J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 03, No. 01 (2019), pp. 13–22.
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika
e-ISSN 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LANE EMDEN INDEX NOL DENGAN METODE SIMETRI LIE

MAULANA MALIK[1*]

[1]**Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia**

***m.malik@sci.ui.ac.id**

ABSTRAK

Salah satu cara menyelesaikan persamaan diferensial orde dua adalah mereduksinya menjadi persamaan diferensial orde satu. Dengan metode simetri Lie persamaan diferensial Lane Emden Index Nol dapat direduksi menjadi persamaan diferensial orde satu yang selanjutnya mudah untuk ditentukan solusinya. Berdasarkan hasil pembahasan, metode simetri Lie dapat digunakan untuk menentukan solusi eksak persamaan diferensial Lane Emden Index Nol.

Kata kunci: Simetri Lie, Persamaan Diferensial Lane Emden, Persamaan Diferensial Orde Satu

ABSTRACT

One way to solve second-order differential equations is to reduce them to first-order differential equations. By the Lie symmetry method the Zero Index Lane Emden differential equation can be reduced to a first-order differential equation which is easy to determine the solution. Based on the results of the discussion, Lie symmetry methods can be used to determine the exact solution of Zero Index Lane Emden differential equations.

Keywords: Lie Symmetry, Lane Emden Differential Equation, First Order Differential Equation

1 Pendahuluan

Persamaan diferensial memiliki peran yang penting dalam matematika terapan dikarenakan persamaan diferensial dapat menggambarkan beberapa fenomena dalam fisika, teknik, biologi, ilmu ekonomi, finansial dan ilmu-ilmu lainnya.

Setelah diperoleh bentuk persamaan diferensial, langkah selanjutnya adalah menentukan solusinya. Beberapa teknik pencarian solusi eksak persamaan diferensial untuk kelas-kelas tertentu telah dikembangkan , seperti metode variabel terpisah, ekspansi nilai eigen, Euler, Reduksi order, dan metode lainnya. Untuk persamaan diferensial non linier, upaya untuk menemukan solusi eksaknya

2000 Mathematics Subject Classifications: 76M60, 35R03
Tanggal masuk: 26-02-19, dimuat: 24-04-19.

dengan teknik-teknik tersebut seringkali gagal, sehingga terkadang menggunakan pendekatan solusi numerik. Akan tetapi, seorang ahli matematika Norwegia yang bernama Sophus Lie telah membangun suatu teori untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial linier ataupun nonlinier dengan suatu konsep yang dinamakan dengan Simetri Lie (Oliveri, [1]).

Salah satu persamaan diferensial yang muncul dalam beberapa permasalahan fisika adalah persamaan diferensial Lane Emden. Beberapa peneliti telah membahas penyelesaian persamaan diferensial Lane Emden dengan menggunakan beberapa metode, diantaranya adalah Mukherjee, at.al [2] dan Khan, et al [3] dalam papernya menggunakan metode transformasi diferensial, dan Motsa, et al [4] menggunakan metode transformasi Adomian. Dalam paper ini, penulis menggunakan metode Simetri Lie untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial Lane Emden yang berindex Nol.

Langkah yang perlu dilakukan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Lane Emden dengan metode Simetri Lie adalah mereduksi persamaan tersebut menjadi persamaan diferensial orde satu dan menyelesaikannya dengan langkah-langkah yang telah dituliskan oleh Gilmore [5].

2 Landasan Teori

Dalam metode Simetri Lie perlu diperhatikan beberapa konsep berikut ini :

2.1 Grup Simetri Lie

Definisi 2.1. *(Herstein, [6]) Suatu himpunan G yang dilengkapi operasi $*$ disebut grup perkalian bila memenuhi sifat berikut:*

1. *Tertutup :* $g_i \in G$ *dan* $g_j \in G$ *maka* $g_i * g_j \in G$.
2. *Asosiatif : Untuk setiap* $g_i, g_j, g_k \in G$ *maka* $(g_i * g_j) * g_k = g_i * (g_j * g_k)$.
3. *Identitas : Terdapat* $I \in G$ *sedemikian sehingga* $(g_i * I) = g_i = (I * g_i)$.
4. *Invers : Untuk setiap* $g_i \in G$ *terdapat* $g_i^{-1} \in G$ *sedemikian sehingga* $g_i * g_i^{-1} = I = g_i^{-1} * g_i$.

Definisi 2.2. *(Starrett, [7]) Misalkan A himpunan titik* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *dan B himpunan titik* $(\hat{x},\hat{y}) \in \mathbb{R}^2$. *Grup Lie satu-parameter (atau transformasi Lie point) adalah grup G dengan himpunan transformasi* $P_\lambda : A \to B$ *dengan* $\hat{x}$ *dan* $\hat{y}$ *merupakan fungsi dari* x, y *dan* λ. *Misalkan* $\hat{x} = f(x,y,\lambda)$ *dan* $\hat{y} = h(x,y,\lambda)$ *lebih lanjut* P_λ *dapat dituliskan sebagai*

$$P_\lambda : (x,y) \mapsto (f(x,y,\lambda), h(x,y,\lambda))$$

dan harus memenuhi kondisi berikut :

- P_λ *pemetaan yang satu-satu dan pada.*
- $P_{\lambda_2} \circ P_{\lambda_1} = P_{\lambda_2+\lambda_1}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- $P_0 = I$.
- $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = -\lambda_1$ *sedemikian sehingga* $P_{\lambda_2} \circ P_{\lambda_1} = P_0 = I$

2.2 Kondisi Simetri

Definisi 2.3. *(Martinot, [8]) Simetri persamaan diferensial adalah transformasi invertibel yang memetakan solusi ke solusi.*

Sebagai contoh dari definisi di atas, misalkan diberikan persamaan diferensial orde satu

$$\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1}$$

Solusi dari (1) adalah $y(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\lambda \in \mathbb{R}$, transformasi $P_\lambda : (x,y) \mapsto (\hat{x},\hat{y}) = (x, y+\lambda)$ adalah suatu simetri karena P_λ memetakan solusi $y(x)$ ke solusi $\hat{y}(\hat{x}) = c$. Lebih lanjut, $\hat{y}(\hat{x}) = c \iff y+\lambda = c \iff y = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$.

Dalam metode Simetri Lie diperlukan suatu kondisi yang disebut sebagai kondisi simetri. Perhatikanlah ilustrasi berikut ini, misalkan diberikan persamaan diferensial orde satu

$$\frac{dy}{dx} = g(x,y) = p \tag{2}$$

dan operator turunan total berikut ini:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\partial}{\partial y} \tag{3}$$

Untuk menentukan kondisi simetri persamaan diferensial (2), titik $(\hat{x},\hat{y})$ juga harus memenuhi solusi dari (2) sedemikian sehingga

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = g(\hat{x},\hat{y}).$$

Kemudian dengan menggunakan (3) diperoleh

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{D_x\hat{y}}{D_x\hat{x}} = \frac{\hat{y}_x + \frac{dy}{dx}\hat{y}_y}{\hat{x}_x + \frac{dy}{dx}\hat{x}_y} = g(\hat{x},\hat{y}).$$

Sehingga didapatkan kondisi simetri dari (2) adalah

$$\frac{\hat{y}_x + g(x,y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x + g(x,y)\hat{x}_y} = g(\hat{x},\hat{y}) \tag{4}$$

Bentuk (4) disebut juga sebagai persamaan kendala dari (2). (Steinhour, [9])

2.3 *First Prolongation*

Perhatikan bahwa

$$\hat{x} = f(x,y;\lambda), \hat{y} = h(x,y;\lambda), \hat{p} = w(x,y,p;\lambda)$$

Bentuk ekspansi Deret Taylor disekitar $\lambda = 0$ dari masing-masing bentuk di atas adalah

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= f(x,y;\lambda) = x + \lambda\xi(x,y) + \mathcal{O}(\lambda^2), \;\; f(x,y;0) = x \\
\hat{y} &= h(x,y;\lambda) = y + \lambda\eta(x,y) + \mathcal{O}(\lambda^2), \;\; h(x,y;0) = y \\
\hat{p} &= w(x,y,p;\lambda) = p + \lambda\zeta(x,y,p) + \mathcal{O}(\lambda^2), \;\; w(x,y,p;0) = p
\end{aligned}$$

dimana ξ, η fungsi sembarang yang disebut juga sebagai simetri generator. Kemudian dengan menggunakan persamaan (4) maka deret Taylor dari $\hat{p}$ dapat juga dinyatakan sebagai

$$\hat{p} = \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{d\hat{y}/dx}{d\hat{x}/dx} = \frac{p + \lambda(\eta_x + \eta_y p)}{1 + \lambda(\xi_x + \xi_y p)} = p + \lambda(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)p - \xi_y p^2)$$

Sehingga diperoleh

$$\zeta(x,y,p) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)p - \xi_y p^2 \tag{5}$$

dan bentuk (5) dinamakan sebagai *First Prolongation*. (Gilmore,[5])

2.4 Persamaan Penentuan

Untuk menentukan persamaan penentuan diperlukan bentuk *Infinitesimal generator*. *Infinitesimal generator* didefinisikan sebagai

$$X \equiv X(x,y,p) = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x,y,p)\frac{\partial}{\partial p} \tag{6}$$

(Gilmore,[5]). Terkadang bentuk (6) hanya dituliskan sebagai $X(x,y) = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ (Steinhour, [9]). Kemudian pandang fungsi $F(x,y,p)$ dan tuliskan bentuk $XF = 0$ yaitu

$$\xi(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial F}{\partial y} + \zeta(x,y,p)\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

Persamaan (7) disebut sebagai persamaan penentuan (*the determining equation*) (Gilmore,[5]).

2.5 Persamaan Kendala Baru

Jika telah diperoleh *Infinitesimal generator X* selanjutnya dapat ditentukan koordinat baru dari (2) , yaitu dengan membentuk persamaan Lagrange sebagai berikut :

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = \frac{dp}{\zeta(x,y,p)} \tag{8}$$

Dengan menyelesaikan bentuk Lagrange di atas maka akan diperoleh fungsi $s(x,y), r(x,y)$ dan $t(x,y,p)$. Kemudian gunakan formula (4) untuk mendapatkan persamaan kendala sistem koordinat baru ds/dr yang dituliskan sebagai berikut (Gilmore,[5]) :

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + ps_y}{r_x + pr_y} \tag{9}$$

3 Penyelesaian Persamaan Diferensial Lane Emden Index Nol

Pada bagian ini akan dibahas cara penentuan solusi eksak dari persamaan diferensial Lane Emden Index Nol. Persamaan diferensial Lane Emden merupakan persamaan diferensial orde dua yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut [4]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + y^s = 0$$

dengan s suatu konstanta. Secara khusus, pada paper ini dipilih nilai $s = 0$, sehingga diperoleh persamaan diferensial Lane Emden Index Nol sebagai berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + 1 = 0 \tag{10}$$

Untuk menentukan solusi (10), langkah awal yang dilakukan adalah mereduksinya menjadi persamaan diferensial orde satu yaitu dengan menentukan bentuk simetri generator dari (10). Simetri generator dapat ditentukan secara analitik dengan teknik deduktif matematika dan juga dapat juga ditentukan dengan bantuan *software*.

Pada paper ini, simetri generator (10) ditentukan dengan menggunakan *software* Maple, yaitu dengan perintah *symgen* pada *Detools*. Sehingga didapatkanlah bentuk simetri generator dari (10) sebagai berikut

$$(\xi(x,y),\eta(x,y)) = (0,1)$$

Singh [10] dalam papernya mengatakan bahwa untuk mereduksi order persamaan diferensial dapat menggunakan bentuk Lagrange (8) sebagai berikut :

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = \frac{dy'}{\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2} \iff \frac{dx}{0} = \frac{dy}{1} = \frac{dy'}{0}.$$

Kemudian ambil fraksi $\frac{dx}{0}$ dan $\frac{dy}{1}$, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{0} &= \frac{dy}{1} \\ \iff dx &= 0 \\ \iff x &= c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

dan lebih lanjut tuliskan sebagai $u(x,y) = c_1 = x$. Selanjutnya ambil fraksi $\frac{dy}{1}$ dan $\frac{dy'}{0}$, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dy}{1} &= \frac{dy'}{0} \\ \iff dy' &= 0 \\ \iff y' &= c_2, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dan tuliskan $v(x,y) = c_2 = y'$. Dengan menggunakan turunan total didapatkan persamaan berikut :

$$\frac{dv}{du} = \frac{y''}{1} = y''.$$

Substitusikan bentuk $x = u(x,y)$, $y' = v(x,y)$ dan $y'' = \frac{dv}{du}$ ke (10), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + 1 &= 0 \\ \iff y'' + \frac{2}{x}y' + 1 &= 0 \\ \iff \frac{dv}{du} + \frac{2}{u}v + 1 &= 0 \\ \iff \frac{dv}{du} &= -\frac{2v+u}{u} \end{aligned} \tag{11}$$

Persamaan (11) merupakan persamaan diferensial orde satu yang merupakan hasil reduksi dari persamaan diferensial Lane Emden Index Nol.

Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan (11). Karena (11) merupakan persamaan diferensial orde satu maka untuk menyelesaikannya digunakan metode Simetri Lie yang telah dituliskan langkah-langkahnya oleh Gilmore [5].

Gilmore [5] telah memberikan langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial orde satu dengan menggunakan metode Simetri Lie sebagai berikut :

1. Misalkan $dy/dx = p$, kemudian tentukan persamaan permukaan $F(x,y,p) = 0$.
2. Gunakan *Infinitesimal generator* X dan *First Prolongation* $\zeta(x,y,p)$ untuk membentuk persamaan penentuan $XF(x,y,p) = 0$, kemudian asumsikan terlebih dahulu $\xi(x,y)$ dan $\eta(x,y)$ berderajat nol .

3. Substitusikan $\xi(x,y)$ dan $\eta(x,y)$ ke persamaan penentuan.
4. Selesaikan persamaan penentuan $XF = 0$ untuk fungsi $\xi(x,y)$ dan $\eta(x,y)$ dengan mengkonstruksikan suatu sistem persamaan linier homogen dengan cara membandingkan bentuk monomial yang sama dari hasil bagian 3.
   (a) Jika diperoleh solusi trivial dari sistem tersebut, maka bentuk $\xi(x,y)$ dan $\eta(x,y)$ perlu ditingatkatkan derajatnya satu persatu dan kembali ke bagian 3.
   (b) Jika diperoleh solusi tidak trivial, maka lanjut ke bagian 5.
5. Konstruksikan *First Prolongation* $\zeta(x,y,p)$ dan substitusikan $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ dan $\zeta(x,y,p)$ ke persamaan *infinitesimal generator*nya.
6. Kontruksikan persamaan Lagrange dari persamaan *infinitesimal generator* dari bagian (5) dan selesaikan untuk memperoleh koordinat baru $s(x,y), r(x,y)$ dan $t(x,y,p)$ serta tuliskan transformasi antar koodinat.
7. Tentukan transformasi koordinat $s(x,y), r(x,y)$ dan $t(x,y,p)$ sehingga diperoleh bentuk x,y dan p.
8. Substitusikan nilai x,y,p ke persamaan permukaan , sehingga akan didapatkan persamaan permukaan baru $F(r,t) = 0$ yang digunakan untuk mendapatkan persamaan t sebagai fungsi dari r. Kemudian bentuk persamaan kendala ds/dr dan selesaikan persamaan tersebut dengan cara mengintegralkan.
9. Gunakan substitusi terbalik dari koordinat baru $x = x(r,s)$ dan $y = y(r,s)$ ke koordinat awal untuk menemukan solusi persamaan diferensial awal.

Pertama-tama misalkan terlebih dahulu $\dfrac{dv}{du} = -\dfrac{2v+u}{u} = p$.
Persamaan permukaannya : $F(u,v,p) = p + \dfrac{2v+u}{u}$.
Konstruksikan persamaan penentuan :

$$\begin{aligned}
XF(u,v,p) &= 0\\
\iff \xi(u,v)\frac{\partial F}{\partial u} + \eta(u,v)\frac{\partial F}{\partial v} + \zeta(u,v)\frac{\partial F}{\partial p} &= 0\\
\iff \xi(u,v)\left(\frac{-2v}{u^2}\right) + \eta(u,v)\left(\frac{2}{u}\right) + &\\
(\eta_u + (\eta_v - \xi_u)p - \xi_v p^2)(1) &= 0\\
\iff \xi(u,v)\left(\frac{-2v}{u^2}\right) + \eta(u,v)\left(\frac{2}{u}\right) + &\\
\eta_u + (\xi_u - \eta_v)\left(-\frac{2v+u}{u}\right) + \xi_y\left(-\frac{2v+u}{u}\right)^2 &= 0. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Asumsikan ξ dan η berderajat nol, yaitu $\xi(u,v) = \xi_0$ dan $\eta(u,v) = \eta_0$.
Substitusikan $\xi(u,v) = \xi_0$ dan $\eta(u,v) = \eta_0$ ke persamaan (12) , sehingga diperoleh

$$\xi_0\left(\frac{-2v}{u^2}\right) + \eta_0\left(\frac{2}{u}\right) = 0. \qquad (13)$$

Dari persamaan (13) dibentuk suatu sistem persamaan linier dengan memperhatikan bentuk monomialnya:

$$\begin{array}{r} v/u^2: \\ 1/u: \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut akan didapatkan solusi trivial ($\xi = 0, \eta = 0$). Karena diperoleh solusi trivial maka derajat dari ξ dan η perlu ditingkatkan secara beurutan dalam hal ini ditingkatkan menjadi polinomial derajat satu dalam u dan v, yaitu

$$\xi(u,v) = \xi_0 + \xi_1 u + \xi_2 v \tag{14}$$

$$\eta(u,v) = \eta_0 + \eta_1 u + \eta_2 v \tag{15}$$

dengan $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$. Kemudian substitusi (14) dan (15) ke persamaan (12), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
(\xi_0+\xi_1 u+\xi_2 v)\left(\frac{-2v}{u^2}\right)+(\eta_0+\eta_1 u+\eta_2 v)\left(\frac{2}{u}\right)+\eta_1+(\xi_1-\eta_2)\left(-\frac{2v+u}{u}\right)+\xi_2\left(-\frac{2v+u}{u}\right)^2 &= 0 \\
\iff -2\xi_0\frac{v}{u^2}-2\xi_1\frac{v}{u}-2\xi_2\frac{v^2}{u^2}+2\eta_0\frac{1}{u}+2\eta_1+2\eta_2\frac{v}{u}+\eta_1-2\xi_1\frac{v}{u}-\xi_1+2\eta_2\frac{v}{u}+\eta_2+ & \\
4\xi_2\frac{v^2}{u^2}+4\xi_2\frac{v}{u}+\xi_2 &= 0 \\
\iff -2\xi_0\frac{v}{u^2}+(-4\xi_1+4\xi_2+4\eta_2)\frac{v}{u}+2\xi_2\frac{v^2}{u^2}+2\eta_0\frac{1}{u}-\xi_1+\xi_2+3\eta_1+\eta_2 &= 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya kosntruksikan sistem persamaan linier dengan memperhatikan bentuk masing-masing monomial dari persamaan di atas :

$$\begin{array}{c} v/u^2 \\ v/u \\ v^2/u^2 \\ 1/u \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss diperoleh bentuk berikut :

$$\begin{array}{c} v/u^2 \\ v/u \\ v^2/u^2 \\ 1/u \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh solusi tidak trivial sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \xi_0 = \xi_2 = \eta_0 = \eta_1 = 0, \\ \xi_1 = \eta_2. \end{aligned}$$

Tanpa mengurangi keumuman misalkan $\xi_1 = k \in \mathbb{R} - \{0\}$ maka $\eta_2 = k$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \xi(u,v) &= ku, \\ \eta(u,v) &= kv \end{aligned}$$

dan didapat bentuk $\zeta(u,v,p) = \eta_u + (\eta_v - \xi_u)p - \xi_v p^2 = 0 + (k-k)p - 0 = 0$ dan bentuk *infinitesimal generatornya* adalah

$$\begin{aligned} X &= \xi\frac{\partial}{\partial u} + \eta\frac{\partial}{\partial v} + \zeta\frac{\partial}{\partial p} \\ &= ku\frac{\partial}{\partial u} + kv\frac{\partial}{\partial v} + 0\frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \tag{16}$$

Selanjutnya konstruksikan bentuk Lagrange dari persamaan (16), yaitu :

$$\frac{du}{\xi(u,v)} = \frac{dv}{\eta(u,v)} = \frac{dp}{\zeta(u,v,p)} \iff \frac{du}{ku} = \frac{dv}{kv} = \frac{dp}{0} \iff \frac{du}{u} = \frac{dv}{v} = \frac{dp}{0}. \tag{17}$$

Dari bentuk Lagrange di atas dapat diperoleh koordinat baru $s(u,v), r(u,v)$ dan $t(u,v,p)$. Pertama ambil fraksi $\frac{du}{u}$ untuk mendapatkan bentuk $s(u,v)$ sebagai berikut :

$$s(u,v) = \int \frac{1}{u} du = \ln u$$

dan penentuan bentuk dari $r(u,v)$ didapatkan dengan mengambil 2 fraksi $\frac{du}{u}$ dan $\frac{dv}{v}$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= \frac{dv}{v} \\ \iff \int \frac{du}{u} &= \int \frac{dv}{v} \\ \iff \ln u &= \ln v + c, c \in \mathbb{R} \\ \iff v &= c_0 u, c_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sehingga didapat $r(u,v) = c_0 = u^{-1}v$. Selanjutnya akan dicari bentuk dari $t(u,v,p)$, yaitu dengan mengambil 2 fraksi $\frac{dp}{0}$ dan $\frac{dv}{v}$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{0} &= \frac{dv}{v} \\ \iff dp &= 0 \\ \iff p &= c_1, c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan $t(u,v,p) = c_1 = p$.
Selanjutnya tuliskan transformasi antar koordinatnya, yaitu

$$s = \ln u \rightarrow u = e^s \tag{18}$$

$$r = u^{-1}v \rightarrow v = ru = re^s \tag{19}$$

$$p = t \tag{20}$$

Kemudian substitusi (18), (19) dan (20) ke persamaan permukaan $F(u,v,p) = p + \frac{2v+u}{u} = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} t + \frac{2re^s + e^s}{e^s} &= 0 \\ \iff t + 2r + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bentuk persamaan permukaan yang baru (tidak bergantung pada s) sebagai berikut :

$$F(r,t) = t + 2r + 1 \tag{21}$$

dan lebih lanjut bentuk (21) dapat dituliskan persamaan berikut

$$t(r) = -(2r+1) \tag{22}$$

Selanjutnya bentuk persamaan kendala $\frac{ds}{dr}$ sebagai berikut:

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_u + ps_v}{r_u + pr_v} = \frac{1/u+0}{-u^{-2}v + pu^{-1}} = \frac{1}{-u^{-1}v+p}. \tag{23}$$

Substitusikan (18), (19), (20) dan (22) ke (23) diperolehlah bentuk berikut

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dr} &= \frac{1}{-3r-1} \\ \Longleftrightarrow ds &= \frac{dr}{-3r-1} \\ \Longleftrightarrow \int ds &= \int \frac{dr}{-3r-1} \\ \Longleftrightarrow s + c_2 &= -\frac{1}{3}\ln(3r+1) + c_3, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow s &= -\frac{1}{3}\ln(3r+1) + c_4, c_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{24}$$

Substitusikan kembali bentuk $r = u^{-1}v$ dan $s = \ln u$ ke (24) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \ln u &= -\frac{1}{3}\ln(3u^{-1}v+1) + c_4 \\ \Longleftrightarrow \ln u &= \ln(3u^{-1}v+1)^{-1/3}c_5, c_5 \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow u^{-3} &= (3u^{-1}v+1)c_6, c_6 \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow u^{-3} - c_6 &= 3u^{-1}vc_6 \\ \Longleftrightarrow v &= \frac{u^{-3}-c_6}{3u^{-1}c_6}. \end{aligned} \tag{25}$$

Kemudian substitusikan $u(x,y) = x$ dan $v(x,y) = y^{'}$ ke (25) maka akan didapatkan

$$\begin{aligned} y^{'} &= \frac{x^{-3}-c_6}{3x^{-1}c_6} \\ \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1-c_6x^3}{3x^2c_6} \\ \Longleftrightarrow dy &= \frac{1-c_6x^3}{3x^2c_6}dx \\ \Longleftrightarrow \int dy &= \int \frac{1-c_6x^3}{3x^2c_6}dx \\ \Longleftrightarrow y &= -\frac{x^2}{6} - \frac{c_7}{x} + c_8, \;\; c_7, c_8 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sehingga diperolehlah solusi dari (10), yaitu

$$y = -\frac{x^2}{6} - \frac{c_7}{x} + c_8, \;\; c_7, c_8 \in \mathbb{R}$$

4 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, hasil yang dapat dijadikan kesimpulan dari tulisan ini adalah metode Simetri Lie dapat digunakan untuk mereduksi persamaan diferensial Lane Emden Index Nol menjadi persamaan diferensial orde satu sehingga solusi eksaknya dapat ditentukan.

Referensi

[1] Oliveri,F., 2010, Lie Symmetries of Differential Equations: Classical Results and Recent Contributions, *symmetry.* 2010, 2 , pp 658 -706.

[2] Mukherjee, S., Roy, B., Chaterjee P.K, 2011, Solution of Lane-Emden Equation by Differential Transform Method. *International Journal of Nonlinear Science*, Volume 12, Issue 4, 2011, Pages 478 - 484.

[3] Khan, Y., Svoboda, Z., Smarda, Z., 2012, Solving certain classes of Lane-Emden type equations using the differential transformation method. *Advances in Difference Equations a Springer Open Journal*, Volume 174, Issue 1, 2012, Pages 1 - 11.

[4] Motsa, S.S, Shateyi, S., 2012, New Analytic Solution to the Lane-Emden Equation of Index 2. *Mathematical Problems in Engineering Hindawi Publishing*, Pages 1 - 19.

[5] Gilmore, R, 2006, Lie groups, Lie Algebras, and some of their applications. Dover Publications.

[6] Herstein, I.N.,1999, Abstract Algebra, 3ed, John Wiley and Son.

[7] Starrett, J., 2007, Solving Differential Equations by Symmetry Groups, *Jstor, Mathematical Association of America*, Volume 114, Issue 9, November 2007, Pages 778 - 792.

[8] Martinot, Z., 2014, Solutions to Ordinary Differential Equations Using Methods of Symmetry, *Paper Zachary Department of Mathematics, University of Washington*.

[9] Steinhour, R.A, 2013, The Truth About Lie Symmetries: solving Differential Equations With Symmetry Methods. Senior Independent Study Theses, Department of Mathematics and Computer Science, The College of Wooster.

[10] Singh, M., 2015, On Reduction of Some Differential Equations using Symmetry Methods, *Journal of Natural Sciences Research*, Volume 5, Issue 3, 2015, Pages 44 - 47.