

BILANGAN FIBONACCI BERDASARKAN HIMPUNAN BEBAS GRAF DAYUNG KAYAK

GEDE ANGGA SAPUTRA^{1*}, PUTU KARTIKA DEWI², I NENGAH SUPARTA³

^{1,2,3}Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja, Indonesia.

* angga.saputra@student.undiksha.ac.id

ABSTRAK

Konsep bilangan Fibonacci suatu graf G , yang didefinisikan oleh Prodinger dan Tichy pada tahun 1982 sebagai banyaknya himpunan bebas pada G , menyediakan landasan penting dalam teori graf. Himpunan bebas adalah himpunan simpul di mana tidak ada dua simpul yang saling bertetangga. Telah diketahui bahwa bilangan Fibonacci untuk graf lintasan P_n adalah F_{n+2} dan untuk graf siklus C_n adalah bilangan Lucas L_n . Penelitian ini bertujuan untuk menyelidiki dan menentukan sifat-sifat kelas himpunan bebas dari graf dayung kayak, $KP_{(k,m,l)}$, sebuah graf yang terbentuk dari dua siklus dengan panjang k dan m yang dihubungkan oleh sebuah lintasan dengan panjang l dalam kaitannya dengan bilangan Fibonacci. Metode yang digunakan adalah analisis kombinatorial terhadap struktur graf dayung kayak untuk menghitung banyaknya himpunan bebasnya. Hasil penelitian menetapkan relasi rekursif untuk banyaknya himpunan bebas, yang dinotasikan $i(KP_{(k,m,l)})$. Secara spesifik, $i(KP_{(k,m,l)})$ ditunjukkan sebagai jumlah dari $i(KP_{(k,m,l-1)})$ dan $i(KP_{(k,m,l-2)})$; sifat rekursif serupa juga berlaku untuk panjang siklus k dan m . Selain itu ketika $k = 3$ atau $m = 3$, banyaknya himpunan independen berkaitan dengan bilangan Lucas dan Fibonacci, menunjukkan bahwa graf dayung kayak mengikuti pola pertumbuhan rekursif.

Kata Kunci: Himpunan Bebas, Graf Dayung Kayak, Bilangan Fibonacci

ABSTRACT

The concept of the Fibonacci number of a graph G , defined by Prodinger and Tichy in 1982 as the number of independent sets in G , provides an important foundation in graph theory. An independent set is a set of vertices in which no two vertices are adjacent. It is known that the Fibonacci number for a path graph P_n is F_{n+2} and for a cycle graph C_n is the Lucas number L_n . This research aims to investigate and determine the properties of the independent set class of the kayak paddle graph, $KP_{(k,m,l)}$, a graph formed by two cycles of lengths k and m connected by a path of length l in relation to its Fibonacci number. The method employed is a combinatorial analysis of the kayak paddle graph's structure to enumerate its independent sets. The research results establish recurrence relations for the number of independent sets, denoted $i(KP_{(k,m,l)})$. Specifically, $i(KP_{(k,m,l)})$ is shown to be the sum of $i(KP_{(k,m,l-1)})$ and $i(KP_{(k,m,l-2)})$; similar recursive properties also hold for the cycle lengths k and m . When $k = 3$ or $m = 3$, the number of independent sets is related to the Lucas and Fibonacci numbers, showing that the kayak paddle graph follows a recursive growth pattern.

Keywords: Independent Set, Kayak Paddle Graph, Fibonacci Number

1 Pendahuluan

Permasalahan Jembatan Königsberg yang diselesaikan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 menjadi awal lahirnya teori graf, yang kemudian berkembang sebagai cabang matematika yang mempelajari sifat-sifat serta penerapan graf dalam berbagai bidang [1]. Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan (V, E) di mana $V(G)$ menyatakan himpunan simpul dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi yang menghubungkan pasangan simpul dalam graf [2]. Banyaknya simpul dalam suatu graf disebut sebagai *order*, sementara banyaknya sisi disebut *size* [3]. Notasi banyaknya simpul (*order*) dilambangkan dengan $|V(G)|$ sedangkan banyaknya sisi (*size*) dilambangkan dengan $|E(G)|$ [4]. Salah satu konsep penting dalam teori graf adalah himpunan bebas, yaitu himpunan simpul di mana tidak ada dua simpul yang saling terhubung secara langsung oleh sisi. Contoh lain kajian dalam teori graf adalah pelabelan graf, yaitu suatu pemetaan dari himpunan elemen-elemen graf ke himpunan bilangan yang disebut sebagai label bagi graf tersebut [5].

Pada tahun 1982, Prodinger dan Tichy memperkenalkan konsep bilangan fibonacci pada graf, yang didefinisikan sebagai banyaknya himpunan bebas dalam graf tersebut. Penelitian mereka menunjukkan bahwa banyak himpunan bebas pada graf lintasan P_n berkaitan langsung dengan bilangan Fibonacci F_{n+2} , sedangkan banyak himpunan bebas pada graf siklus C_n berkaitan dengan bilangan Lucas L_n [6]. Hal ini menunjukkan adanya keterkaitan yang mendalam antara struktur graf dan barisan bilangan terkenal dalam matematika diskrit.

Teori graf terus berkembang pesat seiring dengan berbagai penelitian yang memperkenalkan beragam jenis graf serta mengkaji sifat-sifat strukturnya [7]. Salah satu keluarga graf yang panjangnya dapat diatur sesuai kebutuhan adalah graf lintasan [8]. Berdasarkan sifat tersebut, Salah satu bentuk graf yang menarik untuk diteliti lebih lanjut dalam konteks ini adalah graf dayung kayak., yaitu graf yang dibentuk oleh dua buah graf siklus yang dihubungkan oleh sebuah graf lintasan. Graf ini dinotasikan sebagai $KP_{(k,m,l)}$, di mana k dan m adalah panjang masing-masing graf siklus, dan l adalah panjang graf lintasan penghubung, dengan syarat $k \geq 3, m \geq 3$, dan $l \geq 1$ [9]. Himpunan dari semua himpunan bebas graf G dinotasikan dengan $I(G)$, dan banyaknya himpunan bebas ditulis sebagai $i(G) = |I(G)|$. Himpunan kosong termasuk dalam $I(G)$ karena tidak ada simpul di dalamnya yang saling terhubung.

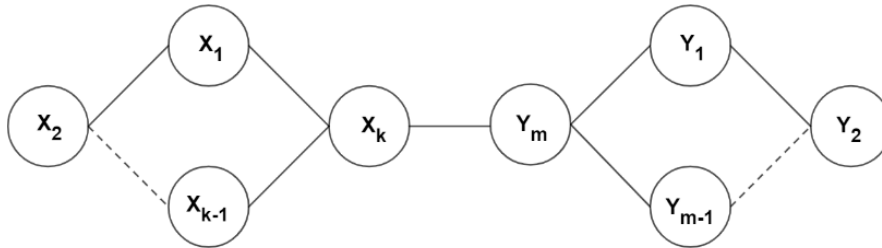
Penelitian yang dilakukan oleh Joe DeMaio dan John Jacobson pada tahun 2014 mengenai bilangan Fibonacci pada graf cebong (*tadpole graph*) menemukan hasil bahwa banyaknya himpunan bebas memenuhi relasi rekursif $i(T_{(n,k)}) = i(T_{(n,k-1)}) + i(T_{(n,k-2)})$ serta $i(T_{(n,k)}) = i(T_{(n-1,k)}) + i(T_{(n-2,k)})$ dengan n menyatakan panjang graf siklus dan k panjang graf lintasan [10]. Berdasarkan hasil-hasil tersebut, penelitian ini berfokus pada pengembangan konsep serupa terhadap graf dayung kayak, dengan menelaah pola rekursif dari banyaknya himpunan bebas menggunakan pendekatan kombinatorial dan analisis rekursif.

2 Tinjauan Pustaka

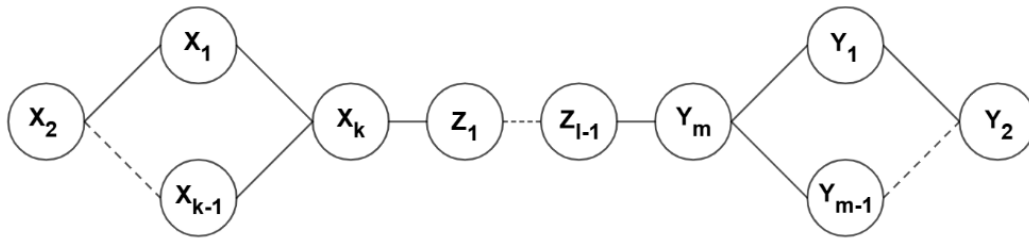
Tinjauan Pustaka ini menyajikan landasan teoretis dalam menganalisis bilangan Fibonacci graf dayung kayak, yang dihitung dari banyaknya himpunan bebasnya. Bagian ini mencakup definisi-definisi dan teorema yang mendukung penelitian.

Definisi 2.1 [11] Himpunan S yang merupakan bagian dari himpunan simpul V pada graf G disebut *himpunan bebas* jika tidak ada dua simpul dalam S yang saling bertetangga di dalam G . Secara formal, jika $G = (V, E)$ adalah sebuah graf, maka himpunan $S \subseteq V$ disebut *himpunan bebas* jika untuk setiap pasangan $u, v \in S$, tidak terdapat sisi $(u, v) \in E$.

Definisi 2.2 [9] *Graf dayung kayak* dinotasikan dengan $KP_{(k,m,l)}$, adalah jenis graf yang dibentuk dari dua graf siklus yang dihubungkan oleh sebuah graf lintasan. Parameter k dan m menyatakan panjang siklus pertama dan kedua, sedangkan l menyatakan panjang lintasan yang menghubungkan keduanya. Graf ini merupakan penggabungan dari dua siklus X_k dan Y_m yang dihubungkan oleh graf lintasan Z_l , dengan $k, m \geq 3$, dan $l \geq 1$. Gambar 1 dan 2 menyajikan contoh dari graf $KP_{(k,m,1)}$ dan $KP_{(k,m,l)}$.



Gambar 1: $KP_{(k,m,1)}$



Gambar 2: $KP_{(k,m,l)}$ untuk $l \geq 2$

Definisi 2.3 [12] Barisan bilangan Fibonacci (F_n) dan Barisan Bilangan Lucas (L_n) adalah dua barisan bilangan bulat penting yang keduanya didefinisikan oleh relasi rekursif yang sama, yaitu $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ untuk $n \geq 2$. Perbedaannya terletak pada nilai awal: barisan Fibonacci umumnya dimulai dengan $F_0 = 0$ dan $F_1 = 1$ sementara barisan Lucas dimulai dengan $L_0 = 2$ dan $L_1 = 1$.

Tabel 1: Sepuluh Nilai Awal Bilangan Fibonacci dan Bilangan Lucas

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

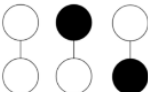
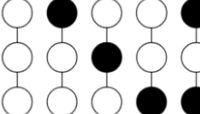
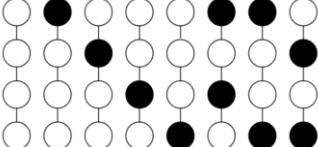
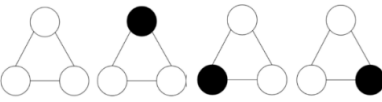
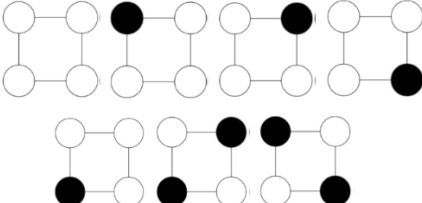
Teorema 2.1 [6] Diberikan P_n graf lintasan dengan orde n , $i(P_n) = F_{n+2}$.

Banyaknya himpunan bebas pada graf lintasan P_n adalah $i(P_n) = F_{n+2}$, di mana F_{n+2} merupakan bilangan Fibonacci ke- $(n+2)$. Hal ini menunjukkan bahwa struktur graf lintasan memiliki hubungan erat dengan barisan Fibonacci, karena pola pembentukan himpunan bebas pada graf lintasan mengikuti sifat rekursif bilangan tersebut.

Teorema 2.2 [6] Diberikan C_n graf siklus dengan orde n , $i(C_n) = L_n$

Banyaknya himpunan bebas pada graf siklus C_n adalah $i(C_n) = L_n$ di mana L_n merupakan bilangan Lucas ke- (n) . Teorema ini menunjukkan bahwa jumlah himpunan bebas dalam graf siklus dapat direpresentasikan oleh bilangan Lucas.

Tabel 2: Himpunan Bebas Graf Lintasan dan Siklus

$i(P_1) = 2$	$i(P_2) = 3$	$i(P_3) = 5$	$i(P_4) = 8$
			
$i(C_3) = 4$		$i(C_4) = 7$	
			

3 Hasil dan Pembahasan

Teknik pembuktian yang digunakan dalam penelitian ini mengikuti teknik yang serupa dengan analisis bilangan Fibonacci pada graf cebong [10], yaitu dengan memanfaatkan sifat rekursif dari banyak himpunan bebas berdasarkan struktur graf.

Teorema 3.1. $i(KP_{(k,m,l)}) = i(KP_{(k,m,l-1)}) + i(KP_{(k,m,l-2)})$.

BUKTI. Teorema ini hanya berlaku untuk $l \geq 3$. Kita akan menunjukkan bahwa $I(KP_{(k,m,l)}) = I(KP_{(k,m,l-1)}) \cup I'(KP_{(k,m,l-2)})$ menggunakan pembuktian dua arah. $I'(KP_{(k,m,l-2)})$ didefinisikan sebagai hasil modifikasi $I(KP_{(k,m,l-2)})$ dengan menambahkan simpul Z_{l-1} atau simpul Z_{l-2} dari $KP_{(k,m,l)}$, pada setiap himpunan dari $I(KP_{(k,m,l-2)})$ berdasarkan ketentuan sebagaimana diatur berikut ini.

Untuk setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k,m,l-2)})$, tambahkan simpul Z_{l-1} pada himpunan tersebut jika simpul Y_m tidak berada dalam himpunan bebas. Karena jika Y_m terdapat pada himpunan, simpul tersebut akan bertetanggaan dengan Z_{l-1} di $KP_{(k,m,l)}$.

Untuk setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k,m,l-2)})$, tambahkan simpul Z_{l-2} pada himpunan tersebut jika simpul Y_m berada dalam himpunan bebas. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $I(KP_{(k,m,l-1)}) \cup I'(KP_{(k,m,l-2)}) \subseteq I(KP_{(k,m,l)})$.

Kemudian untuk $I(KP_{(k,m,l)})$ partisi menjadi dua himpunan A dan B . Anggota himpunan A merupakan anggota dari $I(KP_{(k,m,l)})$ jika memenuhi salah satu dari kondisi berikut:

- Tidak memuat simpul Z_{l-1} .
- Tidak memuat simpul Y_m dan Z_{l-2} secara bersamaan.

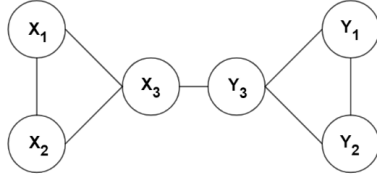
Jelas bahwa $A = I(KP_{(k,m,l-1)})$, karena pada $KP_{(k,m,l-1)}$ tidak terdapat simpul Z_{l-1} serta di $KP_{(k,m,l-1)}$ simpul Y_m dan Z_{l-2} akan bertetanggaan.

Pada anggota himpunan B yang merupakan anggota dari $I(KP_{(k,m,l)})$ selain A , diperoleh bahwa $B = I'(KP_{(k,m,l-2)})$ karena dua alasan berikut:

- Pada B memuat simpul Y_m dan Z_{l-2} yang bertetanggaan di $KP_{(k,m,l-1)}$ namun tidak bertetanggaan di $KP_{(k,m,l)}$.
- Pada B memuat simpul Z_{l-1} jika himpunan bebas di B tidak memuat Y_m , karena simpul Z_{l-1} dan Y_m bertetanggaan di $KP_{(k,m,l)}$.

Karena $A \cup B = I(KP_{(k,m,l-1)}) \cup I'(KP_{(k,m,l-2)})$ jelas diperoleh bahwa $I(KP_{(k,m,l)}) \subseteq I(KP_{(k,m,l-1)}) \cup I'(KP_{(k,m,l-2)})$. Terbukti $I(KP_{(k,m,l)}) = I(KP_{(k,m,l-1)}) \cup I'(KP_{(k,m,l-2)})$. ■

Contoh 1. $i(KP_{(3,3,3)}) = i(KP_{(3,3,2)}) + i(KP_{(3,3,1)}) = 25 + 15 = 40$



Gambar 3 : $KP_{(3,3,1)}$

Table 3: $I(KP_{(3,3,1)})$

No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan
1	$\{\emptyset\}$	6	$\{Y_2\}$	11	$\{X_2, Y_3\}$
2	$\{X_1\}$	7	$\{Y_3\}$	12	$\{X_2, Y_1\}$
3	$\{X_2\}$	8	$\{X_1, Y_3\}$	13	$\{X_2, Y_2\}$
4	$\{X_3\}$	9	$\{X_1, Y_1\}$	14	$\{X_3, Y_1\}$
5	$\{Y_1\}$	10	$\{X_1, Y_2\}$	15	$\{X_3, Y_2\}$

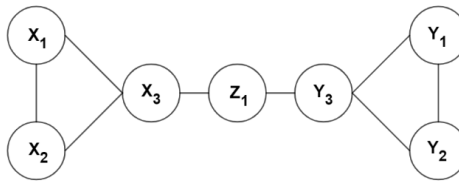
Untuk setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(3,3,1)})$, tambahkan simpul Z_2 pada himpunan tersebut jika simpul Y_3 tidak berada dalam himpunan bebas. Karena jika simpul Y_3 terdapat pada himpunan, simpul tersebut akan bertetangga dengan simpul Z_2 di $KP_{(3,3,3)}$.

Kemudian untuk setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(3,3,1)})$, tambahkan simpul Z_1 pada himpunan jika simpul Y_3 berada dalam himpunan bebas. Karena simpul Z_1 tidak bertetangga dengan Y_3 di $KP_{(3,3,3)}$.

Tabel 4: $I'(KP_{(3,3,1)})$

No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan
1	$\{Z_2\}$	6	$\{Y_2, Z_2\}$	11	$\{X_2, Y_3, Z_1\}$
2	$\{X_1, Z_2\}$	7	$\{Y_3, Z_1\}$	12	$\{X_2, Y_1, Z_2\}$
3	$\{X_2, Z_2\}$	8	$\{X_1, Y_3, Z_1\}$	13	$\{X_2, Y_2, Z_2\}$
4	$\{X_3, Z_2\}$	9	$\{X_1, Y_1, Z_2\}$	14	$\{X_3, Y_1, Z_2\}$
5	$\{Y_1, Z_2\}$	10	$\{X_1, Y_2, Z_2\}$	15	$\{X_3, Y_2, Z_2\}$

Sehingga dari modifikasi $I(KP_{(3,3,1)})$ menghasilkan $I'(KP_{(3,3,1)})$.

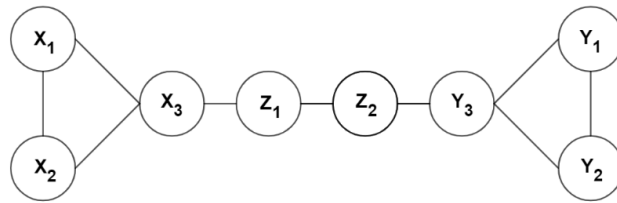


Gambar 4: $KP_{(3,3,2)}$

Tabel 5: $I(KP_{(3,3,2)})$

No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan
1	$\{\emptyset\}$	6	$\{Y_1\}$	11	$\{X_1, Y_1\}$	16	$\{X_2, Y_2\}$	21	$\{Z_1, Y_2\}$
2	$\{X_1\}$	7	$\{Y_2\}$	12	$\{X_1, Y_2\}$	17	$\{X_3, Y_3\}$	22	$\{X_1, Z_1, Y_1\}$
3	$\{X_2\}$	8	$\{Y_3\}$	13	$\{X_2, Z_1\}$	18	$\{X_3, Y_1\}$	23	$\{X_1, Z_1, Y_2\}$
4	$\{X_3\}$	9	$\{X_1, Z_1\}$	14	$\{X_2, Y_3\}$	19	$\{X_3, Y_2\}$	24	$\{X_2, Z_1, Y_1\}$
5	$\{Z_1\}$	10	$\{X_1, Y_3\}$	15	$\{X_2, Y_1\}$	20	$\{Z_1, Y_1\}$	25	$\{X_2, Z_1, Y_2\}$

Untuk setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(3,3,2)})$, biarkan tetap seperti kondisi awal.

Gambar 5: $KP_{(3,3,3)}$ Tabel 6: $I(KP_{(3,3,3)})$

No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan
1	$\{\emptyset\}$	11	$\{X_1, Z_2\}$	21	$\{X_3, Y_3\}$	31	$\{X_1, Z_1, Y_2\}$
2	$\{X_1\}$	12	$\{X_1, Y_3\}$	22	$\{X_3, Y_1\}$	32	$\{X_1, Z_2, Y_1\}$
3	$\{X_2\}$	13	$\{X_1, Y_1\}$	23	$\{X_3, Y_2\}$	33	$\{X_1, Z_2, Y_2\}$
4	$\{X_3\}$	14	$\{X_1, Y_2\}$	24	$\{Z_1, Y_3\}$	34	$\{X_2, Z_1, Y_3\}$
5	$\{Z_1\}$	15	$\{X_2, Z_1\}$	25	$\{Z_1, Y_1\}$	35	$\{X_2, Z_1, Y_1\}$
6	$\{Z_2\}$	16	$\{X_2, Z_2\}$	26	$\{Z_1, Y_2\}$	36	$\{X_2, Z_1, Y_2\}$
7	$\{Y_1\}$	17	$\{X_2, Y_3\}$	27	$\{Z_2, Y_1\}$	37	$\{X_2, Z_2, Y_1\}$
8	$\{Y_2\}$	18	$\{X_2, Y_1\}$	28	$\{Z_2, Y_2\}$	38	$\{X_2, Z_2, Y_2\}$
9	$\{Y_3\}$	19	$\{X_2, Y_2\}$	29	$\{X_1, Z_1, Y_3\}$	39	$\{X_3, Z_2, Y_1\}$
10	$\{X_1, Z_1\}$	20	$\{X_3, Z_2\}$	30	$\{X_1, Z_1, Y_1\}$	40	$\{X_3, Z_2, Y_2\}$

Dengan demikian, dapat diperoleh bahwa $I(KP_{(3,3,3)}) = I(KP_{(3,3,2)}) \cup I'(KP_{(3,3,1)})$.

Teorema 3.2. $i(KP_{(k,m,l)}) = i(KP_{(k,m-1,l)}) + i(KP_{(k,m-2,l)})$.

BUKTI. Teorema ini hanya berlaku untuk $m \geq 5$. Kita akan menunjukkan bahwa $I(KP_{(k,m,l)}) = I(KP_{(k,m-1,l)}) \cup I'(KP_{(k,m-2,l)})$, di mana $I'(KP_{(k,m-2,l)})$ didefinisikan sebagai hasil modifikasi $I(KP_{(k,m-2,l)})$ dengan menambahkan simpul tertentu dari $KP_{(k,m,l)}$ berdasarkan syarat yang ada. Pembuktian dilakukan berdasarkan dua kondisi, saat $l = 1$ dan saat $l > 1$.

Pertama, untuk $l = 1$. Pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k,m-2,1)})$, jika simpul Y_1 atau simpul X_k berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul Y_{m-1} . Karena simpul Y_1 atau simpul Y_k tidak bertentangan dengan simpul Y_{m-1} di $KP_{(k,m,1)}$.

Kemudian, pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k,m-2,1)})$, jika simpul Y_1 atau simpul X_k tidak berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul Y_m . Karena jika simpul Y_1 atau simpul X_k berada dalam himpunan maka simpul tersebut akan bertentangan dengan Y_m di $KP_{(k,m,1)}$.

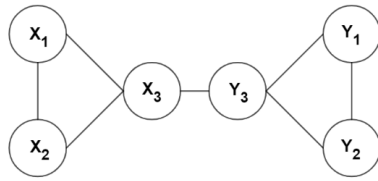
Kedua, untuk $l > 1$. Pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k,m-2,l)})$, jika simpul Y_1 atau simpul Z_{l-1} berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul Y_{m-1} . Karena simpul Y_1 atau simpul Z_{l-1} tidak bertentangan dengan simpul Y_{m-1} di $KP_{(k,m,l)}$.

Kemudian, pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k,m-2,l)})$, jika simpul Y_1 atau simpul Z_{l-1} tidak berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul Y_m . Karena jika simpul Y_1 atau simpul Z_{l-1} berada dalam himpunan maka simpul tersebut akan bertentangan dengan Y_m di $KP_{(k,m,l)}$.

Hal tersebut berlaku sepanjang nilai m . Dengan cara yang sama menggunakan pembuktian dua arah seperti pada Teorema 3.1 diperoleh: $I(KP_{(k,m,l)}) = I(KP_{(k,m-1,l)}) \cup I'(KP_{(k,m-2,l)})$ yang juga merupakan *disjoint set*.

■

Contoh 2. $i(KP_{(3,5,1)}) = i(KP_{(3,4,1)}) + i(KP_{(3,3,1)}) = 26 + 15 = 41$



Gambar 6: $KP_{(3,3,1)}$

Tabel 7: $I(KP_{(3,3,1)})$

No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan
1	$\{\emptyset\}$	6	$\{Y_2\}$	11	$\{X_2, Y_3\}$
2	$\{X_1\}$	7	$\{Y_3\}$	12	$\{X_2, Y_1\}$
3	$\{X_2\}$	8	$\{X_1, Y_3\}$	13	$\{X_2, Y_2\}$
4	$\{X_3\}$	9	$\{X_1, Y_1\}$	14	$\{X_3, Y_1\}$
5	$\{Y_1\}$	10	$\{X_1, Y_2\}$	15	$\{X_3, Y_2\}$

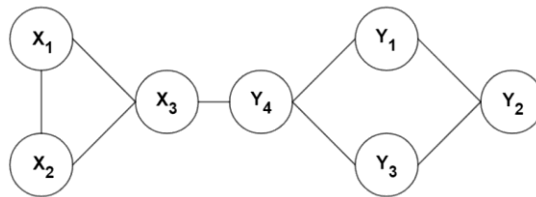
Kasus untuk $l = 1$. Pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(3,3,1)})$, jika simpul Y_1 atau simpul X_3 berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul Y_4 . Karena simpul Y_1 atau simpul X_3 tidak bertetangga dengan Y_4 di $KP_{(3,5,1)}$.

Kemudian, pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(3,3,1)})$, jika simpul Y_1 atau simpul X_3 tidak berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul Y_5 . Karena jika simpul Y_1 atau simpul X_3 berada dalam himpunan maka simpul tersebut akan bertentangan dengan X_5 di $KP_{(3,5,1)}$.

Tabel 8: $I'(KP_{(3,3,1)})$

No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan
1	$\{Y_5\}$	6	$\{Y_2, Y_5\}$	11	$\{X_2, Y_3, Y_5\}$
2	$\{X_1, Y_5\}$	7	$\{Y_3, Y_5\}$	12	$\{X_2, Y_1, Y_4\}$
3	$\{X_2, Y_5\}$	8	$\{X_1, Y_3, Y_5\}$	13	$\{X_2, Y_2, Y_5\}$
4	$\{X_3, Y_4\}$	9	$\{X_1, Y_1, Y_4\}$	14	$\{X_3, Y_1, Y_4\}$
5	$\{Y_1, Y_4\}$	10	$\{X_1, Y_2, Y_5\}$	15	$\{X_3, Y_2, Y_4\}$

Sehingga dari modifikasi $I(KP_{(3,3,1)})$ menghasilkan $I'(KP_{(3,3,1)})$.

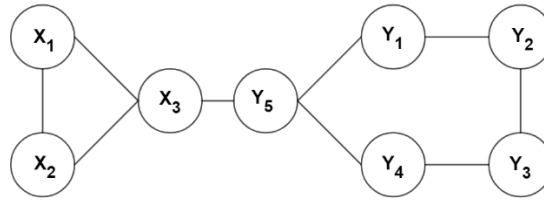


Gambar 7: $KP_{(3,4,1)}$

Tabel 9: $I(KP_{(3,4,1)})$

No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan
1	$\{\emptyset\}$	8	$\{Y_3\}$	15	$\{X_2, Y_2\}$	22	$\{X_1, Y_4, Y_2\}$
2	$\{X_1\}$	9	$\{X_1, Y_4\}$	16	$\{X_2, Y_3\}$	23	$\{X_1, Y_1, Y_3\}$
3	$\{X_2\}$	10	$\{X_1, Y_1\}$	17	$\{X_3, Y_1\}$	24	$\{X_2, Y_4, Y_2\}$
4	$\{X_3\}$	11	$\{X_1, Y_2\}$	18	$\{X_3, Y_2\}$	25	$\{X_2, Y_1, Y_3\}$
5	$\{Y_4\}$	12	$\{X_1, Y_3\}$	19	$\{X_3, Y_3\}$	26	$\{X_3, Y_1, Y_3\}$
6	$\{Y_1\}$	13	$\{X_2, Y_4\}$	20	$\{Y_4, Y_2\}$		
7	$\{Y_2\}$	14	$\{X_2, Y_1\}$	21	$\{Y_1, Y_3\}$		

Dan untuk setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(3,4,1)})$, biarkan tetap sebagai kondisi awal.

Gambar 8: $KP_{(3,5,1)}$ Tabel 10: $I(KP_{(3,5,1)})$

No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan	No	Himpunan
1	$\{\emptyset\}$	10	$\{X_1, Y_5\}$	19	$\{X_2, Y_4\}$	28	$\{Y_2, Y_4\}$	37	$\{X_2, Y_1, Y_4\}$
2	$\{X_1\}$	11	$\{X_1, Y_1\}$	20	$\{X_3, Y_1\}$	29	$\{X_1, Y_5, Y_2\}$	38	$\{X_2, Y_2, Y_4\}$
3	$\{X_2\}$	12	$\{X_1, Y_2\}$	21	$\{X_3, Y_2\}$	30	$\{X_1, Y_5, Y_3\}$	39	$\{X_3, Y_1, Y_3\}$
4	$\{X_3\}$	13	$\{X_1, Y_3\}$	22	$\{X_3, Y_3\}$	31	$\{X_1, Y_1, Y_3\}$	40	$\{X_3, Y_1, Y_4\}$
5	$\{Y_5\}$	14	$\{X_1, Y_4\}$	23	$\{X_3, Y_4\}$	32	$\{X_1, Y_1, Y_4\}$	41	$\{X_3, Y_2, Y_4\}$
6	$\{Y_1\}$	15	$\{X_2, Y_5\}$	24	$\{Y_5, Y_2\}$	33	$\{X_1, Y_2, Y_4\}$		
7	$\{Y_2\}$	16	$\{X_2, Y_1\}$	25	$\{Y_5, Y_3\}$	34	$\{X_2, Y_5, Y_2\}$		
8	$\{Y_3\}$	17	$\{X_2, Y_2\}$	26	$\{Y_1, Y_3\}$	35	$\{X_2, Y_5, Y_3\}$		
9	$\{Y_4\}$	18	$\{X_2, Y_3\}$	27	$\{Y_1, Y_4\}$	36	$\{X_2, Y_1, Y_3\}$		

Dengan demikian, diperoleh: $I(KP_{(3,5,1)}) = I(KP_{(3,4,1)}) \cup I'(KP_{(3,3,1)})$.

Teorema 3.3. $i(KP_{(k,m,l)}) = i(KP_{(k-1,m,l)}) + i(KP_{(k-2,m,l)})$

BUKTI. Teorema ini hanya berlaku untuk $k \geq 5$. Kita akan menunjukkan bahwa $I(KP_{(k,m,l)}) = I(KP_{(k-1,m,l)}) \cup I'(KP_{(k-2,m,l)})$, di mana $I'(KP_{(k-2,m,l)})$ didefinisikan sebagai hasil modifikasi $I(KP_{(k,m-2,l)})$ dengan menambahkan simpul tertentu dari $KP_{(k,m,l)}$ berdasarkan syarat yang ada. Pembuktian dilakukan berdasarkan dua kondisi, saat $l = 1$ dan saat $l > 1$.

Pertama untuk $l = 1$. Pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k-2,m,1)})$, jika simpul X_1 atau simpul Y_m berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul X_{k-1} . Karena simpul X_1 atau simpul Y_m tidak bertentangan dengan X_{k-1} di $KP_{(k,m,1)}$.

Kemudian, pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k-2,m,1)})$, jika simpul X_1 atau simpul Y_m tidak berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul X_k . Karena jika simpul X_1 atau simpul Y_m berada dalam himpunan maka simpul tersebut akan bertentangan dengan X_k di $KP_{(k,m,1)}$.

Kedua untuk $l > 1$. Pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k-2,m,l)})$, jika simpul X_1 atau simpul Z_1 berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul X_{k-1} . Karena simpul X_1 atau simpul Z_1 tidak bertentangan dengan X_{k-1} di $KP_{(k,m,l)}$.

Kemudian, pada setiap himpunan bebas dalam $I(KP_{(k-2,m,l)})$, jika simpul X_1 atau simpul Z_1 tidak berada dalam himpunan, maka tambahkan simpul X_k . Karena jika simpul X_1 atau simpul Z_1 berada dalam himpunan maka simpul tersebut akan bertentangan dengan X_k di $KP_{(k,m,l)}$.

Hal tersebut berlaku sepanjang nilai k . Dengan cara yang sama menggunakan pembuktian dua arah seperti pada Teorema 3.1 diperoleh: $I(KP_{(k,m,l)}) = I(KP_{(k-1,m,l)}) \cup I'(KP_{(k-2,m,l)})$ yang juga merupakan *disjoint set*.

■

Teorema 3.4 untuk $m = 3$ berlaku, $i(KP_{(k,3,l)}) = L_{k+3+l} - L_{3+l} \times F_k$.

BUKTI. Dari Teorema 3.3 (rekursif terhadap parameter k) diperoleh bahwa:

$$i(KP_{(k,m,l)}) = i(KP_{(k-1,m,l)}) + i(KP_{(k-2,m,l)}) \quad (1)$$

Deret bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas memenuhi pola rekursif berikut:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (2)$$

Untuk setiap bilangan k didefinisikan sebagai $f(k) = L_{k+3+l} - L_{3+l} \times F_k$. Kita akan menunjukan bahwa $i(KP_{(k,3,l)}) = f(k)$, berlaku untuk semua k dengan induksi. Karena F_n dan L_n memenuhi pola rekurensi pada persamaan (2), kita cek bahwa f juga memenuhi:

$$\begin{aligned} f(k-1) + f(k-2) &= (L_{k+2+l} - L_{3+l} \times F_{k-1}) + (L_{k+1+l} - L_{3+l} \times F_{k-2}) \\ &= L_{k+3+l} - L_{3+l}(F_{k-1} + F_{k-2}) \\ &= L_{k+3+l} - L_{3+l}(F_k) \\ &= f(k). \end{aligned}$$

Kita perlu memverifikasi kebenaran identitas untuk dua nilai awal berturut-turut, misalnya untuk $k = 3, k = 4$ dengan nilai $l = 1$.

$$i(KP_{(3,3,1)}) = f(3) = L_7 - L_4(F_3) = 29 - 7(2) = 15$$

$$i(KP_{(4,3,1)}) = f(4) = L_8 - L_4(F_4) = 47 - 7(3) = 26$$

Langkah induksi. misalkan untuk $k \geq 5$, benar bahwa :

$$i(KP_{(k-1,3,l)}) = f(k-1), \quad i(KP_{(k-2,3,l)}) = f(k-2).$$

Maka dari persamaan (1) dan sifat rekursif pada f diperoleh :

$$\begin{aligned} i(KP_{(k,3,l)}) &= i(KP_{(k-1,3,l)}) + i(KP_{(k-2,3,l)}) \\ &= f(k-1) + f(k-2) = f(k) \end{aligned}$$

Berdasarkan langkah induktif di atas, dengan prinsip induksi matematika untuk rekurensi, identitas $i(KP_{(k,3,l)}) = L_{k+3+l} - L_{3+l} \times F_k$ berlaku untuk $k \geq 5$. ■

Teorema 3.5 Untuk $k = 3$ berlaku, $i(KP_{(3,m,l)}) = L_{3+m+l} - L_{3+l} \times F_m$.

BUKTI. Dari Teorema 3.2 (rekursif terhadap parameter m) diperoleh bahwa :

$$i(KP_{(k,m,l)}) = i(KP_{(k,m-1,l)}) + i(KP_{(k,m-2,l)}) \quad (1)$$

Deret bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas memenuhi pola rekursif berikut :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (2)$$

Untuk setiap bilangan m didefinisikan sebagai $f(m) = L_{3+m+l} - L_{3+l} \times F_m$. Kita akan menunjukan bahwa $i(KP_{(3,m,l)}) = f(m)$, berlaku untuk semua m dengan induksi. Karena F_n dan L_n memenuhi pola rekurensi pada persamaan (2), kita cek bahwa f juga memenuhi:

$$f(m-1) + f(m-2) = (L_{2+m+l} - L_{3+l} \times F_{m-1}) + (L_{1+m+l} - L_{3+l} \times F_{m-2})$$

$$\begin{aligned}
&= L_{3+m+l} - L_{3+l}(F_{m-1} + F_{m-2}) \\
&= L_{3+m+l} - L_{3+l}(F_m) \\
&= f(m)
\end{aligned}$$

Kita perlu memverifikasi kebenaran identitas untuk dua nilai awal berturut-turut, misalnya untuk $m = 3$, $m = 4$ dengan nilai $l = 2$.

$$i(KP_{(3,3,2)}) = f(3) = L_8 - L_5(F_3) = 47 - 11(2) = 25$$

$$i(KP_{(3,4,2)}) = f(4) = L_9 - L_5(F_4) = 76 - 11(3) = 43$$

Langkah induksi: misalkan untuk $m \geq 5$, benar bahwa :

$$i(KP_{(3,m-1,l)}) = f(m-1) \quad i(KP_{(3,m-2,l)}) = f(m-2)$$

Maka dari persamaan (1) dan sifat rekursif pada f diperoleh :

$$\begin{aligned}
i(KP_{(3,m,l)}) &= i(KP_{(3,m-1,l)}) + i(KP_{(3,m-2,l)}) \\
&= f(m-1) + f(m-2) = f(m)
\end{aligned}$$

Berdasarkan langkah induktif di atas, dengan prinsip induksi matematika untuk rekurensi, identitas $i(KP_{(3,m,l)}) = L_{3+m+l} - L_{3+l} \times F_m$ berlaku untuk $m \geq 5$. ■

4 Kesimpulan

Penelitian ini mengkaji himpunan bebas pada graf dayung kayak dan menunjukkan bahwa banyaknya himpunan bebas mengikuti pola bilangan Fibonacci (F_n) dan bilangan Lucas (L_n). Hasil ini memberikan kontribusi baru dalam menghubungkan struktur graf khusus dengan barisan bilangan terkenal, serta memperluas pemahaman tentang sifat kombinatorial graf. Kelebihan penelitian ini terletak pada ditemukannya hubungan eksplisit antara graf dan barisan bilangan, yang memudahkan perhitungan banyak himpunan bebas pada kondisi tertentu. Namun, keterbatasan utama penelitian ini adalah bahwa rumus mencari banyak himpunan bebas yang diperoleh hanya berlaku untuk kasus khusus dan pembuktian dilakukan secara numerik, bukan secara analitik kombinatorik. Untuk pengembangan selanjutnya, disarankan untuk menganalisis sifat-sifat atau karakteristik kelas himpunan bebas pada graf lain yang memiliki keterkaitan struktural dengan graf siklus dan graf lintasan, sehingga dapat memperluas pemahaman terhadap pola rekursif dalam teori graf kombinatorial.

Daftar Pustaka

- [1] A. N. Firdausy, P. K. Dewi, S. I. G. Putu, and R. Y. Silalahi, "Bilangan Kromatik Graceful untuk Graf $(D_{m,2} \times P_n)$," *J. Ilm. Mat.*, vol. 12, no. 3, pp. 437–446, 2024.
- [2] I. N. Suparta and P. K. Dewi, "On Super (a, d) -Edge-Antimagic Total Labeling of Möbius Ladder," pp. 0–6, 2018.
- [3] N. L. P. D. S. Narita, I. N. Suparta, and I. N. Sukajaya, "Kekuatan Ketidakteraturan Sisi Graf Rantai $C[C_n^{(m)}]$, $n=5,7$," *Wahana Mat. dan Sains J. Mat. Sains, dan Pembelajarannya*, vol. 15, no. 2, pp. 16–33, 2021, [Online]. Available: <https://ejournal.undiksha.ac.id/index.php/JPM/article/view/30612>
- [4] I. N. Suparta, Y. Lin, R. Hasni, and I. N. Budayana, "On Odd-Graceful Coloring of Graphs," vol. 10, no. 2, pp. 335–354, 2025.
- [5] I. N. Suparta, M. Candiasa, W. A. Prasancika, and M. Bača, "Modular Irregularity Strength of Dense Graphs," *Electron. J. Graph Theory Appl.*, vol. 12, no. 1, pp. 105–

- 116, 2024, doi: 10.5614/EJGTA.2024.12.1.9.
- [6] H. Prodinger and R. F. Tichy, “Fibonacci Numbers of Graphs,” *Fibonacci Q.*, pp. 16–21, 1982.
 - [7] M. Qalbi, I. G. A. W. Wardhana, I. N. Suparta, and P. K. Dewi, “Forgotten , Harary , and Schultz Indexes of Prime Coprime Graphs of The Modulo Group of Integer Numbers,” vol. 9, no. 2, pp. 129–137, 2025.
 - [8] I. N. Budayana and S. Sariyasa, “Kekuatan Ketakteraturan Sisi Modular Pada Graf Rantai $C(nCm)$,” *J. Mat.*, vol. 14, no. 1, p. 108, 2024, doi: 10.24843/jmat.2024.v14.i01.p175.
 - [9] A. Ahmad, M. Baca, and S. Sultan, “Computing the Metric Dimension of Kayak Paddles Graph and Cycle with Chord,” pp. 289–290, 2020, [Online]. Available: <https://scispace.com/pdf/computing-the-metric-dimension-of-kayak-paddles-graph-and-1c2m3ag1oi.pdf>
 - [10] J. DeMaio and J. Jacobson, “Fibonacci Number of the Tadpole Graph,” *Electron. J. Graph Theory Appl.*, vol. 2, no. 2, pp. 129–138, 2014, doi: 10.5614/ejgta.2014.2.2.5.
 - [11] R. Balakrishnan and K. Ranganathan, *A Textbook of Graph Theory*. 2012.
 - [12] M. Mustika and Wamiliana, “Beberapa Identitas Barisan Fibonacci dan Lucas,” vol. 9, no. 2, pp. 89–96, 2019.