang secara kolektif berfungsi sebagai validasi numerik yang solid bagi teori yang telah mapan dan sebagai referensi pedagogis yang penting.

Dari perspektif yang diberikan di atas, artikel ini bertujuan untuk melakukan analisis kestabilan yang sistematis pada sistem Van der Pol dengan memanfaatkan kekuatan komputasi metode RK-4. Analisis akan difokuskan pada investigasi bagaimana kestabilan titik ekuilibrium di titik asal dan karakteristik siklus batas (bentuk, amplitudo, dan periode) berevolusi seiring dengan perubahan parameter nonlinearitas μ . Melalui visualisasi ruang fasa dan deret waktu yang dihasilkan secara numerik, penelitian ini akan mendemonstrasikan secara kuantitatif bagaimana metode RK-4 dapat secara akurat menangkap transisi perilaku sistem dari osilasi harmonik lemah ke osilasi relaksasi yang kuat, serta memverifikasi kestabilan atraktor siklus batasnya.

Berdasarkan perspektif di atas, artikel ini bertujuan untuk menyajikan analisis kestabilan yang sistematis pada sistem Van der Pol dengan memanfaatkan kekuatan dan keandalan komputasi metode RK-4. Analisis akan difokuskan pada investigasi kuantitatif tentang bagaimana kestabilan

titik ekuilibrium di titik asal $(0, 0)$ dan karakteristik siklus batas (bentuk, amplitudo, dan periode) berevolusi seiring dengan perubahan parameter nonlinearitas μ . Melalui visualisasi ruang fasa dan deret waktu yang dihasilkan secara numerik, penelitian ini akan menyediakan tolok ukur kuantitatif dan visual yang akurat mengenai transisi perilaku sistem dari osilasi harmonik lemah ke osilasi relaksasi yang kuat, serta memberikan validasi numerik yang jelas mengenai sifat atraktor global dari siklus batasnya.

2 Tinjauan Pustaka

2.1 Persamaan Diferensial Van der Pol

Persamaan diferensial Van der Pol orde kedua diberikan oleh [8]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

dimana x adalah variabel posisi (atau perpindahan) dan $\mu \geq 0$ adalah parameter skalar yang menunjukkan tingkat nonlinearitas dan redaman. Untuk $\mu > 0$, suku tengah merepresentasikan redaman nonlinear dan bersifat positif (peredaman) untuk $|x| > 1$ dan negatif (pembangkitan energi) untuk $|x| < 1$.

Untuk analisis menggunakan metode numerik seperti RK-4, persamaan orde kedua (1) diubah menjadi sistem dua persamaan diferensial orde pertama. Dengan mendefinisikan $y = \frac{dx}{dt}$, kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \mu(1 - x^2)y - x. \end{aligned} \quad (2)$$

Sistem (2) akan menjadi dasar implementasi numerik pada artikel ini.

2.2 Konsep Stabilitas

2.2.1 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium (atau titik tetap) dari sistem (2) adalah solusi (x^*, y^*) dimana $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ [9]. Untuk sistem Van der Pol, dengan mensubstitusi kondisi ini ke dalam persamaan, kita dapatkan $y^* = 0$ dan $-x^* = 0$, sehingga satu-satunya titik ekuilibrium adalah $(0, 0)$ [10].

2.2.2 Analisis Kestabilan Linear

Kestabilan lokal dari titik ekuilibrium dapat dianalisis dengan melakukan linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan tersebut. Matriks Jacoby J dari sistem (2) adalah [11]

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{dx}{dt}) & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{dx}{dt}) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\frac{dy}{dt}) & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{dy}{dt}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu xy - 1 & \mu(1 - x^2) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Evaluasi pada titik ekuilibrium $(0, 0)$ menghasilkan

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Nilai eigen (λ) dari $J_{(0,0)}$ diberikan oleh persamaan karakteristik $|J_{(0,0)} - \lambda I| = 0$, dengan I adalah matriks identitas

$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0. \quad (5)$$

Solusi dari persamaan (5) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}. \quad (6)$$

Kestabilan titik ekuilibrium $(0, 0)$ bergantung pada nilai μ sebagai berikut.

- Jika $\mu < 0$ maka Titik asal adalah stabil (fokus stabil jika $\mu^2 - 4 < 0$, atau simpul stabil jika $\mu^2 - 4 \geq 0$). Kasus ini jarang dibahas untuk Van der Pol klasik karena osilator Van der Pol umumnya digunakan untuk memodelkan osilasi yang dipertahankan sendiri, yang membutuhkan $\mu > 0$ untuk redaman negatif efektif di sekitar titik asal.
- Jika $\mu = 0$ maka persamaan menjadi osilator harmonik linier $\ddot{x} + x = 0$. Titik asal adalah pusat, dan nilai eigen adalah $\lambda = \pm i$.
- Jika $0 < \mu < 2$ maka $\lambda_{1,2}$ adalah kompleks konjugat dengan bagian real positif ($\text{Re}(\lambda) = \mu/2 > 0$). Titik asal adalah fokus tak stabil.
- Jika $\mu \geq 2$ maka $\lambda_{1,2}$ adalah real dan positif (untuk $\mu > 2$) atau real positif ganda (untuk $\mu = 2$). Titik asal adalah simpul tak stabil.

Dengan demikian, untuk $\mu > 0$, titik ekuilibrium $(0, 0)$ selalu tidak stabil.

2.2.3 Siklus Batas (*Limit Cycle*)

Untuk $\mu > 0$, sistem Van der Pol diketahui memiliki siklus batas yang stabil. Siklus batas adalah trajektori periodik tertutup di ruang fasa dimana solusi lain di sekitarnya akan konvergen menuju siklus tersebut seiring waktu $t \rightarrow \infty$. Bentuk dan ukuran siklus batas ini bergantung pada nilai μ .

2.3 Metode Runge-Kutta Orde 4 (RK4)

Metode RK4 adalah metode iteratif untuk mengaproksimasi solusi dari sistem PDB bentuk $\frac{dY}{dt} = f(t, Y)$ dengan kondisi awal $Y(t_0) = Y_0$. Untuk satu langkah dari t_n ke $t_{n+1} = t_n + h$, dimana h adalah ukuran langkah, aproksimasi Y_{n+1} dihitung sebagai [12]

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

dimana

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, Y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, Y_n + hk_3). \end{aligned} \quad (8)$$

Untuk sistem Van der Pol, vektor keadaan $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dan fungsi $f(t, Y, \mu) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \mu(1 - x^2)y - x \end{pmatrix}$.

2.4 Implementasi Numerik

Metode RK4 seperti yang dijelaskan dalam Persamaan (7) diimplementasikan untuk menyelesaikan sistem Van der Pol (2). Fungsi $f(t, Y, \mu)$ untuk sistem Van der Pol, dengan [13]:

$$\begin{aligned} f_1(t, x, y, \mu) &= y, \\ f_2(t, x, y, \mu) &= \mu(1 - x^2)y - x. \end{aligned} \quad (9)$$

Implementasi dilakukan menggunakan Python versi 3.11 dengan pustaka NumPy untuk operasi numerik dan Matplotlib untuk visualisasi.

2.5 Parameter Simulasi

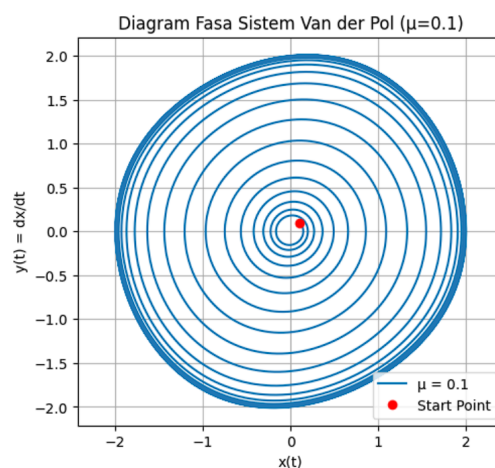
Simulasi numerik dilakukan dengan parameter sebagai berikut.

- Parameter nonlinearitas μ divariasikan dengan nilai $\mu \in \{0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0\}$ untuk mengamati berbagai perilaku.
- Kondisi awal (x_0, y_0) . Beberapa kondisi awal diuji untuk setiap μ guna mengamati konvergensi ke siklus batas dan perilaku di sekitar titik ekuilibrium.
- Ukuran langkah h menggunakan $h = 0.01$ atau $h = 0.001$. Pilihan h yang cukup kecil penting untuk menjamin akurasi solusi numerik.
- Waktu untuk total simulasi, T_{total} , dipilih cukup panjang agar sistem mencapai perilaku *steady-state* atau siklus batas. T_{total} berkisar antara 20 hingga 100 satuan waktu, tergantung pada nilai μ .

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Analisis Siklus Batas untuk $\mu \ll 1$

Untuk mendukung pernyataan bahwa osilasi mendekati harmonik untuk nilai μ yang sangat kecil, dilakukan simulasi untuk $\mu = 0.1$. Gambar 1 menampilkan hasil numerik untuk $\mu = 0.1$.



Gambar 1: Ruang fasa untuk $\mu = 0.1$ dengan kondisi awal di dalam $(0.1, 0.1)$.

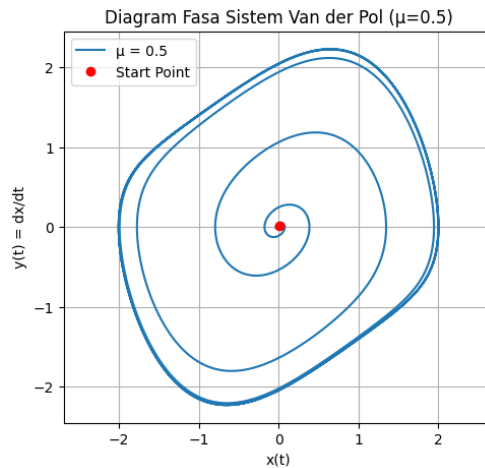
Terlihat jelas bahwa siklus batas yang terbentuk **mendekati bentuk lingkaran** di ruang fasa, yang merupakan ciri khas dari osilator harmonik sederhana. Amplitudo dari osilasi $x(t)$ pada siklus batas ini stabil di sekitar nilai ± 2 . Hasil numerik ini secara visual dan kuantitatif mendukung pernyataan teoretis bahwa untuk $\mu \ll 1$, sistem Van der Pol berperilaku sangat mirip dengan osilator harmonik.

3.2 Analisis Stabilitas Titik Ekuilibrium (0,0)

Sesuai analisis linear pada Persamaan (6), untuk $\mu > 0$, titik ekuilibrium (0,0) bersifat tidak stabil. Simulasi numerik dilakukan dengan kondisi awal dekat (0,0), misalnya $(x_0, y_0) = (0.01, 0.01)$.

3.2.1 Kasus $\mu = 0.5$ (Fokus Tak Stabil)

Untuk $\mu = 0.5$, nilai eigen dari (6) adalah $\lambda = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25-4}}{2} = \frac{0.5 \pm i\sqrt{3.75}}{2} \approx 0.25 \pm 0.968i$. Karena bagian real bernilai positif dan terdapat imajiner, titik asal adalah fokus tak stabil. Gambar

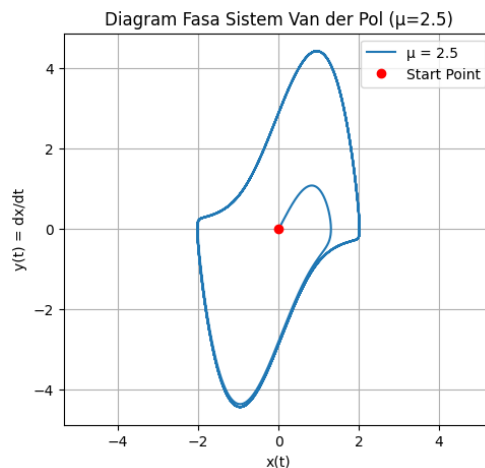


Gambar 2: Ruang fasa untuk $\mu = 0.5$ dengan kondisi awal (0.01, 0.01).

2 menunjukkan plot ruang fasa untuk $\mu = 0.5$. Terlihat jelas bahwa trajektori yang dimulai dari (0.01, 0.01) bergerak menjauhi titik asal dalam lintasan spiral yang melebar. Ini konsisten dengan prediksi teoritis bahwa titik asal adalah fokus tak stabil untuk $0 < \mu < 2$.

3.2.2 Kasus $\mu = 2.5$ (Simpul Tak Stabil)

Untuk $\mu = 2.5$, nilai eigen dari (6) adalah $\lambda = \frac{2.5 \pm \sqrt{2.5^2-4}}{2} = \frac{2.5 \pm 1.5}{2}$. Ini menghasilkan dua nilai eigen real positif, $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$. Ini mengindikasikan bahwa titik asal adalah simpul tak stabil. Gambar 3 menunjukkan plot ruang fasa untuk $\mu = 2.5$. Trajektori yang dimulai dari



Gambar 3: Ruang fasa untuk $\mu = 2.5$ dengan kondisi awal (0.01, 0.01).

(0.01, 0.01) menjauhi titik asal. Berbeda dengan kasus fokus, tidak ada gerakan spiral. Ini sesuai dengan karakteristik simpul tak stabil.

3.3 Analisis Siklus Batas

Untuk $\mu > 0$, sistem Van der Pol memiliki siklus batas yang stabil, yang menarik semua trajektori lain (kecuali titik asal).

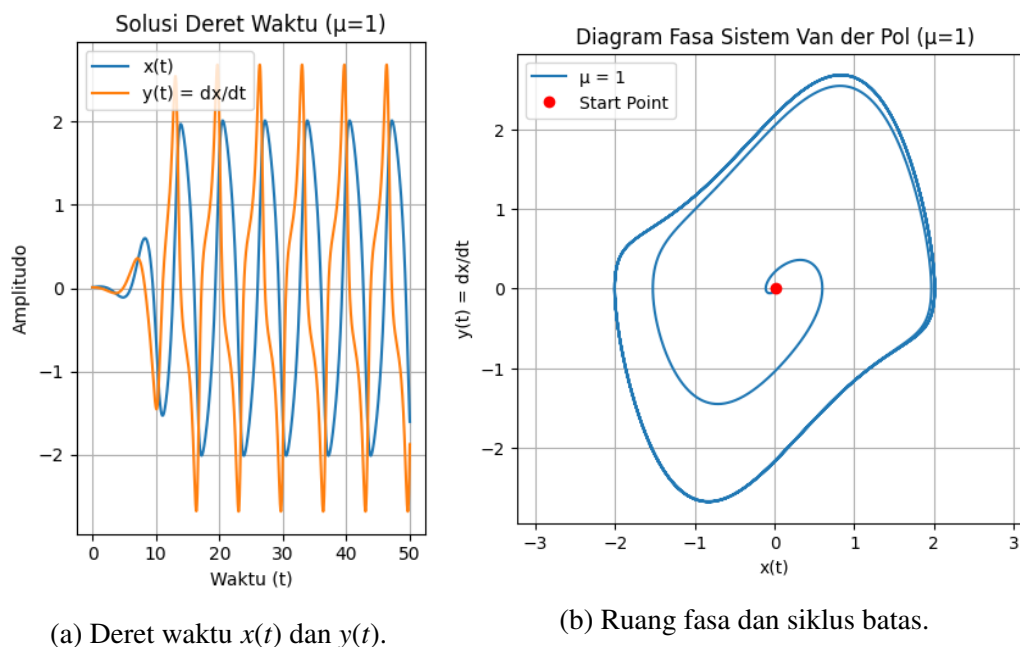
3.3.1 Kasus $\mu = 1.0$

Untuk $\mu = 1.0$, sistem berada pada osilasi yang cukup sinusoidal. Untuk memberikan gambaran eksplisit dari hasil metode RK-4, Tabel 1 menyajikan beberapa langkah awal perhitungan numerik untuk kondisi awal $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$ dengan $h = 0.01$.

Tabel 1: Contoh langkah iterasi metode RK-4 untuk $\mu = 1.0$

Langkah (n)	Waktu (t_n)	Posisi (x_n)
0	0.00	0.1000
1	0.01	0.1010
2	0.02	0.1020
3	0.03	0.1030
...	...	...
100	1.00	0.1783

Tabel 1 menunjukkan bagaimana nilai posisi x dihitung di setiap langkah waktu, yang kemudian membentuk trajektori yang divisualisasikan pada Gambar 4.

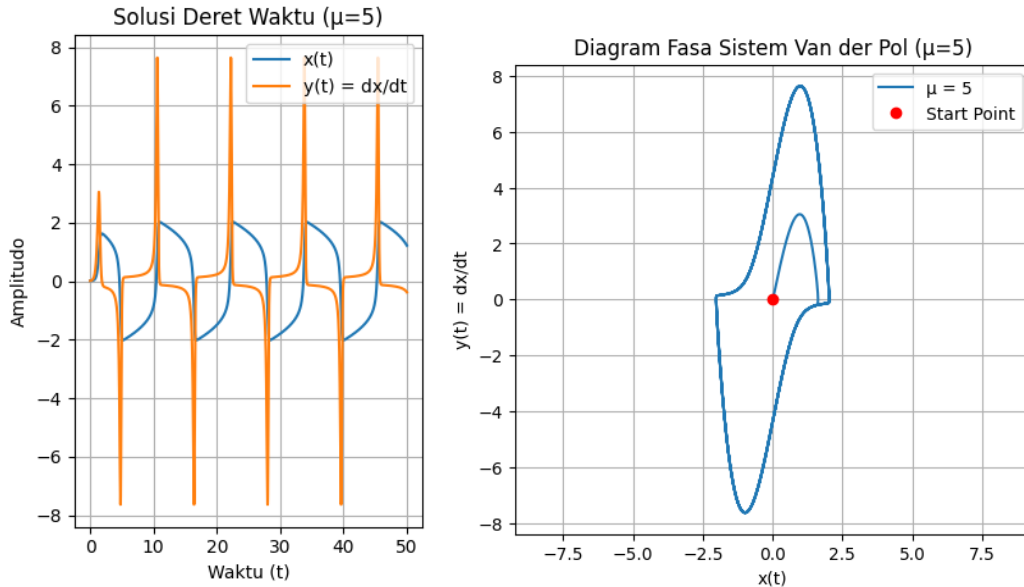


Gambar 4: Simulasi untuk $\mu = 1.0$. (a) Deret waktu menunjukkan osilasi periodik. (b) Ruang fasa menunjukkan konvergensi trajektori ke siklus batas yang sama.

Gambar 4b menunjukkan bahwa trajektori yang dimulai dari dalam maupun luar siklus batas akan konvergen ke siklus batas yang sama, yang mengindikasikan stabilitasnya. Siklus batas untuk $\mu = 1.0$ memiliki bentuk yang menyerupai lingkaran yang sedikit terdistorsi, dengan amplitudo x kira-kira mencapai ± 2 .

3.3.2 Kasus $\mu = 5.0$ (Osilasi Relaksasi)

Untuk nilai μ yang besar seperti $\mu = 5.0$, osilasi menjadi osilasi relaksasi.



(a) Deret waktu $x(t)$ (osilasi relaksasi).

(b) Ruang fasa (siklus batas khas relaksasi).

Gambar 5: Simulasi untuk $\mu = 5.0$. (a) Deret waktu $x(t)$ (b) Ruang fasa

Gambar 5 menunjukkan karakteristik osilasi relaksasi. Pada deret waktu (Gambar 5a), $x(t)$ menghabiskan waktu lama pada nilai mendekati ± 2 , kemudian dengan cepat melompat ke sisi berlawanan. Di ruang fasa (Gambar 5b), siklus batas menunjukkan dua cabang horizontal yang dihubungkan oleh dua cabang vertikal yang sangat curam.

3.4 Interpretasi dan Kebaruan Temuan

Secara keseluruhan, hasil numerik yang disajikan tidak hanya berfungsi sebagai konfirmasi atas teori stabilitas linear, tetapi juga memberikan interpretasi visual yang mendalam terhadap perilaku nonlinear global sistem. Kebaruan temuan dari studi ini terletak pada demonstrasi kuantitatif yang sistematis mengenai evolusi bentuk atraktor (siklus batas) seiring dengan meningkatnya parameter μ . Berbeda dengan penelitian sebelumnya yang sering berfokus pada analisis kualitatif atau kasus-kasus limit ($\mu \ll 1$ atau $\mu \gg 1$), analisis ini menyajikan gambaran yang utuh dan kontinu. Visualisasi konvergensi dari berbagai kondisi awal (baik dari dalam maupun luar siklus batas) secara eksplisit menegaskan karakter atraktor stabil dari siklus batas, sebuah aspek fundamental yang divalidasi dengan akurasi tinggi menggunakan metode RK-4.

4 Kesimpulan

Studi ini berhasil mengaplikasikan metode RK-4 untuk menginvestigasi stabilitas sistem Van der Pol, di mana hasil simulasi numerik secara meyakinkan menunjukkan ketidakstabilan titik ekuilibrium (0,0) untuk semua nilai μ positif, sejalan dengan prediksi analisis linear, dengan jenis ketidakstabilan yang bergantung pada μ . Lebih lanjut, untuk μ positif, terkonfirmasi adanya siklus batas yang stabil yang menarik semua trajektori di sekitarnya, dan bentuk serta karakteristik osilasi siklus batas ini sangat dipengaruhi oleh parameter nonlinearitas μ [14]. Metode RK-4 terbukti

menjadi instrumen yang robust dan presisi untuk penyelidikan numerik sistem dinamik nonlinear seperti ini, menawarkan visualisasi yang jelas dan pemahaman komprehensif mengenai perilaku sistem yang kompleks, termasuk transisi yang tidak sepenuhnya terjangkau oleh analisis analitik semata. Walaupun penelitian ini terbatas pada osilator Van der Pol otonom, terbuka peluang eksplorasi masa depan yang mencakup analisis bifurkasi yang lebih detail, investigasi dampak noise stokastik, studi osilator Van der Pol dengan gaya eksternal yang dapat memicu fenomena seperti frequency locking atau chaos, serta perbandingan kinerja RK4 dengan metode numerik lain, terutama untuk sistem kaku pada nilai μ yang besar, guna memperkaya pemahaman dinamika sistem nonlinear.

Daftar Pustaka

- [1] S. Elaskar, "Symmetry in nonlinear dynamics and chaos ii," *Symmetry*, vol. 17, no. 6, 2025.
- [2] C. Zhang, M. Kim, J. Wang, and C.-M. Hu, "Van der pol–duffing oscillator and its application to gain-driven light-matter interaction," *Physical Review Applied*, vol. 22, no. 1, p. 014034, 2024.
- [3] M. Elfouly and T. Amer, "Internal resonance dynamics in a delayed van der pol oscillator modeling basal ganglia oscillations," *bioRxiv*, pp. 2025–06, 2025.
- [4] F. A. Chughtai, "Examining the van der pol oscillator: Stability and bifurcation analysis," *arXiv preprint arXiv:2309.07010*, 2023.
- [5] S. Kashchenko, "Van der pol equation with a large feedback delay," *Mathematics*, vol. 11, no. 6, p. 1301, 2023.
- [6] P. Amore, J. P. Boyd, and F. M. Fernández, "High order analysis of the limit cycle of the van der pol oscillator," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 59, no. 1, 2018.
- [7] S. Sadeghi, B. Ebrahimpour, N. Bakhshinezhad, and S. Sadeghi, "Analytical solution of nonlinear van der pol oscillator using a hybrid intelligent analytical inverse method," *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, vol. 12, no. 13, pp. 5614–5625, 2021.
- [8] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] A. I. A. Karim, "Stability of the fourth order runge-kutta method for the solution of systems of differential equations," *The Computer Journal*, vol. 9, no. 3, pp. 308–311, 1966.
- [10] P. P. Van der Pol, "Analisa kestabilan dan solusi pendekatan," 2019.
- [11] W. Eckhaus, *Studies in non-linear stability theory*, vol. 6. Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] J. C. Butcher, *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 2016.
- [13] N. Azizah, *Penyelesaian persamaan Van Der Pol menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, 2013.
- [14] R. Abazari and A. Borhanifar, "A comparative study of three semi-analytical methods for solving the forced van der pol oscillator," *Journal of Taibah University for Science*, vol. 12, no. 5, pp. 565–575, 2018.