



ANALISIS PADA MODIFIKASI MODEL SIKLUS BISNIS KALDOR

MAHMUN AINULLAH¹, NORMA MUHTAR², EDI CAHYONO^{3*}

^{1,2,3}Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Halu Oleo

*edi_cahyono@innov-center.org

ABSTRAK

Model siklus bisnis adalah salah satu sistem dinamika dalam bidang ekonomi. Ada beberapa model siklus bisnis, di antaranya adalah model Kaldor. Model siklus bisnis Kaldor direpresentasikan dalam sistem persamaan diferensial. Model ini melibatkan variabel produksi dan stok modal yang dipengaruhi oleh investasi dan simpanan. Dalam tulisan ini, investasi dan simpanan diasumsikan sebagai fungsi logistik dan logaritma dari produksi. Selanjutnya ditentukan titik kesetimbangan model dan dianalisis kestabilannya pada daerah di sekitar titik kesetimbangan tersebut. Diperoleh dua titik kesetimbangan, satu bersifat tak stabil sementara satunya stabil dengan lintasan (*trajectory*) spiral. Solusi numerik juga ditampilkan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

Kata Kunci: Siklus Bisnis, Model Kaldor, Analisis Dinamika, Metode Runge-Kutta orde empat.

ABSTRACT

The business cycle model is a dynamical system in economics. There are several business cycle models, one of them is Kaldor model. The Kaldor business cycle model is represented in a system of differential equations. This model involves variables of production and capital stocks, investment and saving. In this paper, investment and saving are assumed to be logistical functions and logarithms of production. Furthermore, the model equilibrium points are observed and the stability is analyzed in the area around the points. It is obtained that there are two equilibrium points, one is unstable while the other is stable with a spiral trajectory. Numerical solutions are also presented using the fourth order Runge-Kutta method.

Keywords: Business Cycle, Kaldor Model, Dynamics Analysis, Fourth-order Runge-Kutta Method.

1 Pendahuluan

Perekonomian ideal adalah perekonomian yang pertumbuhannya stabil, yang selalu mengalami peningkatan dari waktu ke waktu. Namun pada kenyataannya, perekonomian yang ideal sangat sulit dicapai. Secara umum perekonomian selalu mengalami gelombang pasang surut pada periode tertentu. Dalam ekonomi, pasang surut ini dikenal dengan istilah siklus ekonomi atau siklus bisnis (*business cycle*). Siklus bisnis adalah fluktuasi aktivitas ekonomi yang tidak teratur dan tidak dapat diprediksi, diukur dengan produksi barang dan jasa atau jumlah tenaga kerja [19].

Siklus bisnis merupakan siklus yang sering terjadi pada suatu perekonomian. Siklus ini dapat mengakibatkan perubahan perekonomian suatu negara. Perubahan ini dapat berdampak baik atau buruk bagi perekonomian. Oleh karena itu, untuk mengantisipasi risiko yang

mungkin terjadi pada periode mendatang, perlu dilakukan “peramalan” untuk memprediksi perubahan-perubahan selanjutnya. Peramalan ini dapat dilakukan dengan menggunakan konsep pemodelan matematika sehingga menghasilkan suatu model siklus bisnis.

Model siklus bisnis merupakan salah satu sistem dinamik dalam bidang ekonomi. Ada beberapa model siklus bisnis, salah satunya adalah model siklus bisnis Kaldor. Model siklus bisnis Kaldor merupakan model yang melibatkan produksi (Y), modal (K), investasi (I) dan simpanan (S). Dalam model ini diasumsikan bahwa laju Produksi merupakan selisih antara fungsi investasi dan fungsi simpanan dikali dengan koefisien penyesuaian pasar. Sedangkan laju modal adalah selisih antara keputusan investasi dan konsumsi modal.

Terdapat dua hal yang sangat berpengaruh dalam model ini, yaitu investasi (*investment*) dan simpanan (*saving*). Pada tulisan ini penulis memodifikasi model Kaldor pada dua bagian tersebut, yaitu modifikasi pada fungsi investasi dengan menggunakan pendekatan fungsi logistik dan modifikasi pada fungsi simpanan dengan menggunakan logaritma dari produksi.

Deskripsi matematis model Kaldor mengarah pada persamaan diferensial non linear. Model ini dapat menggambarkan dinamika variabel yang lebih kompleks. Pendekatan yang didasarkan pada non-linearitas fungsi investasi biasanya menggunakan sistem dari dua atau lebih persamaan diferensial [16]. Model Kaldor menggunakan sistem persamaan diferensial non linear yang terdiri atas dua persamaan diferensial biasa. Model ini sangat sulit untuk dicari solusi eksaknya, biasanya para peneliti menggunakan metode analitik maupun numerik untuk mencari solusi dari model seperti ini.

Siklus bisnis maupun siklus ekonomi, masih merupakan topik yang menarik perhatian para peneliti, baik dari sisi ilmu ekonomi, maupun dari sisi matematika. Beberapa studi tentang siklus bisnis dilaporkan pada [3, 4, 8, 21].

2 Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kepustakaan (*library research*) dengan prosedur kerja sebagai berikut:

1. Penelusuran pustaka yang berkaitan dengan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini.
2. Mengkaji dan menganalisis Model Siklus Bisnis Kaldor.
3. Memodifikasi fungsi investasi (*investment*) dengan menggunakan pendekatan persamaan logistik sebagai salah satu bentuk fungsi non-linear.
4. Memodifikasi fungsi simpanan (*saving*) dengan menggunakan pendekatan fungsi logaritma dari produksi.
5. Mencari solusi numerik dari model hasil modifikasi dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Siklus Bisnis Kaldor

Model Siklus bisnis Kaldor yang diperkenalkan oleh Nicholas Kaldor ini adalah suatu sistem dinamik dalam bidang ekonomi yang direpresentasikan sebagai sistem persamaan diferensial.

Secara matematis model Kaldor dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\dot{Y}(t) = a[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t))] \quad (1)$$

$$\dot{K}(t) = I(Y(t), K(t)) - \delta K(t) \quad (2)$$

Dimana:

| | |
|-----------------|---|
| $Y(t)$ | : Produksi riil |
| $K(t)$ | : Modal |
| $I(Y(t), K(t))$ | : Investasi |
| $S(Y(t))$ | : Simpanan |
| a | : Koefisien penyesuaian di pasar barang ($a > 0$) |
| δ | : Tingkat depresiasi stok modal ($\delta \in (0, 1)$) |

3.2 Modifikasi Model Kaldor

Secara umum, model Kaldor merupakan sebuah sistem persamaan diferensial biasa orde satu yang dibentuk oleh fungsi investasi dan fungsi simpanan. Kedua fungsi ini diasumsikan bersifat non linear. Dalam penelitian ini model Kaldor dimodifikasi pada kedua fungsi tersebut.

a. Modifikasi Fungsi Investasi

$$\dot{Y}(t) = a[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t))] \quad (3)$$

$$\dot{K}(t) = I(Y(t), K(t)) - \delta K(t) \quad (4)$$

Misalkan dianggap setiap fungsi-fungsi di atas bukanlah sebuah fungsi terhadap waktu (system autonom), maka model di atas merupakan sebuah sistem yang hanya dibentuk oleh dua fungsi, yaitu $J(Y, K)$ dan Y . Dimana $J(Y, K)$ diasumsikan merupakan frekuensi rasio produksi dan investasi atau biasa disebut dengan kecenderungan untuk berinvestasi. Pada bagian ini hanya akan analisis solusi pada rasio tersebut, sehingga fungsi $J(Y, K)$ dapat dituliskan menjadi:

$$J(Y, K) = J\left(\frac{Y}{K}\right) \quad (5)$$

Misalkan $y = \log Y$ dan $k = \log K$, maka:

$$J(Y, K) = J\left(\frac{Y}{K}\right) = J(e^{y-k}) = i(y - k) \quad (6)$$

Dimana $i(y - k)$ adalah kecenderungan untuk berinvestasi (*propensity to invest*).

Jika fungsi $i(y(t) - k(t))$ ini kita dekati dengan menggunakan fungsi logistik, maka:

$$\frac{d i(r)}{d r} = i(r) (1 - i(r)) \quad (7)$$

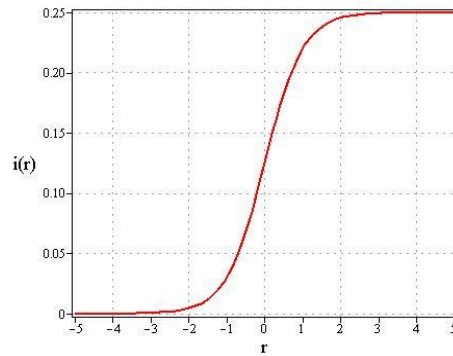
Dengan $r : y(t) - k(t)$

Solusi untuk persamaan (7) diperoleh sebagai berikut:

$$i(r) = \frac{a i_0}{b i_0 + (a - b i_0) e^{-ar}} \quad (8)$$

$$i(y(t) - k(t)) = \frac{a i_0}{b i_0 + (a - b i_0) e^{-a(y(t) - k(t))}} \quad (9)$$

Simulasi numerik dari persamaan (9) dengan $a = 2, b = 8, i_0 = \frac{1}{8}$ dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 1. Fungsi logistik kecenderungan berinvestasi

Berdasarkan Teori Keynesian, investasi berhubungan positif dengan produksi, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$I = i Y$$

Dimana i adalah kecenderungan untuk berinvestasi (*propensity to invest*). Sehingga fungsi investasi dapat dituliskan menjadi:

$$I(Y(t), K(t)) = i(y(t) - k(t))Y(t) \quad (10)$$

$$I(Y(t), K(t)) = \frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y(t)-k(t))}} Y(t) \quad (11)$$

b. Modifikasi Fungsi Simpanan

Misalkan kecenderungan untuk menyimpan (*propensity to save*) kita asumsikan tumbuh berdasarkan logaritma produksi, maka fungsi kecenderungan untuk menyimpan dapat dituliskan:

$$s(\log Y(t)) = s_0 + s_1 \log Y \quad (12)$$

Karena $y = \log Y$, maka:

$$s(y(t)) = s_0 + s_1 y(t) \quad (13)$$

Berdasarkan teori Keynesian, simpanan juga berhubungan positif dengan produksi, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$S = s Y$$

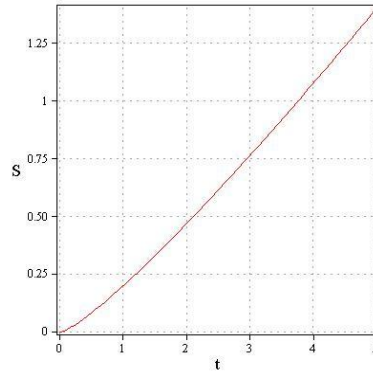
Dimana s adalah kecenderungan untuk menyimpan (*propensity to save*).

Sehingga fungsi simpanan dapat dituliskan menjadi:

$$S(Y(t)) = s(y(t))Y(t) \quad (14)$$

$$S(Y(t)) = (s_0 + s_1 y(t))Y(t) \quad (15)$$

Simulasi numerik dari persamaan (15) untuk $s_0 = 0.2$ dan $s_1 = 0.05$ dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 2. Fungsi Simpanan Riil

Dengan menggunakan hasil modifikasi dari fungsi logistik pada persamaan (10) dan modifikasi fungsi simpanan pada persamaan (14), maka persamaan (3) dan (4) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\dot{Y}(t) = a[i(y(t) - k(t))Y(t) - s(y(t))(Y(t))] \quad (16)$$

$$\dot{K}(t) = i(y(t) - k(t))Y(t) - \delta K(t) \quad (17)$$

Jika persamaan (16) dibagi dengan $Y(t)$ dan persamaan (17) dibagi dengan $K(t)$, akan diperoleh:

$$\dot{y}(t) = a[i(y(t) - k(t)) - s(y(t))] \quad (18)$$

$$\dot{k}(t) = i(y(t) - k(t))e^{y(t)-k(t)} - \delta \quad (19)$$

Dimana:

$$\dot{y}(t) = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}, \quad \dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} \quad \text{dan} \quad \frac{Y(t)}{K(t)} = e^{y(t)-k(t)}$$

Kemudian jika persamaan (9) dan persamaan (13) disubstitusikan masing-masing kepersamaan (18) dan (19), akan diperoleh:

$$\dot{y}(t) = a \left[\frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y(t)-k(t))}} - s_0 + s_1 y(t) \right] \quad (20)$$

$$\dot{k}(t) = \frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y(t)-k(t))}} e^{y(t)-k(t)} - \delta \quad (21)$$

3.3 Analisis Dinamik Model Kaldor

Berdasarkan hasil modifikasi Model Kaldor di atas diperoleh model seperti pada persamaan (20) dan persamaan (21). Pada bagian ini akan dinalisis dinamika pada model hasil modifikasi tersebut.

a. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan diperoleh jika:

$$\dot{y}(t) = \dot{k}(t) = 0$$

Sehingga, dari persamaan (20) dan persamaan (21) akan diperoleh titik kesetimbangan jika:

$$0 = a \left[\frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y(t)-k(t))}} - s_0 + s_1 y(t) \right]$$

$$0 = \frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y(t)-k(t))}} e^{y(t)-k(t)} - \delta$$

Dengan menggunakan *software* Maple 13 diperoleh titik kesetimbangan sistem tersebut sebagai berikut:

$$E(y, k) = \left(\frac{-s_0 e^c + \delta}{e^c s_1}, \frac{-s_0 e^c + \delta - s_1 e^c c}{e^c s_1} \right)$$

Dengan: $c =$ akar dari persamaan $ax + \ln \frac{i_0(ae^x - \delta)}{\delta(a - bi_0)} = 0$

Jika kita mengambil nilai untuk parameter $a = 2, b = 8, i_0 = \frac{1}{8}, s_0 = 0.2, s_1 = 0.05, \delta = 0.1$, maka akan diperoleh tiga titik kesetimbangan sebagai berikut:

$$E_1(y, k) = (-1.7705, -1.6619)$$

$$E_2(y, k) = (-5.1147 - 2.7799 I, -4.7109 - 4.73208 I)$$

$$E_3(y, k) = (-5.1147 + 2.7799 I, -4.7109 + 4.73208 I)$$

b. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan dianalisis dengan menggunakan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jakobi hasil pelinearan sistem persamaan Kaldor.

Misalkan:

$$f_1(y, k) = a \left[\frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y-k)}} - s_0 + s_1 y \right]$$

$$f_2(y, k) = \frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y-k)}} e^{y(t)-k(t)} - \delta$$

Perilaku selesaian sistem nonlinear $\frac{dx}{dt} = f(x)$ di sekitar titik kesetimbangan dapat di dekati dengan meninjau sifat solusi linear dari:

$$\dot{x} = Ax$$

Dengan A adalah matriks Jakobian.

Berdasarkan dari Model Kaldor di atas diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dimana:

$$a_{11} = \alpha \left(\frac{a^2 i_0 (a - bi_0) e^{-a(y-k)}}{(bi_0 + (a - bi_0) e^{-a(y-k)})^2} - s_1 \right)$$

$$a_{12} = \frac{-\alpha a^2 i_0 (a - bi_0) e^{-a(y-k)}}{(bi_0 + (a - bi_0) e^{-a(y-k)})^2}$$

$$a_{21} = \frac{a^2 i_0 e^{y-k} (a - bi_0) e^{-a(y-k)}}{(bi_0 + (a - bi_0) e^{-a(y-k)})^2} + \frac{ai_0 e^{y-k}}{bi_0 + (a - bi_0) e^{-a(y-k)}}$$

$$a_{22} = -\frac{a^2 i_0 e^{y-k} (a - bi_0) e^{-a(y-k)}}{(bi_0 + (a - bi_0) e^{-a(y-k)})^2} - \frac{ai_0 e^{y-k}}{bi_0 + (a - bi_0) e^{-a(y-k)}}$$

Jika kita mengambil nilai untuk masing-masing parameter $a = 2, b = 8, i_0 = \frac{1}{8}, s_0 = 0.2, s_1 = 0.05, \delta = 0.1$, maka akan diperoleh matriks Jakobian sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Dimana:

$$a_{11} = \frac{15}{2} \left(\frac{e^{-2y+2k}}{(1 + e^{-2y+2k})^2} - 0.75 \right)$$

$$a_{12} = -\frac{15}{2} \left(\frac{e^{-2y+2k}}{(1 + e^{-2y+2k})^2} \right)$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} \frac{e^{y-k} e^{-2y+2k}}{(1 + e^{-2y+2k})^2} + \frac{1}{4} \frac{e^{y-k}}{1 + e^{-2y+2k}}$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} \frac{e^{y-k} e^{-2y+2k}}{(1 + e^{-2y+2k})^2} + \frac{1}{4} \frac{e^{y-k}}{1 + e^{-2y+2k}}$$

▪ **Analisis Kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan E_1**

Sifat kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan E_1 dianalisis dengan mesubsitusikan titik kesetimbangan E_1 kedalam matriks jacobian, diperoleh:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.103047987 & -1.853047987 \\ 0.2108202312 & -0.2108202312 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari matriks A_1 dengan cara menyelesaikan persamaan berikut:

$$|\lambda I - A_1| = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.103047987 & -1.853047987 \\ 0.2108202312 & -0.2108202312 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda - 1.103047987 & 1.853047987 \\ -0.2108202312 & \lambda + 0.2108202312 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda^2 - 0.89223 \lambda + 0.15811 = 0$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas maka akan diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0.64836$ dan $\lambda_2 = 0.2438704$. Berdasarkan nilai eigen dari matriks A_1 yaitu keduanya bernilai positif maka dapat disimpulkan bahwa sifat kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan E_1 adalah tidak stabil.

▪ **Analisis Kestabilan Sistem di Sekitar Titik Kesetimbangan E_2**

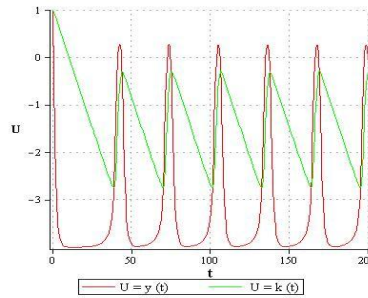
Dengan cara yang sama dengan E_1 diperoleh nilai eigen dari E_2 yaitu $\lambda_1 = -0.18612 + 0.39403 I$ dan $\lambda_2 = -0.80250 - 6.17984 I$. Berdasarkan nilai eigen dari matriks A_2 yaitu keduanya merupakan bilangan kompleks, dimana masing-masing bagian realnya bernilai negatif, maka dapat disimpulkan bahwa sifat kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan E_2 adalah spiral stabil.

▪ **Analisis Kestabilan Sistem di Sekitar Titik Kesetimbangan E_3**

Dengan cara yang sama dengan E_1 diperoleh nilai eigen dari E_3 yaitu $\lambda_1 = -0.18612 - 0.39403 I$ dan $\lambda_2 = -0.80250 + 6.17984 I$. Berdasarkan nilai eigen dari matriks A_3 yaitu keduanya merupakan bilangan kompleks, dimana masing-masing bagian realnya bernilai negatif, maka dapat disimpulkan bahwa sifat kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan E_3 adalah spiral stabil.

3.4 Simulasi Numerik

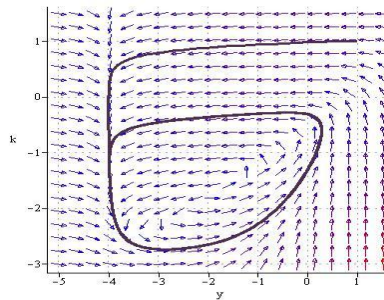
Berdasarkan hasil modifikasi model Kaldor, dengan mengambil nilai parameter-parameter $a = 2, b = 8, i_0 = \frac{1}{8}, s_0 = 0.2, s_1 = 0.05, \delta = 0.1, t = 200$, maka dapat diperoleh simulasi numerik untuk solusi dari modifikasi persamaan Kaldor sebagai berikut:



Gambar 3. Grafik Solusi Fungsi Produksi dan Modal

Berdasarkan hasil simulasi numerik dari solusi persamaan Kaldor di atas dapat dilihat bahwa, grafik dari fungsi produksi maupun fungsi modal cenderung berisolasi atau berfluktuasi pada interval waktu tertentu.

Lebih lanjut, untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangannya dapat menggunakan *phaseportrait* dari sistem tersebut. Dengan mengambil nilai parameter-parameter $a = 2, b = 8, i_0 = \frac{1}{8}, s_0 = 0.2, s_1 = 0.05, \delta = 0.1$, maka diperoleh *phaseportrait* untuk sistem tersebut, sebagai berikut:



Gambar 4. Phase portrait Model Kaldor

3.5 Solusi Numerik Model Kaldor

Untuk menentukan solusi dari persamaan non-linear dapat menggunakan analisis numerik. Salah satu metode numerik yang bisa digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial adalah Metode Runge-Kutta. Pada bagian ini, akan digunakan Metode Runge-Kutta orde empat sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, y_i) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(t_i + h, y_i + k_2) \end{aligned}$$

Tinjau kembali hasil modifikasi model Kaldor pada persamaan (20) dan persamaan (21) sebagai berikut:

$$\dot{y}(t) = a \left[\frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y(t)-k(t))}} - s_0 + s_1y(t) \right] \quad (20)$$

$$\dot{k}(t) = \frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y(t)-k(t))}} e^{y(t)-k(t)} - \delta \quad (21)$$

Misalkan:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y, k) \\ \dot{k}(t) &= g(t, y, k) \end{aligned}$$

Untuk $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 1$, $k(0) = 1$, maka solusi dari sistem tersebut dapat dihitung dengan langkah-langkah sebagai berikut (catatan: $a = 2$, $b = 8$, $i_0 = \frac{1}{8}$, $s_0 = 0.2$, $s_1 = 0.05$, $\delta = 0.1$):

1. Menghitung panjang langkah (h). Pada penelitian sebagai contoh diambil $n = 10$, maka diperoleh $h = 0.2$
2. Menghitung nilai n_1, n_2, n_3, n_4 dan m_1, m_2, m_3, m_4 .
3. Menghitung nilai y dan k

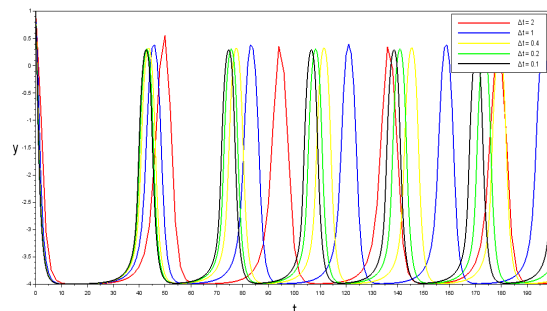
Dengan menggunakan software *Scilab 5.5.2*, diperoleh solusi untuk y dan k dengan iterasi sebanyak 10 sebagai berikut:

Tabel 1. Solusi Numerik Persamaan Kaldor

| i | t_i | y_i | k_i |
|-----|-------|----------|--------|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0.2 | 0.6306 | 1.005 |
| 2 | 0.4 | 0.2339 | 0.9966 |
| 3 | 0.6 | -0.23139 | 0.9807 |
| 4 | 0.8 | -0.6997 | 0.9619 |
| 5 | 1.0 | -1.1352 | 0.9423 |
| 6 | 1.2 | -1.5235 | 0.9224 |
| 7 | 1.4 | -1.8632 | 0.9024 |
| 8 | 1.6 | -2.1581 | 0.8825 |
| 9 | 1.8 | -2.4131 | 0.8625 |
| 10 | 2.0 | -2.6331 | 0.842 |

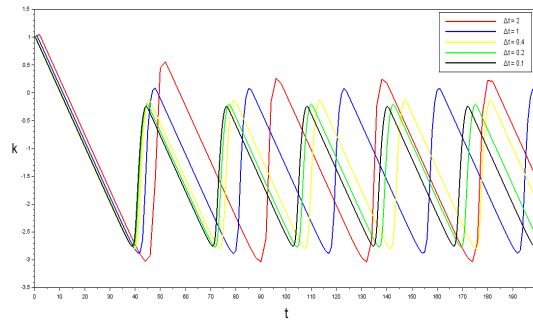
Lebih lanjut, jika kita membuat interval yang lebih besar dengan beberapa *stepsize* yang berbeda, maka akan diperoleh grafik solusi untuk produksi dan modal sebagai berikut:

1. Untuk fungsi produksi pada interval $0 \leq t \leq 200$, dengan banyak iterasi 100, 200, 500, 1000 dan 2000, akan diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 5. Grafik Solusi Fungsi Produksi

2. Untuk fungsi modal pada interval $0 \leq t \leq 200$, dengan banyak iterasi 100, 200, 500, 1000 dan 2000, akan diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 6. Grafik Solusi Fungsi Modal

Berdasarkan grafik di atas dapat dilihat bahwa, dengan mengubah nilai n (banyak iterasi) atau mengubah $stepsiz$ e, maka periode dari grafik yang dihasilkan akan berubah, semakin besar nilai n ($n \rightarrow \infty$) yang diberikan, maka solusi yang dihasilkan akan mendekati solusi yang sebenarnya.

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang diperoleh, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Model siklus bisnis Kaldor merupakan suatu sistem persamaan diferensial yang terdiri dari dua persamaan diferensial non linear. Dengan menggunakan pendekatan fungsi logistik dan fungsi logaritma produksi sebagai representasi dari fungsi non linear, maka model tersebut dapat dimodifikasi kedalam bentuk yang lebih kompleks sebagai berikut:

$$\dot{y}(t) = a \left[\frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y(t)-k(t))}} - (s_0 + s_1y(t)) \right]$$

$$\dot{k}(t) = \frac{ai_0}{bi_0 + (a - bi_0)e^{-a(y(t)-k(t))}} e^{y(t)-k(t)} - \delta$$

2. Dari hasil analisis dinamik model Kaldor diperoleh, diperoleh titik kesetimbangan untuk sistem tersebut. Jika dipilih nilai untuk parameter $a = 2$, $b = 8$, $i_0 = \frac{1}{8}$, $s_0 = 0.2$, $s_1 = 0.05$, $\delta = 0.1$, maka akan diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu:

$$E_1(y, k) = (-1.7705, -1,6619)$$

$$E_2(y, k) = (-5.1147 - 2.7799 I, -4.7109 - 4.73208 I)$$

$$E_3(y, k) = (-5.1147 + 2.7799 I, -4.7109 + 4.73208 I)$$

Masing-masing tidak stabil dan spiral stabil

3. Dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan jika dipilih nilai parameter $a = 2$, $b = 8$, $i_0 = \frac{1}{8}$, $s_0 = 0.2$, $s_1 = 0.05$, dan $\delta = 0.1$ pada interval $0 \leq t \leq 2$, diperoleh solusi dari model tersebut seperti yang ditampilkan pada tabel 1. Solusi ini diperoleh dengan mengambil panjang langkah 0.2. Dalam interval waktu (t) yang sama, jika panjang langkahnya dibuat semakin kecil, maka solusi dari model akan mendekati solusi yang sebenarnya.

5 Ucapan Terima Kasih

Riset yang dilakukan oleh Edi Cahyono dibiayai oleh Hibah Kompetensi of Kementerian Riset, Teknologi dan Perguruan Tinggi Republik Indonesia, via Universitas Halu Oleo, [Contract No. 447/UN29.20/PPM/2018].

Daftar Pustaka

- [1] Arrowsmith, D.K. dan Place, C.M. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge. Cambridge University Press. 1990.
- [2] Arrowsmith, D.K. dan Place, C.M. *Dynamical System: Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*. London. Chapman & Hall/HRC. 1992.
- [3] Bashkirtseva, I., Ryashko, L. dan Sysolyatina, A. Analysis of stochastic effects in Kaldor type business cycle discrete model. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2016, 36: 446 - 456.
- [4] Bashkirtseva, I. Ryashko, L. dan Ryazanova, T. Stochastic sensitivity analysis of the variability of dynamics and transition to chaos in the business cycles model. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018, 54: 174 - 184.
- [5] Bellman, R. dan Cooke K.L. *Differential-Difference Equations*. New York-London. Academic Press. 1963.
- [6] Cahyono, E. *Pemodelan Matematika*. Bahan Kuliah pada Jurusan Matematika FMIPA UHO, Kendari. 2009.
- [7] Cahyono, E. *Pemodelan Matematika*. Bahan Kuliah pada Jurusan Matematika FMIPA UHO, Kendari. 2013.
- [8] Cahyono, E., Saidi, L. O., Makkulau, Syarif, M. dan Raya R. Quantitative aspects of business/economic cycle. *Proceeding of the 3rd SHIELD International Conference of 2018*: 56 – 64.
- [9] Chang, W. W. and Smyth, D. J. The Existence and Persistence of Cycles in a Non-linear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined. *Review of Economic Studies* 38. 1971. 37-44.
- [10] Dwiningtias, R. and Abadi. Model Siklus Bisnis IS-LM dengan Tundaan. *MATHunesa* 3: No 2. 2014. 24-30.
- [11] Fudziah, I. and Raed, A.A. Solving Delay Differential Equations Using embedded singly diagonally Implicit runge-kutta methods. *Acta Mathematica Vietnamica* 33: 2008. 95-105.
- [12] Howard, A. and Chris, R. *Elementary Linear Algebra with Applications*. nine Edition. New York. J. Willey. 2005.
- [13] Kodera, J., Radova, J. and Quang T.V. A Modification of Kaldor-Kalecki Model and its Analysis. *30th International Conference Mathematical Methods in Economics*. 2012 420-425.
- [14] Krawiec, A. and Szydowski, M. The Kaldor-Kalecki model of business cycle as a two dimensional dynamical system. *Nonlinear Mathematical Physics* 8. 2001.288-271.
- [15] Mankiw, N.G. *Principles of Economics*. South Western. Cengage Learning. 2017.
- [16] Morris, W. H., Stephen, S. and Robert, L. D. *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction To Chaos Second Edition*. California. Academic Press. 2004.
- [17] Panfilov, A. *Qualitative Analysis of differensial Equations*. Utrecht University. Utrecht. 2010.
- [18] Rochmad. *Persamaan Diferensial*. Bahan Ajar Jurusan Matematika FMIPA UNNES.

- Semarang. 2008.
- [19] Soekartawi. Teori Ekonomi Produksi: Dengan Pokok Bahasan Analisis Cobb Douglas. Jakarta: Rajawali Pers. 1990.
 - [20] Strogatz, S.H. Nonlinear Dynamics and Chaos, With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachuset. 1994.
 - [21] Syarif, M., Cahyono, E. dan Adam, P. Study on business cycle in Indonesian economy: A signal processing approach. Global and Stochastic Analysis. Vol. 5 No. 6 Special Issue 2018. 35 – 43.
 - [22] Tu, P.N.V. Dynamical Systems: An Introduction with Applications in Economics and Biology. Springer-Verlag. New York. 1994.