



PENENTUAN PREMI ASURANSI JIWA BERJANGKA DENGAN MODEL SUKU BUNGA COX-INGERSOLL-ROSS PADA KASUS *MULTIPLE DECREMENT*

ALFONSIUS LINTANG^{1*}, FERY WIDHIATMOKO²

^{1,2}Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan IPA, Universitas Brawijaya, Malang

* alfonsius490@gmail.com

ABSTRAK

Suku bunga dan jumlah *decrement* sangat berpengaruh dalam penentuan premi. Studi ini menghitung premi asuransi jiwa berjangka pada kasus *multiple decrement* menggunakan model suku bunga Cox-Ingersoll-Ross (CIR) yang menjamin suku bunga bernilai positif dan cenderung kembali menuju rata-rata. Berdasarkan data historis tahun 2009-2023, hasil prediksi suku bunga tahun 2024-2058 dengan model CIR mengalami fluktuasi setiap tahunnya, tetapi suku bunga yang dihasilkan selalu bernilai positif, sesuai dengan karakteristik suku bunga riil Bank Indonesia dan model CIR. Berdasarkan hasil prediksi suku bunga CIR, premi tahunan untuk individu berusia 30 tahun dengan masa pertanggungan 35 tahun dan empat jenis kegagalan (kematian, mengundurkan diri, cacat permanen, dan pensiun) adalah Rp1.756.736. Penyebab kegagalan mengundurkan diri menjadi jenis kegagalan yang memberikan kontribusi premi terbesar, yaitu Rp1.170.266, walaupun manfaat yang dapat diperoleh paling kecil. Sebaliknya, cacat permanen memberikan kontribusi terkecil, yaitu Rp58.847. Hal ini menunjukkan bahwa probabilitas kejadian mengundurkan diri sangat tinggi, tetapi probabilitas kejadian cacat permanen sangat rendah.

Kata kunci: asuransi jiwa berjangka, Cox-Ingersoll-Ross, *multiple decrement*, premi

ABSTRACT

Interest rates and the number of decrements significantly influence premium determination. This study calculates term life insurance premiums in a multiple decrement scenario using the Cox-Ingersoll-Ross (CIR) interest rate model, which ensures positive interest rates that tend to revert to the mean. Based on historical data from 2009-2023, the interest rate predictions for 2024-2058 using the CIR model show annual fluctuations. However, the resulting interest rates are always positive, consistent with the characteristics of Bank Indonesia's real interest rates and the CIR model. Based on the CIR interest rate predictions, the annual premium for a 30-year-old individual with a 35-year coverage period and four types of decrement (death, withdrawal, permanent disability, and retirement) is IDR 1,756,736. Withdrawal is the decrement that contributes the largest portion to the premium, amounting to IDR 1,170,266, despite having the smallest benefit. Conversely, permanent disability contributes the smallest portion, IDR 58,847. This indicates that the probability of withdrawal is very high, while the probability of permanent disability is very low.

Keywords: Cox-Ingersoll-Ross, *multiple decrement*, premium, term life insurance.

1 Pendahuluan

Pandemi COVID-19 adalah peristiwa global yang tidak dapat diprediksi oleh siapapun, yang mengakibatkan lebih dari 7 juta kematian di seluruh dunia. Pandemi ini tidak hanya berdampak pada kesehatan masyarakat, tetapi juga menyebabkan masalah ekonomi yang signifikan bagi keluarga, terutama yang bergantung pada satu sumber pendapatan. Meskipun COVID-19 dapat mempengaruhi siapa saja, orang tua sebagai pencari nafkah utama bagi keluarga mereka menghadapi risiko infeksi yang lebih tinggi, yang dalam skenario terburuk dapat menyebabkan kematian. Situasi ini dapat menempatkan keluarga dalam kesulitan finansial, yang semakin menekankan perlunya instrumen finansial yang melindungi dari risiko tak terduga, seperti asuransi jiwa.

Asuransi jiwa adalah kontrak antara pemegang polis dan perusahaan asuransi, di mana pemegang polis membayar premi untuk menerima manfaat jika orang yang diasuransikan meninggal selama periode kontrak sesuai dengan ketentuan dalam perjanjian polis [1]. Secara tradisional, terdapat tiga jenis asuransi jiwa, salah satunya adalah asuransi jiwa berjangka. Jenis asuransi ini memberikan manfaat kematian jika kematian terjadi selama masa polis.

Premi yang dibayar oleh pemegang polis dipengaruhi oleh berbagai risiko yang kompleks, termasuk suku bunga. Dalam kenyataannya, fluktuasi suku bunga terjadi secara terus-menerus dan bersifat stokastik. Hal ini memerlukan model matematika untuk memprediksi suku bunga di masa depan, seperti model Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Model CIR relevan dalam aplikasi dunia nyata karena memastikan suku bunga yang positif dan menunjukkan sifat mean reversion, yang berarti prediksi akan cenderung kembali ke rata-rata [2].

Selain suku bunga, premi juga dipengaruhi oleh jumlah penyebab kegagalan. Dalam asuransi jiwa, umumnya terdapat satu penyebab kegagalan utama, yaitu kematian, yang disebut dengan *single decrement*. Namun, jika beberapa penyebab kegagalan dipertimbangkan dalam satu periode, hal ini dikenal sebagai *multiple decrement* [3]. Konsep ini lebih mencerminkan kehidupan nyata, karena individu menghadapi berbagai risiko, bukan hanya satu.

Beberapa studi sebelumnya menjadi dasar dari penelitian ini. Adilla dkk. [4] mengkaji perhitungan premi asuransi jiwa berjangka untuk kasus *multiple decrement* menggunakan suku bunga konstan dan variabel. Namun, data suku bunga yang digunakan bukanlah prediksi masa depan, melainkan suku bunga aktual yang diperoleh dari data Bank Dunia. Namun, penelitian tersebut tidak memasukkan model matematika untuk memprediksi suku bunga di masa depan. Kamila dkk. [5] membandingkan model suku bunga Vasicek dan CIR untuk menghitung cadangan manfaat asuransi jiwa. Temuan mereka menunjukkan bahwa model Vasicek menunjukkan pergerakan yang sangat volatil dan terkadang menghasilkan suku bunga negatif, sedangkan model CIR lebih stabil dan tidak pernah menghasilkan suku bunga negatif. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menghitung premi asuransi jiwa berjangka untuk kasus *multiple decrement* menggunakan model suku bunga CIR.

2 Tinjauan Pustaka

2.1 Model Decrement

Decrement didefinisikan sebagai segala jenis kegagalan yang dapat terjadi pada individu, seperti kematian, pengunduran diri, kecacatan, pensiun, dan lain-lain [3]. Terdapat dua jenis decrement, yaitu *single decrement* dan *multiple decrement*. Model *multiple decrement* disebabkan oleh lebih dari satu jenis kegagalan dalam periode waktu tertentu. Dalam *multiple decrement*, probabilitas bahwa seseorang tidak mengalami kegagalan hingga usia $x + n$ tahun, persamaan berikut dapat digunakan

$${}_n p_x^{(\tau)} = 1 - {}_n q_x^{(\tau)} = \prod_{k=0}^{n-1} p_{x+k}^{(\tau)}. \quad (1)$$

Sementara itu, untuk menentukan probabilitas bahwa (x) tidak mengalami kegagalan selama u tahun dan akan mengalami kegagalan akibat sebab j dalam rentang usia $x + u$ hingga $x + u + t$, digunakan persamaan berikut

$${}_{u|t}q_x^{(j)} = {}_u p_x^{(\tau)} \cdot {}_t q_{x+u}^{(j)}. \quad (2)$$

2.2 Proses Wiener

Proses Wiener adalah proses stokastik $\{X_t, t \geq 0\}$ dengan waktu kontinu dengan rata-rata nol dan varians t [6]. Jika suatu variabel W_t mengikuti proses Wiener, maka ia memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Perubahan dalam W_t selama interval waktu yang singkat Δt dengan $\varepsilon \sim N(0, 1)$ adalah

$$\Delta W_t = \varepsilon \sqrt{\Delta t}; \quad (3)$$

2. Nilai-nilai ΔW_t untuk dua interval waktu singkat Δt adalah independen satu sama lain.

Kemudian, proses Wiener dapat diperluas untuk penggunaan dalam lingkup yang lebih luas, yaitu proses Wiener diperumum dengan persamaan sebagai berikut:

$$dX = a dt + b dW_t, \quad (4)$$

di mana $a dt$ mewakili tingkat drift atau perubahan rata-rata per unit waktu, dan $b dW_t$ adalah volatilitas dari proses Wiener [6]. Selama interval waktu singkat Δt , perubahan ΔX dapat diturunkan berdasarkan persamaan (3) dan persamaan (4) sebagai berikut:

$$\Delta X = a \Delta t + b \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

di mana $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

2.3 Proses Ito

Proses Ito adalah proses Wiener yang diperumum di mana parameter a_t dan b_t merupakan fungsi dari proses stokastik X_t dan waktu t [6]. Berdasarkan persamaan (4), proses Ito dapat ditulis sebagai

$$dX_t = a_t(X_t, t) dt + b_t(X_t, t) dW_t. \quad (5)$$

Untuk interval waktu singkat Δt , proses Ito menjadi

$$\Delta X_t = a_t(X_t, t) \Delta t + b_t(X_t, t) \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

di mana $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

2.4 Metode Euler-Maruyama

Euler-Maruyama adalah metode diskretisasi waktu yang paling sederhana untuk proses Ito yang memenuhi persamaan diferensial stokastik [7]. Metode ini akan memudahkan modifikasi persamaan diferensial stokastik, seperti pada persamaan CIR. Misalkan persamaan (5) akan diskretisasi di atas interval waktu $[0, T_{akhir}]$ dengan partisi

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T_{akhir},$$

di mana langkah waktu adalah sama, $\Delta t = \frac{T_{akhir}}{N}$. Pendekatan Euler-Maruyama kemudian dapat dituliskan sebagai

$$X_{t+\Delta t} = X_t + a_t(X_t, t) \Delta t + b_t(X_t, t) \Delta W_t, \quad (6)$$

untuk $t = 0, 1, \dots, N - 1$.

2.5 Metode Ordinary Least Square

Ordinary Least Square (OLS) adalah metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter dari model regresi linier sederhana [8]. Prinsip dasar dari metode OLS adalah untuk menentukan parameter sedemikian rupa sehingga jumlah kuadrat selisih antara y_i dan garis regresi diminimalkan. Diberikan model regresi

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i; i = 1, 2, \dots, n,$$

maka kriteria least squares menjadi

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2, \quad (7)$$

di mana y_i adalah variabel respon/tergantung, x_i adalah variabel prediktor/independen, dan ε_i adalah kesalahan dari model regresi. Nilai dari (β_0, β_1) dicari sedemikian rupa sehingga $S(\beta_0, \beta_1)$ sekecil mungkin dengan mendiferensiasi persamaan (7) terhadap β_0 dan β_1 .

Selain estimasi β_0 dan β_1 , estimasi σ juga diperlukan untuk uji hipotesis dan penilaian kualitas model regresi. Nilai estimasi varians ($\hat{\sigma}$) dapat dihitung menggunakan persamaan

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n-2}}.$$

2.6 Model Cox-Ingersoll-Ross

Model Cox-Ingersoll-Ross (CIR) adalah model matematika yang digunakan untuk memodelkan suku bunga yang bervariasi seiring waktu [2]. Model CIR pertama kali diperkenalkan oleh John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, dan Stephen A. Ross dengan merancang model agar nilai yang dihasilkan selalu positif dan menunjukkan *mean reversion*, yang berarti model ini cenderung kembali ke rata-rata. Model CIR diformulasikan sebagai berikut:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma_{CIR} \sqrt{r_t} dW_t, \quad (8)$$

di mana r_t adalah suku bunga pada waktu t , κ adalah kecepatan mean reversion, θ adalah suku bunga jangka panjang rata-rata, σ_{CIR} adalah volatilitas dari suku bunga, dan W_t adalah proses Wiener.

Persamaan (8) kemudian dapat dimodelkan menggunakan metode Euler-Maruyama seperti dalam persamaan (6) dan proses Wiener, yang menjadi

$$r_{t+\Delta t} = r_t + \kappa(\theta - r_t)\Delta t + \sigma_{CIR} \sqrt{r_t} \varepsilon \sqrt{\Delta t}. \quad (9)$$

dengan suku bunga awal r_0 dan $\varepsilon \sim N(0, 1)$. Menggunakan metode OLS, estimasi untuk parameter model CIR adalah sebagai berikut:

$$\kappa = \frac{1-h}{\Delta t}, \quad (10)$$

$$\theta = \frac{g}{1-h}, \quad (11)$$

$$\sigma_{CIR} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{r_{t+\Delta t}}{\sqrt{r_t}} - \left(\frac{g}{\sqrt{r_t}} + \frac{r_t h}{\sqrt{r_t}} \right) \right)^2}. \quad (12)$$

Nilai g dan h dapat diperoleh menggunakan persamaan berikut:

$$h = \frac{(n-1) \left(\sum_{t=1}^{n-1} \frac{r_{t+\Delta t}}{r_t} \right) - \left(\sum_{t=1}^{n-1} r_{t+\Delta t} \right) \left(\sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} \right)}{(n-1)^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-1} r_t \right) \left(\sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} \right)}, \quad (13)$$

$$g = \frac{(n-1) \left(\sum_{t=1}^{n-1} r_{t+\Delta t} \right) - \left(\sum_{t=1}^{n-1} \frac{r_{t+\Delta t}}{r_t} \right) \left(\sum_{t=1}^{n-1} r_t \right)}{(n-1)^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-1} r_t \right) \left(\sum_{t=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} \right)}. \quad (14)$$

2.7 Suku Bunga

Suku bunga adalah kompensasi yang dibayar oleh peminjam kepada pemberi pinjaman atau dapat dipandang sebagai bentuk sewa yang dibayar [9]. Untuk menghitung suku bunga yang bervariasi, dinyatakan sebagai i_k , di mana k mewakili periode waktu dari 1 hingga t . Faktor diskonto untuk suku bunga yang bervariasi sebagai berikut

$$(v^*)^k = \frac{1}{(1+i_1)} \frac{1}{(1+i_2)} \cdots \frac{1}{(1+i_t)} = \prod_{k=1}^t \frac{1}{(1+i_k)}. \quad (15)$$

2.8 Mean Absolute Percentage Error

Mean Absolute Percentage Error (MAPE) adalah metode yang umum digunakan untuk mengukur akurasi suatu prediksi dengan menghitung rata-rata kesalahan persentase absolut [10]. Rumus untuk MAPE adalah

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(\frac{|Y_t - F_t|}{Y_t} \right) \times 100 \quad (16)$$

di mana Y_t adalah nilai aktual pada waktu t , F_t adalah nilai prediksi pada waktu t , dan n adalah jumlah titik data. Lewis [11] membagi nilai MAPE ke dalam beberapa kategori untuk menentukan kemampuan prediksi model. Jika nilai MAPE lebih kecil dari 10%, maka model peramalan dikatakan sangat baik. Semakin kecil persentase MAPE, semakin baik hasil prediksinya.

2.9 Asuransi Jiwa

Asuransi jiwa adalah kontrak antara pelanggan dan perusahaan asuransi, di mana pelanggan membayar sejumlah premi untuk menerima manfaat yang akan diberikan jika tertanggung meninggal selama periode kontrak sesuai dengan ketentuan polis [1]. Secara tradisional, asuransi jiwa dibagi menjadi tiga jenis: asuransi jiwa berjangka, asuransi jiwa seumur hidup, dan asuransi jiwa endowment.

Asuransi jiwa berjangka adalah jenis asuransi yang memberikan manfaat kepada pelanggan jika kematian terjadi dalam periode kontrak. Nilai kini aktuaria dari asuransi jiwa berjangka diskrit untuk (x) dengan pertanggungan selama n tahun dan manfaat satu unit dapat dihitung menggunakan persamaan

$$A_{x:\overline{n}|}^{(t)} = \sum_{k=1}^n v^k \cdot t p x_k. \quad (17)$$

di mana v^{k+1} adalah faktor diskon saat $k+1$.

2.10 Anuitas Jiwa

Anuitas jiwa adalah serangkaian pembayaran yang bergantung pada probabilitas kelangsungan hidup individu yang diasuransikan [1]. Anuitas jiwa diskrit dibagi menjadi dua jenis: anuitas-due, di mana pembayaran dilakukan pada awal setiap periode, dan anuitas segera, di mana pembayaran dilakukan pada akhir setiap periode. Persamaan untuk anuitas-due berjangka n -tahun adalah sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v p_x + v^2 {}_2p_x + v^3 {}_3p_x + \cdots + v^{n-1} {}_{(n-1)}p_x,$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t p_x. \quad (18)$$

2.11 Premi

Premi adalah sejumlah uang yang harus dibayar oleh pemegang polis kepada perusahaan asuransi sebagai imbalan atas manfaat yang diberikan [1]. Jumlah premi tahunan yang harus dibayar oleh pelanggan dapat dihitung dengan membagi nilai kini aktuarial dari manfaat asuransi dengan anuitas yang sesuai. Untuk kasus asuransi jiwa berjangka n -tahun diskrit, dapat diturunkan berdasarkan persamaan (17) dan (18) sebagai berikut:

$$P_{x:\overline{n}|}^1 = B \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \quad (19)$$

di mana $P_{x:\overline{n}|}^1$ mewakili jumlah premi tahunan bersih yang dibayar selama n -tahun untuk (x) , dengan jumlah manfaat B dalam hal terjadinya kegagalan selama periode asuransi.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Perhitungan Suku Bunga Model CIR

Parameter suku bunga dari model CIR dapat diperoleh berdasarkan data suku bunga historis Bank Indonesia (BI) dari tahun 2009 hingga 2023. Data suku bunga akan diinput ke dalam perangkat lunak Python untuk selanjutnya digunakan dalam mengestimasi parameter model CIR dan menghitung nilai MAPE.

3.1.1 Estimasi parameter model CIR

Sebelum melakukan estimasi parameter model CIR, terlebih dahulu dihitung nilai h dan g menggunakan persamaan (13) dan (14). Dengan interval waktu (Δt) selama 1 tahun dan jumlah total data suku bunga (n) sebanyak 15, diperoleh nilai $g = 0,026267$ dan $h = 0,538399$. Nilai g dan h ini kemudian digunakan untuk mengestimasi parameter κ , θ , dan σ_{CIR} menggunakan persamaan (10), (11), dan (12). Nilai setiap parameter diestimasi dan menghasilkan nilai $\kappa = 0,461601$, $\theta = 0,056904$, dan $\sigma_{CIR} = 0,048509$.

3.1.2 Prediksi suku bunga model CIR tahun 2009-2023

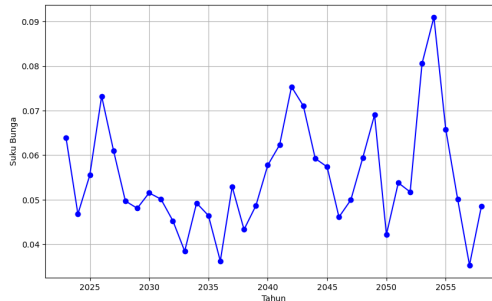
Nilai parameter estimasi yang diperoleh digunakan untuk memprediksi suku bunga tahun 2009-2023 dengan model CIR yang dimodifikasi menggunakan metode Euler-Maruyama dan proses Wiener. Data pada nilai parameter dan nilai interval waktu ($\Delta t = 1$) disubstitusikan ke dalam persamaan (9), menghasilkan model CIR berikut:

$$r_{t+1} = r_t + 0,461601(0,056904 - r_t) + 0,048509 \sqrt{r_t} \varepsilon.$$

Karena persamaan model CIR mencakup komponen stokastik $\varepsilon \sim N(0, 1)$, dilakukan iterasi berkali-kali untuk menghasilkan prediksi suku bunga hingga nilai MAPE yang dihitung menggunakan persamaan (16) lebih kecil dari 10%. Ambang batas 10% ditetapkan untuk nilai MAPE, hal ini menunjukkan bahwa model peramalan sangat akurat. Dengan menggunakan bantuan bahasa pemrograman Python, diperoleh hasil prediksi suku bunga tahun 2009-2023 dengan nilai MAPE sebesar 9,12%.

3.1.3 Prediksi suku bunga model CIR tahun 2024-2058

Prediksi suku bunga untuk tahun 2024-2058 dihitung dengan menggunakan suku bunga awal (r_0) tahun 2023 yaitu 0,063869 dan berdasarkan nilai estimasi parameter. Dengan menerapkan persamaan (9), diperoleh prediksi suku bunga tahun 2024-2058. Hasil prediksi ini hanya berlaku jika kondisi atau kejadian selama 35 tahun ke depan serupa dengan kondisi data historis dari periode tahun 2009-2023.



Gambar 1: Grafik suku bunga model CIR tahun 2023-2058

Gambar 1 menunjukkan bahwa suku bunga berfluktuasi setiap tahunnya, dengan suku bunga terendah terjadi pada tahun 2057 sebesar 0,035282 dan tertinggi pada tahun 2054 sebesar 0,090977. Selain itu, dapat diamati bahwa suku bunga selalu bernilai positif, mencerminkan karakteristik suku bunga model CIR. Data suku bunga tahun 2023-2058 kemudian akan digunakan dalam perhitungan premi, khususnya untuk menghitung faktor diskon.

3.2 Modifikasi Persamaan

Istilah untuk premi asuransi jiwa berjangka dalam kasus *multiple decrement* dapat diperoleh dengan memodifikasi beberapa persamaan dasar dari APV untuk asuransi jiwa berjangka, anuitas, dan premi. Secara spesifik, langkah-langkah modifikasi adalah sebagai berikut:

1. Modifikasi persamaan APV

Pada persamaan (17), modifikasi dilakukan dengan mempertimbangkan probabilitas bertahan hidup dan kegagalan seorang individu. Pertama, modifikasi dilakukan untuk satu jenis kegagalan. Probabilitas (x) bertahan hidup selama k tahun dan kemudian meninggal antara usia $x + k$ dan $x + k + 1$ (${}_kq_x$) dapat dimodifikasi menjadi model *multiple decrement* untuk penyebab kegagalan j dengan mensubstitusikannya ke dalam persamaan (2), menghasilkan persamaan

$$A_{x:\overline{n}|}^{1(j)} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)}. \quad (20)$$

Kemudian, untuk mendapatkan APV yang berlaku untuk semua jenis kegagalan ($j = 1, 2, \dots, m$), dilakukan penjumlahan APV untuk setiap jenis kegagalan. Dengan demikian, persamaan (20) dimodifikasi menjadi

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|}^{1(\tau)} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(1)} + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(2)} \\ &\quad + \dots + \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(m)}, \\ A_{x:\overline{n}|}^{1(\tau)} &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \right). \end{aligned}$$

Untuk memperhitungkan suku bunga yang bervariasi, faktor diskon dimodifikasi dengan mengganti v^{k+1} menggunakan persamaan (15). Dengan demikian, persamaan APV untuk asuransi jiwa berjangka dalam kasus *multiple decrement* dengan suku bunga bervariasi sebagai berikut

$$A_{x:\overline{n}|}^{1(\tau)} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} (v^*)^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \right). \quad (21)$$

2. Modifikasi persamaan anuitas

Modifikasi persamaan anuitas berjangka menjadi anuitas untuk kasus *multiple decrement* dilakukan agar jumlah premi yang dihasilkan untuk setiap pembayaran anuitas tidak hanya bergantung pada probabilitas (x) tidak mengalami satu jenis kegagalan (kematian), tetapi pada probabilitas (x) tidak mengalami semua jenis kegagalan. Persamaan (18) dimodifikasi dengan mensubstitusikan persamaan (15) untuk memperhitungkan suku bunga yang bervariasi dan memodifikasi probabilitas bertahan hidup (x) menjadi model *multiple decrement*, menghasilkan persamaan

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(\tau)} = \sum_{k=0}^{n-1} (v^*)^k {}_k p_x^{(\tau)}. \quad (22)$$

3. Modifikasi persamaan premi

Setelah memodifikasi persamaan APV dan anuitas untuk asuransi jiwa berjangka diskrit dalam kasus *multiple decrement* dengan suku bunga bervariasi, persamaan untuk menghitung premi tahunan ($P_x^{(\tau)}$) diperoleh dengan mensubstitusikan persamaan (21) dan (22) ke dalam persamaan (19), sehingga diperoleh

$$P_x^{(\tau)} = B \frac{A_{x:\overline{n}|}^{1(\tau)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(\tau)}},$$

$$P_x^{(\tau)} = B \frac{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} (v^*)^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \right)}{\sum_{k=0}^{n-1} (v^*)^k {}_k p_x^{(\tau)}}.$$

Namun, karena manfaat untuk setiap jenis kegagalan berbeda, manfaat (B) dimodifikasi untuk menyesuaikan dengan jenis kegagalan (j). Dengan demikian, persamaan APV untuk manfaat menjadi

$$A_{x:\overline{n}|}^{1(\tau)} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} B^{(j)} (v^*)^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \right) \quad (23)$$

dan premi sebagai berikut

$$P_x^{(\tau)} = \frac{\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} B^{(j)} (v^*)^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{x+k}^{(j)} \right)}{\sum_{k=0}^{n-1} (v^*)^k {}_k p_x^{(\tau)}}. \quad (24)$$

3.3 Perhitungan APV, Anuitas, dan Premi Tahunan

Sebelum menghitung APV, anuitas, dan premi asuransi jiwa berjangka untuk kasus *multiple decrement*, faktor diskon terlebih dahulu dihitung. Pada tahun 2023 ($t = 0$), faktor diskon diasumsikan bernilai 1 karena merupakan nilai saat ini dan tidak dipengaruhi oleh suku bunga. Oleh karena itu, faktor diskon dihitung untuk tahun 20242058 berdasarkan data suku bunga model CIR pada Gambar 1.

3.3.1 Perhitungan APV untuk asuransi jiwa berjangka dalam kasus *multiple decrement*

Nilai ${}_k p_x^{(\tau)}$ pada APV asuransi jiwa berjangka dalam kasus *multiple decrement* dihitung berdasarkan data *multiple decrement* yang diperoleh dari artikel ilmiah oleh Adilla dkk. [4]. Probabilitas bahwa seseorang (x) tidak mengalami kegagalan selama 0 tahun ke depan, ${}_0 p_x^{(\tau)}$, ditentukan bernilai 1, karena seseorang dipastikan tidak mengalami kegagalan pada saat tersebut. Menggunakan persamaan (1) dan dengan bantuan Python, diperoleh nilai untuk k dari 0 hingga 34.

Kemudian, perhitungan manfaat APV untuk individu usia 30 tahun dengan periode pertanggungan 35 tahun dapat dilakukan berdasarkan persamaan (23). Nilai manfaat yang diasumsikan untuk setiap jenis kegagalan adalah sebagai berikut: kematian ($j = 1$) 100 juta, pengunduran diri ($j = 2$) 15 juta, cacat permanen ($j = 3$) 50 juta, dan pensiun ($j = 4$) 100 juta. Dengan bantuan Python, manfaat APV masing-masing adalah Rp1.907.425,164602 ($j = 1$), Rp8.496.814,293519 ($j = 2$), Rp427.266,182022 ($j = 3$), dan Rp1.923.424,509469 ($j = 4$). Dengan demikian, manfaat APV untuk semua penyebab kegagalan adalah

$$A_{30:\overline{35}|}^{1(\tau)} = \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=0}^{34} B^{(j)}(v^*)^{k+1} {}_k p_x^{(\tau)} q_{30+k}^{(j)} \right),$$

$$= 12.754.930,149612.$$

3.3.2 Perhitungan anuitas asuransi jiwa berjangka dalam kasus *multiple decrement*

Selanjutnya, perhitungan anuitas jiwa diskrit pada awal untuk individu usia 30 tahun dengan masa pembayaran 35 tahun dalam kasus *multiple decrement* dilakukan. Berdasarkan faktor diskon dan data ${}_k p_{30}^{(\tau)}$, perhitungan anuitas menggunakan persamaan (22) dengan bantuan program pada Lampiran 10 adalah sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{30:\overline{35}|}^{(\tau)} = \sum_{k=0}^{34} (v^*)^k {}_k p_{30}^{(\tau)} = 7,260584.$$

3.3.3 Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Berjangka dalam Kasus *multiple decrement*

Setelah memperoleh nilai APV untuk manfaat dan anuitas asuransi jiwa berjangka dalam kasus *multiple decrement*, premi tahunan dapat dihitung. Perhitungan premi menggunakan persamaan (24) adalah sebagai berikut:

$$P_{30}^{(\tau)} = \frac{\sum_{j=1}^4 \left(\sum_{k=0}^{34} B^{(j)}(v^*)^{k+1} {}_k p_{30}^{(\tau)} q_{30+k}^{(j)} \right)}{\sum_{k=0}^{34} (v^*)^k {}_k p_{30}^{(\tau)}},$$

$$= 1.756.736,117868.$$

Oleh karena itu, berdasarkan perhitungan sebelumnya, premi tahunan untuk individu berusia 30 tahun dengan periode pertanggungan 35 tahun dalam kasus *multiple decrement* dengan 4 penyebab kegagalan adalah Rp1.756.736. Distribusi premi tahunan untuk setiap jenis kegagalan dapat dihitung menggunakan persamaan (20) dan (22). Dengan demikian, premi tahunan untuk setiap jenis kegagalan (j) adalah Rp262.709,606363 ($j = 1$), Rp1.170.265,95843 ($j = 2$), Rp58.847,357461 ($j = 3$), dan Rp264.913,195615 ($j = 4$).

Berdasarkan hasil tersebut, jenis kegagalan dengan kontribusi terbesar hingga terkecil terhadap premi tahunan berturut-turut adalah pengunduran diri, pensiun, kematian, dan cacat permanen. Hal ini menunjukkan bahwa probabilitas individu berusia 30 tahun dengan periode pertanggungan 35 tahun mengalami pengunduran diri lebih tinggi dibandingkan dengan jenis kegagalan lainnya,

sehingga kontribusi terhadap premi tahunan mencapai Rp1.170.266, meskipun manfaat yang diberikan adalah yang terkecil, yaitu 15 juta. Sebaliknya, kontribusi dari kegagalan akibat cacat permanen lebih rendah, yaitu hanya Rp58.847, meskipun manfaatnya sebesar 50 juta.

4 Kesimpulan

Penelitian ini menyimpulkan bahwa prediksi tingkat suku bunga dilakukan menggunakan data historis dari tahun 2009 hingga 2023 untuk memproyeksikan suku bunga pada periode 2024 hingga 2058. Tingkat suku bunga yang diprediksi menunjukkan fluktuasi, dengan suku bunga terendah terjadi pada tahun 2057 dan tertinggi pada tahun 2054. Selain itu, suku bunga yang dihasilkan selalu bernilai positif, sesuai dengan karakteristik suku bunga model CIR. Kemudian, premi asuransi jiwa berjangka untuk model *multiple decrement* dihitung dengan memodifikasi persamaan umum untuk APV dan premi berdasarkan tingkat suku bunga CIR. Premi tahunan untuk individu berusia 30 tahun dengan periode pertanggungan 35 tahun didapatkan sebesar Rp1.756.736. Penyebab kegagalan mengundurkan diri menjadi kegagalan yang memberikan kontribusi premi terbesar, yaitu Rp1.170.266, dengan manfaat sebesar 15 juta dan cacat permanen dengan kontribusi terkecil, yaitu Rp58.847, dengan manfaat sebesar 50 juta.

Daftar Pustaka

- [1] D. C. M. Dickson, M. R. Hardy, and H. R. Waters, *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. United Kingdom: Cambridge University Press, 3rd ed., 2020.
- [2] J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, "A theory of the term structure of interest rates," *Econometrica*, vol. 53, pp. 385–407, 1985.
- [3] S. J. Camilli, I. Duncan, and R. L. London, *Models for Quantifying Risk*. Winsted: ACTEX Publication, 6th ed., 2014.
- [4] I. Adilla, I. G. P. Purnaba, B. Ruhayat, B. Setiawaty, W. Erliana, and F. Septyanto, "Premi bersih tahunan asuransi jiwa berjangka untuk kasus multiple decrement dengan variasi suku bunga," *Milang*, vol. 18, pp. 139–153, 2020.
- [5] I. Kamila, A. Andriyati, and E. Rohaeti, "A comparison benefit reserves of an n-year term life insurance between using the vasicek model and cox-ingersoll-ross model," *Desimal*, vol. 7, pp. 17–24, 2024.
- [6] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*. London: Pearson Education, 11th ed., 2022.
- [7] P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equation*. Berlin: Springer, 1992.
- [8] D. C. Montgomery, E. A. Peck, and G. G. Vining, *Introduction to Linear Regression Analysis*. Canada: John Wiley and Sons, 5th ed., 2012.
- [9] S. G. Kellison, *The Theory of Interest*. New York: McGraw-Hill, third ed., 2009.
- [10] S. Makridakis, S. C. Wheelwright, and R. J. Hyndman, *Forecasting Methods and Applications*. Canada: John Wiley and Sons, 2008.
- [11] C. D. Lewis, *Industrial and Business Forecasting Methods*. London: Butterworth Scientific, 1982.