J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 10 No. 1 (2026) pp. 130-143
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN: 2581-0154
DOI: doi.org/10.26740/jram.v10n1.p130-143

ANALISIS SOLUSI NUMERIK SISTEM DUFFING-CHEN MENGGUNAKAN METODE *HERONIAN MEAN* RUNGE-KUTTA ORDE 4

YULITA MOLLIQ RANGKUTI, ELIDA SILABAN*, GRACE ANALIA STEPHANI HUTAURUK, DAN ADITYA ARIO PANGESTU

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia

*Penulis Korespondensi: elida.4232530004@mhs.unimed.ac.id

ABSTRAK

Sistem Duffing–Chen merupakan sistem dinamik nonlinier yang memiliki karakteristik chaotic dan sensitivitas tinggi terhadap kondisi awal, sehingga sering digunakan untuk memodelkan fenomena kompleks dalam bidang fisika dan rekayasa. Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan sistem Duffing–Chen secara numerik menggunakan metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 serta menganalisis evolusi sistem terhadap waktu. Kebaruan penelitian ini terletak pada penerapan rata-rata Heronian dalam metode Runge-Kutta Orde 4 sebagai pengembangan metode numerik untuk meningkatkan kestabilan solusi pada sistem nonlinier kompleks. Penyelesaian dilakukan melalui simulasi numerik dengan mempertimbangkan pengaruh parameter dan kondisi awal terhadap dinamika sistem. Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode yang digunakan mampu menghasilkan solusi numerik yang stabil serta menampilkan pola dinamika chaotic yang konsisten. Selain itu, sistem menunjukkan sensitivitas tinggi terhadap perubahan kondisi awal dan parameter, yang divisualisasikan melalui grafik time series dan ruang fase tiga dimensi. Temuan ini menunjukkan kontribusi metode Heronian Mean dalam analisis sistem dinamik nonlinier dan penggambaran evolusi sistem secara lebih jelas.
Kata Kunci: Metode Heronian Mean, Metode Numerik, Pemrograman Python, Runge-Kutta Orde 4, Sistem Duffing-Chen.

ABSTRACT

The Duffing–Chen system is a nonlinear dynamical system that has chaotic characteristics and high sensitivity to initial conditions, so it is often used to model complex phenomena in physics and engineering. This study aims to solve the Duffing–Chen system numerically using the 4th Order Heronian Mean Runge-Kutta method and analyze the system's evolution over time. The novelty of this study lies in the application of the Heronian mean in the 4th Order Runge-Kutta method as a development of a numerical method to improve the stability of solutions in complex nonlinear systems. The solution is carried out through numerical simulations by considering the influence of parameters and initial conditions on the system dynamics. The simulation results show that the method used is able to produce stable numerical solutions and displays a consistent chaotic dynamic pattern. In addition, the system shows high sensitivity to changes in initial conditions and parameters, which is visualized through time series graphs and three-dimensional phase space. These findings demonstrate the contribution of the Heronian Mean method in the analysis of nonlinear dynamical systems and a clearer depiction of system evolution.
Keywords: *Duffing-Chen System, Fourth Order Runge-Kutta, Heronian Mean Method, Numerical Methods, Python Programming.*

2020 *Mathematics Subject Classification*: 65L06, 37M05.
Diterima: 15-03-2025, direvisi: 23-04-2026, dimuat: 26-04-2026

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan bagian penting dari ilmu matematika yang sering digunakan dalam pemecahan masalah fisika. Secara garis besar, berbagai persoalan fisika dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial karena menggambarkan hubungan antara suatu besaran dengan perubahan yang terjadi [1]. Persamaan diferensial hadir dalam berbagai bentuk, mulai dari yang sederhana dan mudah diselesaikan hingga persamaan nonlinier yang sangat kompleks dan sulit dipecahkan secara analitik [2]. Oleh sebab itu, metode numerik menjadi salah satu alternatif yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial yang kompleks tersebut. Beberapa metode numerik yang umum digunakan antara lain Metode Euler, Metode Heun, Metode Deret Taylor, Metode Runge-Kutta, dan Metode Prediktor-Korektor. Penyelesaian yang diperoleh dari metode numerik bukan merupakan solusi umum, melainkan solusi khusus atau solusi numerik dengan nilai awal atau nilai batas tertentu. Salah satu metode yang paling sering digunakan adalah metode Runge-Kutta, khususnya Runge-Kutta orde empat, karena memiliki tingkat ketelitian dan akurasi yang tinggi sehingga solusi yang diperoleh mendekati solusi analitik. Dalam proses penyelesaiannya, bahasa pemrograman Python juga dapat digunakan sebagai alat bantu perhitungan numerik.

Salah satu model persamaan diferensial nonlinier yang banyak digunakan untuk merepresentasikan dinamika kompleks adalah sistem Duffing–Chen. Sistem ini merupakan kombinasi antara osilator Duffing dan sistem Chen yang dikenal dalam kajian chaos. Sistem Duffing–Chen digunakan untuk memodelkan fenomena kompleks dalam bidang fisika dan rekayasa, terutama pada sistem yang menunjukkan perilaku nonlinier dan sensitivitas tinggi terhadap kondisi awal [3,4]. Karakteristik utama sistem ini adalah kemampuannya menghasilkan perilaku chaotic, di mana perubahan kecil pada kondisi awal dapat menyebabkan perbedaan solusi yang signifikan [5]. Pentingnya mempelajari sistem Duffing–Chen terletak pada kemampuannya merepresentasikan dinamika sistem nyata yang kompleks, seperti getaran nonlinier, sistem mekanik, dan fenomena ketidakstabilan. Selain itu, sistem ini juga digunakan untuk memahami fenomena chaos berdimensi tinggi, terutama dengan adanya variabel tambahan yang memperkaya dinamika sistem [6].

Beberapa penelitian sebelumnya telah membahas penyelesaian sistem nonlinier menggunakan metode numerik, khususnya metode Runge-Kutta yang dikenal memiliki tingkat akurasi dan kestabilan yang baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial [7][8]. Selain itu, metode Runge-Kutta juga banyak digunakan dalam komputasi ilmiah karena mampu menghasilkan solusi yang mendekati nilai eksak [9]. Penelitian lain telah mengembangkan variasi metode Runge-Kutta untuk meningkatkan akurasi, seperti penggunaan rata-rata geometri dalam proses perhitungan [10]. Namun, penelitian tersebut masih terbatas pada metode konvensional dan belum secara khusus mengkaji penggunaan rata-rata Heronian pada sistem nonlinier kompleks seperti Duffing–Chen. Berdasarkan hal tersebut, penelitian ini menerapkan metode Heronian Mean dalam Runge-Kutta Orde 4 untuk menyelesaikan sistem Duffing–Chen. Pendekatan ini menggunakan kombinasi rata-rata aritmatika dan geometrik dalam proses integrasi numerik sehingga diharapkan mampu meningkatkan kestabilan dan mengurangi kesalahan aproksimasi pada sistem chaotic. Selain itu, penelitian ini juga menganalisis pengaruh parameter dan kondisi awal terhadap dinamika sistem melalui visualisasi grafik time series dan ruang fase tiga dimensi.

Metode Runge-Kutta orde 4 (RK4) merupakan suatu pendekatan numerik yang berguna untuk menemukan solusi dari persamaan diferensial biasa. Metode Runge-Kutta Orde 4 yang digunakan dalam penelitian ini mengacu pada formulasi standar penyelesaian persamaan diferensial biasa yang dinyatakan sebagai berikut [7]:

$$y_{n+1} - y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

dimana:

y_n	: nilai solusi pada langkah ke-n
y_{n+1}	: nilai solusi pada langkah berikutnya
h	: ukuran langkah (step size)
k_1, k_2, k_3, k_4	: kemiringan (slope) yang dihitung dari fungsi turunan pada titik tertentu
$f(t, y)$	: fungsi dari persamaan diferensial.
h	: langkah atau jarak antara x_n dan x_{n+1}.

Formulasi ini merupakan metode numerik standar yang banyak digunakan dalam penyelesaian sistem diferensial karena memiliki akurasi yang tinggi dan kestabilan yang baik [8].

Konsep Heronian Mean merupakan salah satu bentuk rata-rata yang digunakan dalam teori ketaksamaan dan analisis numerik yang merupakan kombinasi antara rata-rata aritmatika dan geometrik [11]. Dalam pengembangan metode numerik, konsep ini mulai dimodifikasi untuk meningkatkan stabilitas perhitungan pada sistem nonlinier [10]. Secara keseluruhan, bilangan a dan b akan digunakan untuk menghitung rata-rata Heronian mereka dengan rumus berikut.

$$H(a, b) = \frac{a + \sqrt{a.b} + b}{3}$$

Menggunakan Konsep Heronian Mean dalam RK4: Ide dasarnya adalah mengganti perhitungan rata-rata sederhana pada RK4 dengan Heronian Mean. Dalam situasi ini, kita bisa mengubah rata-rata yang biasa $(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$ dengan rata-rata Heronian untuk memberikan bobot yang lebih pada nilai tengah dari langkah-langkah perhitungan ki. Dalam beberapa variasi, kita bisa menggunakan rata-rata Heronian untuk kombinasi tertentu dari k_i-nilai, misalnya:

$$y_{n+1} = y_n + H(k_1, k_2\ ) + H(k_3, k_4)$$

dengan masing-masing hasil $H(k_i, k_j)$ kemudian dijumlahkan. Pendekatan ini lebih menekankan pada kombinasi nilai di titik-titik antara. Hal ini dapat membantu mengurangi kesalahan pada persamaan diferensial yang non-linear atau perubahan fungsi yang tidak terlalu halus.

Python merupakan bahasa pemrograman yang bertingkat tinggi, sangat populer dan serbaguna [12]. Pertama kali dikembangkan oleh Guido van Rossum pada awal tahun 1990-an, Python telah menjadi salah satu bahasa pemrograman yang paling populer di kalangan pengembang perangkat lunak di seluruh dunia. Keuntungan utama Python adalah kemudahan penggunaan serta sintaksisnya yang mudah dibaca dan dipahami, menjadikannya pilihan yang baik untuk pemula maupun pengembang berpengalaman Python memiliki dukungan di beragam platform, sehingga mampu beroperasi pada berbagai sistem operasi seperti Windows, macOS, dan Linux serta dapat dimanfaatkan untuk berbagai aplikasi mulai dari pengembangan web, aplikasi hingga kecerdasan buatan. Salah satu karakteristik Python adalah filosofi desainnya yang menekankan pada keterbacaan kode. Python juga dikenal sebagai bahasa pemrograman yang mendukung dalam berbagai paradigma bahasa pemrograman [13]. Python tidak hanya mendukung pemrograman berorientasi objek, tetapi juga pemrograman imperatif dan fungsional.

Kebaruan penelitian ini terletak pada penerapan metode Heronian Mean dalam Runge-Kutta Orde 4 untuk menyelesaikan sistem Duffing–Chen yang kompleks. Pendekatan ini tidak hanya berfokus pada penyelesaian numerik, tetapi juga menganalisis dinamika chaotic, sensitivitas terhadap kondisi awal, serta perubahan dinamika akibat variasi parameter melalui grafik *time series* dan ruang fase. Penelitian ini bertujuan menyelesaikan sistem Duffing–Chen secara numerik, menganalisis evolusi sistem terhadap waktu, serta mengkaji pengaruh parameter dan kondisi awal terhadap dinamika sistem. Selain itu, penelitian ini juga menganalisis penerapan metode Heronian Mean sebagai pengembangan metode Runge-Kutta dalam penyelesaian sistem nonlinier.

2. Metode Penelitian

2.1. Deskripsi Metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4

Sistem Duffing–Chen yang digunakan dalam penelitian ini dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinier dengan enam variabel, yaitu x, y, z sebagai variabel utama serta u, v, w sebagai variabel tambahan. Model ini digunakan untuk merepresentasikan dinamika sistem chaotic berdimensi tinggi. Metode numerik yang digunakan adalah *Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4*, yang merupakan metode modifikasi dari Runge-Kutta tradisional untuk meningkatkan akurasi dalam sistem non-linear kompleks [14]. Metode ini bergantung pada perhitungan mean heronian dari setiap step penyelesaian persamaan diferensial, yang menggabungkan informasi tambahan dari gradien perubahan variabel sistem dalam setiap interval waktu [15].

Secara umum, metode Heronian Mean Runge-Kutta 4 mengkalkulasi nilai variabel pada setiap langkah waktu x_i berdasarkan hasil perhitungan dari empat titik dalam setiap interval waktu h menggunakan formula berikut:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{23}{48}h, y_i - \frac{1}{48}k_1 h + \frac{25}{48}k_2 h\right)$$
$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i - \frac{1}{24}k_1 h + \frac{47}{600}k_2 h + \frac{289}{300}k_3 h\right)$$

Dengan nilai solusi di setiap titik waktu diperoleh dari:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 + \sqrt{|k_1 k_2|} + \sqrt{|k_2 k_3|} + \sqrt{|k_3 k_4|}\right)h$$

Metode Runge-Kutta Orde 4 digunakan untuk menghitung solusi numerik sistem persamaan diferensial. Dalam penelitian ini, metode *composite parameter* diterapkan dengan menggabungkan beberapa parameter sistem ke dalam bentuk parameter baru untuk menyederhanakan proses perhitungan numerik. Pendekatan ini bertujuan mempermudah implementasi metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 serta menjaga kestabilan perhitungan pada sistem nonlinier. Pada metode Heronian Mean, langkah-langkah yang digunakan untuk menghitung solusi adalah:

1. Menentukan langkah-langkah perhitungan berdasarkan hasil turunan (k_1, k_2, k_3, k_4) dari sistem persamaan.
2. Menggunakan rata-rata Heronian untuk menghitung nilai solusi yang lebih akurat pada setiap langkah waktu.

2.2. Penerapan Metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 pada Sistem Duffing-Chen

Sistem Duffing-Chen adalah model yang mencerminkan dinamika chaotic melalui sistem persamaan diferensial non-linear. Sistem Duffing-Chen diekspresikan sebagai serangkaian persamaan diferensial non-linear, dengan variabel *x, y, z, u, v,* dan *w* yang mewakili berbagai aspek dari posisi dan dinamika sistem, serta parameter *a, b, c, d, e, f, g,* dan *h* yang mengontrol respons sistem terhadap perubahan kondisi awal [6] Model ini, umumnya digunakan dalam fisika dan teknik, menunjukkan bahwa perubahan kecil dalam kondisi awal dapat mengarah pada perbedaan hasil yang signifikan. Persamaan Duffing-Chen dinyatakan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= a(y-x)+gv \\
\dot{y} &= (b-a)x-xz+hy+w \\
\dot{z} &= xy-cz \\
\dot{u} &= v \\
\dot{v} &= -dv-u^3+e\cos(w) \\
\dot{w} &= fxv
\end{aligned}
$$

Penelitian ini membahas penyelesaian numerik sistem Duffing–Chen menggunakan metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 untuk meningkatkan akurasi solusi numerik. Sistem Duffing–Chen merupakan sistem dinamis nonlinier yang digunakan untuk memodelkan fenomena kompleks dan perilaku chaotic. Hasil simulasi disajikan dalam bentuk tabel dan grafik tiga dimensi dari variabel utama (x,y,z) dan variabel tambahan (u,v,w) untuk menganalisis evolusi sistem terhadap waktu.

Dengan parameter $a, b, c, d, e, f, g,$ dan h yang telah ditetapkan sebagai berikut:

$$a = 10, b = 55, c = \frac{8}{3}, d = 0.6, e = -3, f = 1, g = 3, h = 1$$

Nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini ditentukan berdasarkan studi literatur pada sistem chaos Duffing–Chen yang telah digunakan pada penelitian sebelumnya [6]. Pemilihan parameter tersebut bertujuan untuk memastikan bahwa sistem menunjukkan perilaku chaotic sehingga dapat dianalisis menggunakan metode numerik yang diusulkan.

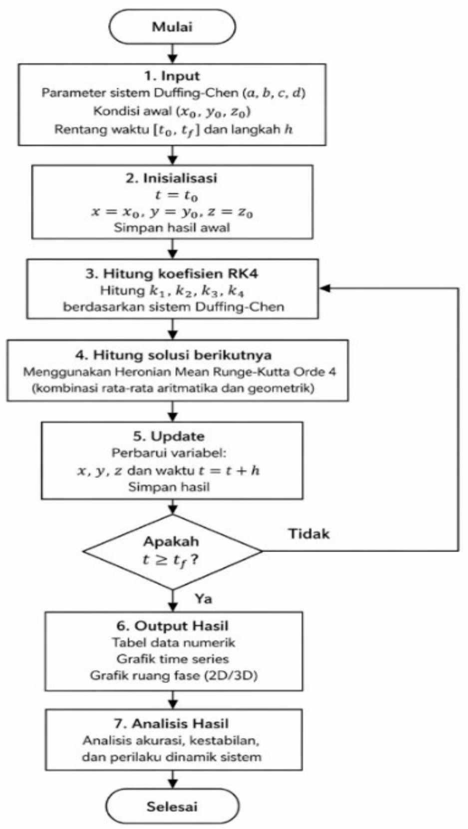
2.3. Implementasi Menggunakan Python

Simulasi untuk sistem Duffing-Chen dilakukan menggunakan bahasa pemrograman Python, dengan dukungan Anaconda Jupyter Notebook untuk penyelesaian persamaan diferensial. Implementasi berikut menggambarkan metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 yang diterapkan pada sistem Duffing-Chen.

```
import numpy as np
# Parameters untuk Duffing-Chen system
a = 10
b = 55
c = 8/3
d = 0.6
e = -3
f = 1
g = 3
h = 1
# Fungsi Duffing-Chen system
def duffing_chen_system(t, vars):
    x, y, z, u, v, w = vars
    dx = a * (y - x) + g * v
    dy = (b - a) * x - x * z + h * y + w
    dz = x * y - c * z
    du = v
    dv = -d * v - u**3 + e * np.cos(w)
    dw = f * x * v
    return np.array([dx, dy, dz, du, dv, dw])
# Metode Composite Arithmetic-Harmonic Runge-Kutta
def composite_arithmetic_harmonic_rk(t0, x0, y0, z0, u0, v0, w0, h, tf):
    n_steps = int((tf - t0) / h)
    t_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [t0]
    x_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [x0]
    y_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [y0]
    z_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [z0]
    u_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [u0]
    v_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [v0]
    w_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [w0]
    t = t0
    x = x0
    y = y0
    z = z0
```

```
        u = u0
        v = v0
        w = w0
    # Fungsi metode Heronian Mean Orde 4
    def heronian_mean_rk4(t0, vars0, h, tf):
        n_steps = int((tf - t0) / h)
        t_values = [t0]
        results = [vars0]
        t = t0
        vars = vars0
        for i in range(n_steps):
            k1 = h * duffing_chen_system(t, vars)
            k2 = h * duffing_chen_system(t + h/2, vars + h/2 * k1)
          k3 = h * duffing_chen_system(t + h * (23/48) , vars - (h/48) * k1 + h *
(25/48) * k2)
    k4 = h * duffing_chen_system(t + h, vars - (h/24) * k1 + h * (47/600) * k2 + h
* (289/300) * k3)
            # Menghitung nilai berikutnya menggunakan formula Heronian Mean
            new_vars = vars + (1/9) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4 + np.sqrt(k1 * k2)
+ np.sqrt(k2 * k3) + np.sqrt(k3 * k4))
            vars = new_vars
            t += h
            t_values.append(t)
            results.append(vars)
    return np.array(t_values), np.array(results)
```

Kode di atas menjalankan simulasi sistem Duffing-Chen menggunakan metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 untuk menghitung solusi numerik dari persamaan diferensial non-linear yang ada. Variabel posisi, kecepatan, dan variabel dinamis lainnya divisualisasikan dalam grafik ruang fase 3D serta grafik time series untuk menunjukkan evolusi setiap variabel seiring waktu.



Gambar 1. Diagram alir tahapan penyelesaian menggunakan metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 pada sistem Duffing-Chen

3. Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini membahas penyelesaian numerik sistem Duffing–Chen menggunakan metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4. Sistem Duffing–Chen merupakan sistem dinamis nonlinier yang digunakan untuk memodelkan fenomena kompleks dalam bidang fisika dan rekayasa. Metode Heronian Mean diterapkan untuk meningkatkan akurasi solusi numerik, sedangkan hasil simulasi disajikan dalam bentuk tabel dan grafik tiga dimensi. Sistem ini terdiri atas variabel utama (x,y,z) dan variabel tambahan (u,v,w) yang digunakan untuk merepresentasikan dinamika kompleks dan perilaku chaotic, sehingga evolusi sistem terhadap waktu dapat dianalisis dengan lebih jelas.

Persamaan sistem Duffing–Chen yang digunakan dalam penelitian ini mengacu pada model yang telah dikembangkan pada penelitian sebelumnya [6]:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= a(y-x) + gv \\
\dot{y} &= (b-a)x - xz + hy + w \\
\dot{z} &= xy - cz \\
\dot{u} &= v \\
\dot{v} &= -dv - u^3 + e\cos(w) \\
\dot{w} &= fxv
\end{aligned}$$

dengan parameter $a, b, c, d, e, f, g,$ dan h yang telah ditetapkan sebagai berikut [6]:

$$a = 10, b = 55, c = \frac{8}{3}, d = 0.6, e = -3, f = 1, g = 3, h = 1$$

3.1. Implementasi Metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4

Metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 mengkombinasikan pendekatan rata-rata Heronian ke dalam metode Runge-Kutta Orde 4, tujuannya adalah untuk meningkatkan akurasi dari solusi yang dihasilkan. Metode ini sangat berguna untuk menjaga kestabilan dalam persamaan diferensial nonlinier seperti pada sistem Duffing-Chen. Berikut ini perhitungan titik k_1, k_2, k_3, k_4 dalam metode *Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4*:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{23}{48}h, y_i - \frac{1}{48}k_1 h + \frac{25}{48}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{1}{24}k_1 h + \frac{47}{600}k_2 h + \frac{289}{300}k_3 h\right) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{9}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 + \sqrt{|k_1 k_2|} + \sqrt{|k_2 k_3|} + \sqrt{|k_3 k_4|}\right) h
\end{aligned}$$

Algoritma berikut ini menjelaskan penerapan metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 pada sistem Duffing-Chen, lengkap dengan tahapan komputasinya. Di bawah ini adalah kode Python dari contoh kasus yang disediakan:

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
# Fungsi untuk mengambil input dari pengguna untuk parameter
def get_input():
    x0 = float(input("Masukkan nilai awal x0: "))  # Kondisi awal x
    y0 = float(input("Masukkan nilai awal y0: "))  # Kondisi awal y
    z0 = float(input("Masukkan nilai awal z0: "))  # Kondisi awal z
    u0 = float(input("Masukkan nilai awal u0: "))  # Kondisi awal u
    v0 = float(input("Masukkan nilai awal v0: "))  # Kondisi awal v
    w0 = float(input("Masukkan nilai awal w0: "))  # Kondisi awal w
    t0 = float(input("Masukkan waktu awal t0: "))  # Waktu awal
    tf = float(input("Masukkan waktu akhir tf: "))  # Waktu akhir
```

```
    h = float(input("Masukkan nilai step size h: ")) # Ukuran langkah
    return x0, y0, z0, w0, u0, v0, t0, tf, h
# Parameters untuk Duffing-Chen system
a = 10
b = 55
c = 8/3
d = 0.6
e = -3
f = 1
g = 3
h = 1
# Fungsi Duffing-Chen system
def duffing_chen_system(t, vars):
    x, y, z, u, v, w = vars
    dx = a * (y - x) + g * v
    dy = (b - a) * x - x * z + h * y + w
    dz = x * y - c * z
    du = v
    dv = -d * v - u**3 + e * np.cos(w)
    dw = f * x * v
    return np.array([dx, dy, dz, du, dv, dw])
# Metode Composite Arithmetic-Harmonic Runge-Kutta
def composite_arithmetic_harmonic_rk(t0, x0, y0, z0, u0, v0, w0, h, tf):
    n_steps = int((tf - t0) / h)
    t_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [t0]
    x_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [x0]
    y_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [y0]
    z_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [z0]
    u_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [u0]
    v_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [v0]
    w_values_composite_arithmetic_harmonic_rk = [w0]
    t = t0
    x = x0
    y = y0
    z = z0
    u = u0
    v = v0
    w = w0
# Fungsi metode Heronian Mean Orde 4
def heronian_mean_rk4(t0, vars0, h, tf):
    n_steps = int((tf - t0) / h)
    t_values = [t0]
    results = [vars0]
    t = t0
    vars = vars0
    for i in range(n_steps):
        k1 = h * duffing_chen_system(t, vars)
        k2 = h * duffing_chen_system(t + h/2, vars + h/2 * k1)
        k3 = h * duffing_chen_system(t + h * (23/48) , vars - (h/48) * k1 + h *
(25/48) * k2)
        k4 = h * duffing_chen_system(t + h, vars - (h/24) * k1 + h * (47/600) *
k2 + h * (289/300) * k3)
        # Menghitung nilai berikutnya menggunakan formula Heronian Mean
        new_vars = vars + (1/9) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4 + np.sqrt(k1 * k2) +
np.sqrt(k2 * k3) + np.sqrt(k3 * k4))
        vars = new_vars
        t += h
        t_values.append(t)
        results.append(vars)
    return np.array(t_values), np.array(results)
# Fungsi metode Runge-Kutta orde ke-4
def rk4(t0, x0, y0, z0, u0, v0, w0, h, tf):
    n_steps = int((tf - t0) / h)
    t_values = [t0]
    x_values_rk4 = [x0]
    y_values_rk4 = [y0]
    z_values_rk4 = [z0]
    u_values_rk4 = [u0]
```

```
    v_values_rk4 = [v0]
    w_values_rk4 = [w0]
    t = t0
    x = x0
    y = y0
    z = z0
    u = u0
    v = v0
    w = w0
    for i in range(n_steps):
        k1 = f(t, x, y, z, u, v, w)
        k2 = f(t + h/2, x + h * k1[0]/2, y + h * k1[1]/2, z + h * k1[2]/2, u + h
* k1[3]/2, v + h * k1[4]/2, w + h * k1[5]/2)
        k3 = f(t + h/2, x + h * k2[0]/2, y + h * k2[1]/2, z + h * k2[2]/2, u + h
* k2[3]/2, v + h * k2[4]/2, w + h * k2[5]/2)
        k4 = f(t + h, x + h * k3[0], y + h * k3[1], z + h * k3[2], u + h * k3[3],
v + h * k3[4], w + h * k3[5])
        x += (h/6) * (k1[0] + 2*k2[0] + 2*k3[0] + k4[0])
        y += (h/6) * (k1[1] + 2*k2[1] + 2*k3[1] + k4[1])
        z += (h/6) * (k1[2] + 2*k2[2] + 2*k3[2] + k4[2])
        u += (h/6) * (k1[3] + 2*k2[3] + 2*k3[3] + k4[3])
        v += (h/6) * (k1[4] + 2*k2[4] + 2*k3[4] + k4[4])
        w += (h/6) * (k1[5] + 2*k2[5] + 2*k3[5] + k4[5])
        t += h
        t_values.append(t)
        x_values_rk4.append(x)
        y_values_rk4.append(y)
        z_values_rk4.append(z)
        u_values_rk4.append(u)
        v_values_rk4.append(v)
        w_values_rk4.append(w)
    return t_values, x_values_rk4, y_values_rk4, z_values_rk4, u_values_rk4,
v_values_rk4, w_values_rk4
# Kondisi awal
x0, y0, z0, u0, v0, w0 = 1, 1, 1, 1, 1, 1
t0, tf, h = 0, 5, 0.001
initial_conditions = np.array([x0, y0, z0, u0, v0, w0])
# Menjalankan simulasi menggunakan metode Heronian Mean
t_values, results = heronian_mean_rk4(t0, initial_conditions, h, tf)
# Memisahkan hasil menjadi variabel x, y, z, u, v, w
x_values, y_values, z_values, u_values, v_values, w_values = results.T
# Mengambil input dari pengguna
x0, y0, z0, u0, v0, w0, t0, tf, h = get_input()
# Mengubah hasil perhitungan menjadi DataFrame
df_results = pd.DataFrame({
    'Time (t)': t_values,
    'x(t)': x_values,
    'y(t)': y_values,
    'z(t)': z_values,
    'u(t)': u_values,
    'v(t)': v_values,
    'w(t)': w_values
})
# Menampilkan tabel hasil perhitungan
print(df_results.head())  # Menampilkan 5 baris pertama dari tabel
# Plotting hasil
plt.figure(figsize=(10, 7))
plt.plot(t_values, x_values, label='x(t)')
plt.plot(t_values, y_values, label='y(t)')
plt.plot(t_values, z_values, label='z(t)')
plt.plot(t_values, u_values, label='u(t)')
plt.plot(t_values, v_values, label='v(t)')
plt.plot(t_values, w_values, label='w(t)')
plt.xlabel('Time t')
plt.ylabel('Values')
plt.title('4th Order Heronian Mean Method on Duffing-Chen System')
plt.legend()
plt.grid(True)
```

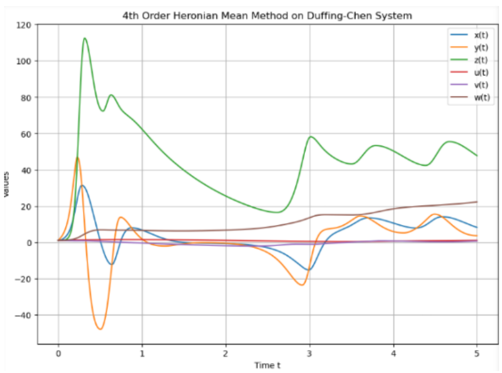
```
plt.show()
# Plot berbagai kombinasi variabel
plot_3d(x_values, y_values, z_values, 'x', 'y', 'z', 'Solusi dalam ruang 3D: x,
y, z', color='r', label='x-y-z')
plot_3d(x_values, z_values, w_values, 'x', 'z', 'w', 'Solusi dalam ruang 3D: x,
z, w', color='b', label='x-z-w')
plot_3d(y_values, z_values, w_values, 'y', 'z', 'w', 'Solusi dalam ruang 3D: y,
z, w', color='g', label='y-z-w')
plot_3d(x_values, y_values, w_values, 'x', 'y', 'w', 'Solusi dalam ruang 3D: x,
y, w', color='m', label='x-y-w')
plot_3d(u_values, v_values, w_values, 'u', 'v', 'w', 'Solusi dalam ruang 3D: u,
v, w', color='c', label='u-v-w')
plot_3d(u_values, x_values, y_values, 'u', 'x', 'y', 'Solusi dalam ruang 3D: u,
x, y', color='y', label='u-x-y')
plot_3d(v_values, x_values, z_values, 'v', 'x', 'z', 'Solusi dalam ruang 3D: v,
x, z', color='orange', label='v-x-z')
#Masukkan nilai awal x0:  1
#Masukkan nilai awal y0:  1
#Masukkan nilai awal z0:  1
#Masukkan nilai awal u0:  1
#Masukkan nilai awal v0:  1
#Masukkan nilai awal w0:  1
#Masukkan waktu awal t0:  0
#Masukkan waktu akhir tf:  5
#Masukkan nilai step size h: 0.005
```

3.2. Hasil Perhitungan dan Analisis

Hasil perhitungan dari metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 pada sistem Duffing-Chen disajikan dalam tabel berikut ini:

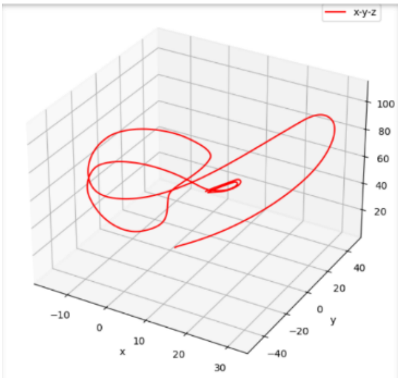
Tabel 1. Hasil perhitungan dari dari metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 pada sistem Duffing-Chen

	Time (t)	x(t)	y(t)	z(t)	u(t)	v(t)	w(t)
0	0.000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.001	1.003000	1.045001	0.999444	1.001000	0.998926	1.001000
2	0.002	1.006417	1.090136	0.998905	1.001999	0.997853	1.002002
3	0.003	1.010248	1.135422	0.998383	1.002997	0.996779	1.003006
4	0.004	1.014490	1.180879	0.997878	1.003994	0.995706	1.004013



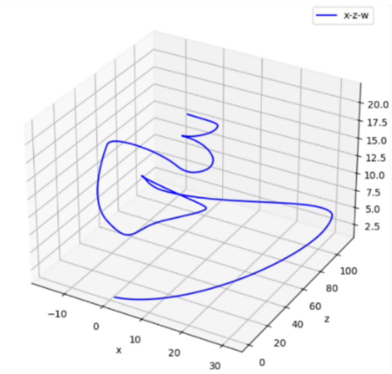
Gambar 2. Grafik metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 pada sistem Duffing-Chen

Grafik 3D hasil simulasi sistem Duffing–Chen menggunakan metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 menunjukkan interaksi antar variabel dalam sistem dinamis. Kombinasi grafik *x(t)*, *y(t)*, *z(t)*, *u(t)*, *v(t)*, dan *w(t)* memperlihatkan hubungan antara variabel utama dan variabel tambahan dalam ruang fase. Setiap grafik menampilkan dinamika sistem yang kompleks dengan pola osilasi chaotic. Analisis ini membantu memahami hubungan nonlinier antar variabel serta sensitivitas sistem terhadap kondisi awal dan parameter.



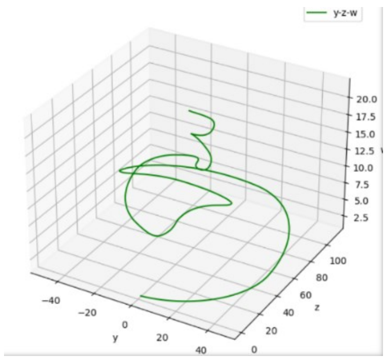
Gambar 3. Grafik Solusi dalam Ruang 3D disumbu x, y, z

Grafik ini merepresentasikan variabel utama dalam sistem Duffing–Chen. Pola lintasan *x*, *y*, dan *z* membentuk orbit yang berputar secara acak dan tidak kembali ke lintasan sebelumnya, yang menjadi ciri dinamika chaotic. Pola tersebut menunjukkan bahwa perubahan kecil pada kondisi awal dapat menghasilkan lintasan yang berbeda, sehingga mencerminkan sensitivitas sistem terhadap kondisi awal. Fenomena ini menggambarkan sifat chaotic pada sistem dinamik yang tidak teratur dan tidak periodik, tetapi tetap berada dalam ruang tertentu. Kombinasi variabel ini membantu memahami perilaku jangka panjang pada sistem nonlinier.



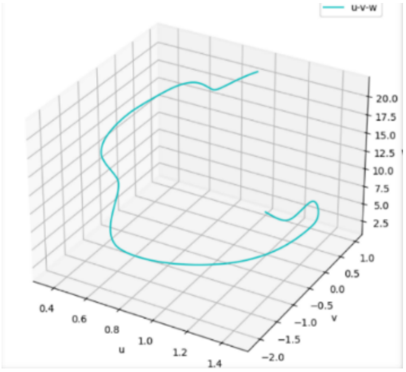
Gambar 4. Grafik Solusi dalam Ruang 3D disumbu x, z, w

Interaksi antara *x*, *z*, dan *w* menunjukkan pola spiral yang semakin kompleks seiring waktu. Variabel tambahan *w* memengaruhi perluasan lintasan dalam ruang fase dan meningkatkan intensitas chaotic pada sistem. Pola lintasan yang lebih divergen menunjukkan bahwa keberadaan *w* memperkaya kompleksitas dinamika sistem, namun tetap berada dalam batas tertentu. Analisis ini membantu memahami pengaruh variabel tambahan terhadap efek nonlinier pada sistem Duffing–Chen.



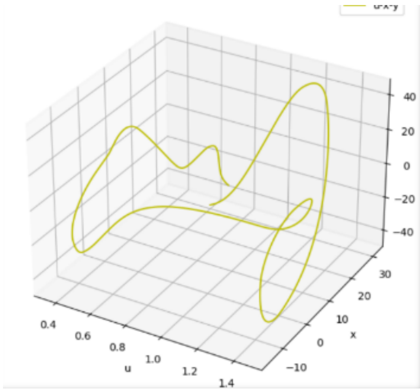
Gambar 5. Grafik Solusi dalam Ruang 3D disumbu y, z, w

Kombinasi *y*, *z*, dan *w* menunjukkan lintasan chaotic yang saling terjalin dalam ruang fase. Pola ini memperlihatkan pergerakan tak periodik yang tetap berada pada rentang tertentu, sebagai karakteristik chaotic attractor. Variasi *w* memengaruhi dinamika variabel utama *y* dan *z*, sehingga menghasilkan pola lintasan yang tidak teratur namun tetap terbatas. Grafik ini membantu memahami pengaruh variabel tambahan terhadap dinamika sistem chaotic.



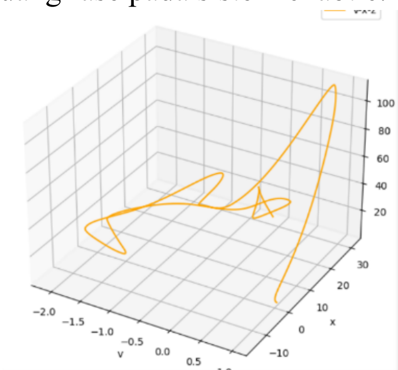
Gambar 6. Grafik Solusi dalam Ruang 3D disumbu y, z, w

Grafik ini menunjukkan bahwa variabel tambahan *u*, *v*, dan *w* membentuk pola lintasan yang relatif lebih stabil, tetapi tetap memperlihatkan karakteristik chaotic melalui osilasi yang tidak teratur. Interaksi antarvariabel tersebut memperkaya dinamika sistem dan menunjukkan pengaruh variabel tambahan terhadap stabilitas serta pola osilasi sistem dinamik.



Gambar 7. Grafik Solusi dalam Ruang 3D disumbu y, z, w

Pada grafik ini, interaksi antara variabel *x*, *y*, dan *w* menunjukkan pengaruh variabel tambahan *w* terhadap dinamika variabel utama *x* dan *y*. Lintasan grafik memperlihatkan pola yang semakin meluas seiring waktu, yang mencerminkan ketidakstabilan dan sifat chaotic sistem. Analisis ini menunjukkan bahwa perubahan kecil pada *w* dapat memengaruhi dinamika *x* dan *y*, serta mengubah pola ruang fase pada sistem chaotic.



Gambar 8. Grafik Solusi dalam Ruang 3D disumbu y, z, w

Pada grafik *v,x,z* terlihat bahwa interaksi antarvariabel membentuk pola pergerakan yang tidak teratur, yang mencerminkan karakteristik chaotic pada sistem Duffing–Chen. Variabel *v* berosilasi secara acak tanpa pola berulang yang jelas, sedangkan *x* dan *z* menunjukkan variasi dinamis dalam ruang fase. Pola tersebut menunjukkan bahwa hubungan antarvariabel bersifat nonlinier dan saling memengaruhi dalam dinamika yang kompleks. Selain itu, grafik ini memperlihatkan sensitivitas sistem terhadap kondisi awal, di mana perubahan kecil pada nilai awal dapat menghasilkan perbedaan lintasan yang signifikan.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa sistem dinamik Duffing–Chen dapat diselesaikan secara numerik menggunakan metode Heronian Mean Runge-Kutta Orde 4 dengan menghasilkan solusi yang stabil. Hasil simulasi menunjukkan bahwa sistem memiliki perilaku chaotic yang ditandai dengan sensitivitas tinggi terhadap kondisi awal serta perubahan parame-ter. Selain itu, metode yang digunakan mampu menggambarkan evolusi sistem terhadap waktu melalui visualisasi grafik time series dan ruang fase tiga dimensi. Temuan ini menunjukkan bahwa penerapan metode Heronian Mean pada Runge-Kutta Orde 4 memberikan kontribusi dalam analisis dinamika sistem nonlinier, khususnya dalam merepresentasikan pola chaos secara lebih jelas.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, masukan, dan bimbingan selama proses penelitian ini. Terima kasih juga disampaikan kepada pihak-pihak yang telah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Saragih, N. B., & Ambarita, J. D. (2024). Penerapan metode Runge-Kutta orde 3 untuk penyelesaian persamaan diferensial biasa. Algoritma: Jurnal Matematika dan Sains, 2(6),10-19.

[2] Setiawan, A. (2024). Metode Runge-Kutta dalam penyelesaian persamaan diferensial orde tinggi. Jurnal Dunia Ilmu, 4(7).

[3] Chen, G., & Ueta, T. (1999). Yet another chaotic attractor. International Journal of BIfurction and Chaos, 9(7), 1465–1466.

[4] Moon, F. C. (2004). Chaotic vibrations: An introduction for applied scientists and engineers. Wiley.

[5] Strogatz, S. H. (2018). Nonlinear dynamics and chaos (2nd ed.). CRC Press.

[6] Zhang, X., Chen, Y., & Li, H. (2022). High-accuracy methods for solving Duffing-like chaotic systems. Applied Mathematics and Computation, 432, 127368.

[7] Butcher, J. C. (2016). Numerical methods for ordinary differential equations (3rd ed.). Wiley.

[8] Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems. Springer.

[9] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). Numerical recipes: The art of scientific computing (3rd ed.). Cambridge University Press.

[10] Suryani, I., Roni, Wartono, & Muda, Y. U. (2020). Modifikasi metode Runge-Kutta orde 4 dengan rata-rata geometri. Tensor: Pure and Applied Mathematics Journal, 1(1), 221–232.

[11] Bullen, P. S. (2003). Handbook of means and their inequalities. Springer.

[12] Wilyani, F., Arif, Q. N., & Aslimar,F. (2024). Pengenalan dasar pemrograman Python dengan Google Colaboratory. Jurnal Pelayanan dan Pengabdian Masyarakat Indonesia, 3(1), 8–14.
[13] Van Rossum, G., & Drake, F. L. (2009). Python 3 reference manual. CreateSpace.
[14] Smith, J., Zhang, R., & Xu, W. (2023). Numerical solutions to chaotic systems using Heronian Mean Runge-Kutta methods. Numerical Algorithms, 82(3), 401–420.
[15] Chen, L., & Yu, M. (2021). A modified Runge-Kutta method with enhanced stability for solving chaotic systems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 389, 113318.