



## DIMENSI METRIK PADA GRAF PANEKUK

FARIZ MAULANA<sup>1,\*</sup> DAN ANDRI PURNAMA RAMADAN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan IPA, Universitas Mataram, Mataram, Indonesia

<sup>2</sup>Peneliti Independen

\*Penulis Korespondensi: [fariz.maulana@unram.ac.id](mailto:fariz.maulana@unram.ac.id)

### ABSTRAK

Dimensi metrik merupakan salah satu topik yang menarik dalam teori graf, khususnya untuk pengkarakterisasian dan perhitungan batas atas serta bawah dimensi metrik dari berbagai kelas graf. Pada penelitian ini, fokus diberikan pada graf Panekuk, yang memiliki keterkaitan erat dengan masalah pancake sorting problem. Penelitian ini menentukan dimensi metrik graf Panekuk  $P_n$  untuk  $n = 3, 4$  secara pasti, yaitu  $\beta(P_3) = 2$  dan  $\beta(P_4) = 3$ . Selain itu, batas atas dan bawah dimensi metrik untuk  $5 \leq n \leq 10$  juga ditentukan, dengan hasil bahwa  $\beta(P_5)$  berkisar antara 4 hingga 6,  $\beta(P_6)$  antara 5 hingga 8,  $\beta(P_7)$  antara 6 hingga 11, dan seterusnya. Penelitian ini juga menghasilkan algoritma untuk menentukan batas bawah dimensi metrik graf Panekuk.

**Kata kunci:** dimensi metrik, graf Panekuk, pancake sorting, teori graf, algoritma.

### ABSTRACT

*The metric dimension is an intriguing topic in graph theory, particularly in characterizing and computing the upper and lower bounds of the metric dimension for various classes of graphs. This study focuses on Pancake graphs, which are closely related to the pancake sorting problem. The metric dimension of Pancake graphs  $P_n$  for  $n = 3, 4$  is precisely determined, with  $\beta(P_3) = 2$  and  $\beta(P_4) = 3$ . Additionally, the upper and lower bounds for  $5 \leq n \leq 10$  are determined, yielding results such as  $\beta(P_5)$  ranging from 4 to 6,  $\beta(P_6)$  from 5 to 8,  $\beta(P_7)$  from 6 to 11, and so on. This study also introduces an algorithm to determine the lower bounds of the metric dimension for Pancake graphs.*

**Keywords:** metric dimension, Pancake graph, pancake sorting, graph theory, algorithm.

## 1. Pendahuluan

Konsep dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 [1]. Di saat yang hampir bersamaan, konsep yang sama juga diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 [2].

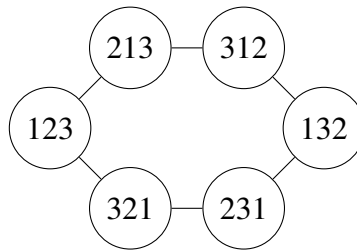
Misalkan  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  adalah subhimpunan terurut dari himpunan titik  $V(G)$ . Yang dimaksud representasi titik  $u$  di  $G$  terhadap himpunan  $W$ , dinotasikan  $r(u|W)$ , adalah  $k$ -tuple terurut dari jarak titik  $u$  ke setiap titik di  $W$ , yaitu  $r(u|W) = (d(u, w_1), d(u, w_2), \dots, d(u, w_k))$ . Jika setiap titik di  $G$  mempunyai representasi yang berbeda terhadap  $W$ , maka  $W$  disebut sebagai himpunan pembeda (resolving set). Jelas bahwa himpunan pembeda dari sebuah graf tidaklah tunggal. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut basis. Kardinalitas dari basis dinamakan dimensi metrik dari suatu graf, dinotasikan  $\beta(G)$ . Selanjutnya, pencarian dimensi metrik pada berbagai kelas graf menjadi salah satu topik permasalahan yang terus dikaji dalam teori graf.

2020 Mathematics Subject Classification: 05C12, 05C85, 05C75.

Diterima: 21-01-2025, direvisi: 10-06-2025, dimuat: 17-03-2026.

Berbagai pekerjaan dalam dimensi metrik, termasuk pengkarakterisasian graf dengan dimensi metrik tertentu dan pencarian batas atas dan bawah dimensi metrik suatu kelas graf, telah dilakukan para peneliti seperti pada [3, 4, 5]. Namun, pencarian dimensi metrik pada suatu kelas graf bukanlah permasalahan yang mudah, sehingga masih banyak kelas-kelas graf yang dimensi metriknya belum diketahui maupun baru didapatkan batas atas dan batas bawahnya.

**Definisi 1.1.** [6] Misalkan  $S_n = \{P : P \text{ permutasi dari } \{1, 2, \dots, n\}\}$  dan  $E_n = \{(P, Q) : P \rightarrow Q \text{ prefix reversal dengan ukuran } i, 2 \leq i \leq n\}, n \leq 3$ , maka  $P_n = (S_n, E_n)$  disebut graf Panekuk.



**Gambar 1.** Graf  $P_3$

Jarak antar titik pada graf Panekuk dapat dilihat sebagai jumlah *prefix reversal* yang diperlukan. Namun, masalah mengenai berapa kali minimum *prefix reversal* yang harus dilakukan pada suatu titik untuk mencapai titik lain masih menjadi masalah terbuka. Masalah tersebut dikenal sebagai *pancake sorting problem*.

Jawaban atas *pancake sorting problem* berkaitan erat dengan diameter dari graf Panekuk. Dengan memandang bahwa suatu titik dapat dicapai dengan 'membolak-balik' *prefix* pada titik  $P$ , maka jumlah minimum 'pembolak-balikkan' yang diperlukan akan sama dengan diameter graf tersebut.

Hingga saat ini, batas atas terbaik minimum *prefix reversal* yang harus dilakukan telah diberikan oleh [7], yaitu  $k \leq \frac{18}{11}n$ . Graf Panekuk terbesar yang diameternya telah diketahui adalah  $P_{19}$  dengan diameter 22.

## 2. Hasil dan Pembahasan

Bagian ini akan dibagi ke dalam dua bagian, yaitu untuk  $n = 3, 4$  dan  $5 \leq n \leq 10$ . Hal tersebut dilakukan karena dalam paper ini, dimensi metrik untuk  $P_5, \dots, P_{10}$  belum ditemukan, tetapi hasil pencarian batas bawah dan batas atas dimensi metriknya akan disajikan.

### 2.1. Dimensi Metrik Graf Panekuk untuk $n = 3, 4$

1. Misalkan  $P_3$  adalah graf Panekuk. Pilih  $S = \{(123), (213)\}$ , maka akan didapatkan koordinat setiap titik pada graf  $P_3$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r((123)|S) &= (0, 1), & r((213)|S) &= (1, 0) \\ r((312)|S) &= (2, 1), & r((132)|S) &= (3, 2) \\ r((231)|S) &= (2, 3), & r((321)|S) &= (1, 2) \end{aligned}$$

Karena untuk setiap titik  $u, v$  pada graf  $P_3$  berlaku  $r(u|S) \neq r(v|S)$ , maka  $S$  adalah himpunan pembeda.

Misalkan  $S$  bukan himpunan pembeda terkecil, maka haruslah ada himpunan pembeda  $T$  dengan  $|T| = 1$ . Namun, untuk setiap titik  $x$  pada graf  $P_3$ , terdapat  $y, z$  tetangga dari  $x$  sedemikian sehingga  $d(y|x) = d(z|x)$ . Jadi, pastilah  $S = \{(123), (213)\}$  dengan  $|S| = 2$  adalah himpunan pembeda terkecil.

2. Misalkan  $P_4$  adalah graf Panekuk. Pilih  $S = \{(1234), (4123), (3412)\}$ , maka akan didapatkan koordinat setiap titik pada graf  $P_4$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 r((1234)|S) &= (0, 2, 3), & r((1243)|S) &= (3, 2, 2) \\
 r((1324)|S) &= (3, 3, 4), & r((1342)|S) &= (3, 4, 2) \\
 r((1423)|S) &= (4, 1, 3), & r((1432)|S) &= (3, 3, 1) \\
 r((2134)|S) &= (1, 3, 2), & r((2143)|S) &= (3, 1, 1) \\
 r((2314)|S) &= (2, 2, 3), & r((2341)|S) &= (2, 3, 2) \\
 r((2413)|S) &= (4, 2, 4), & r((2431)|S) &= (3, 4, 3) \\
 r((3124)|S) &= (2, 4, 3), & r((3142)|S) &= (4, 3, 3) \\
 r((3214)|S) &= (1, 1, 3), & r((3241)|S) &= (3, 2, 3) \\
 r((3412)|S) &= (3, 2, 0), & r((3421)|S) &= (2, 3, 3) \\
 r((4123)|S) &= (2, 0, 2), & r((4132)|S) &= (3, 3, 2) \\
 r((4213)|S) &= (3, 3, 3), & r((4231)|S) &= (4, 3, 4) \\
 r((4312)|S) &= (2, 3, 1), & r((4321)|S) &= (1, 3, 3)
 \end{aligned}$$

Karena untuk setiap titik  $u, v$  pada graf  $P_4$  berlaku  $r(u|S) \neq r(v|S)$ , maka  $S$  adalah himpunan pembeda. Misalkan  $S$  bukan himpunan pembeda terkecil, maka haruslah ada himpunan pembeda  $T$  dengan  $|T| \leq 2$ .

Perhatikan bahwa banyaknya titik pada  $P_4$  adalah 24 dengan diameter 4. Misalkan  $|T| = 2$ , maka untuk setiap titik  $x$  pada graf  $P_4$  dengan  $x \notin T$  berlaku  $r(x|T) = (a, b)$  dengan  $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Karena  $|T| = 2$ , maka banyaknya titik yang bukan merupakan anggota  $T$  adalah 22. Namun, banyaknya kombinasi yang mungkin dari  $(a, b)$  adalah 16. Artinya, akan ada titik  $x, y$  pada  $P_4$  dengan  $x \neq y$  sedemikian sehingga  $r(x|T) = r(y|T)$ . Hal tersebut menunjukkan bahwa  $T$  bukanlah himpunan pembeda. Jadi,  $S = \{(1234), (4123), (3412)\}$  dengan  $|S| = 3$  adalah himpunan pembeda terkecil.

Berdasarkan pemaparan tersebut, didapat  $\beta(P_3) = 2$  dan  $\beta(P_4) = 3$ .

## 2.2. Dimensi Metrik Graf Panekuk untuk $5 \leq n \leq 10$

Dalam mencari batas atas dan batas bawah dimensi metrik graf  $P_5, \dots, P_{10}$ , memilih suatu titik  $u$  dan mencari jarak terpendek setiap titik lain ke titik  $u$  merupakan salah satu langkah yang cukup efektif, sebab untuk dua titik berbeda  $u, v$ , jumlah titik dengan jarak terpendek  $d$  ke  $u$  akan sama dengan jumlah titik dengan jarak terpendek  $d$  ke  $v$ .

Pencarian batas atas dimensi metrik pada graf Panekuk bisa dilakukan dengan algoritma berikut

---

### Algoritma 1 Pencarian batas atas dimensi metrik graf Panekuk

---

- 1: Pilih titik  $u$  pada graf  $P_n$
  - 2: Definisikan  $S = \{u\}$
  - 3: **while**  $r(x|S) = r(y|S)$  untuk suatu  $x, y$  titik pada graf  $P_n$  **do**
  - 4:     Definisikan  $S = S \cup \{v\}$  sehingga koordinat yang sama minimum
  - 5: **end while**
  - 6:  $p = |S|$
- 

Berdasarkan Algoritma 1, akan didapatkan  $\beta(P_n) \leq p$ . Namun, Algoritma 1 masih tidak begitu efisien, sebab tidak menutup kemungkinan akan ada  $S = S \cup \{v\}$  yang menyebabkan

banyaknya koordinat sama, tetapi  $S$  tidak tunggal. Akibatnya akan ada banyak cabang dalam pencarian  $S$ , sehingga ketakefektifan tersebut diasiasi dengan hanya memilih satu buah  $S$ . Selain itu, keterbatasan sumber daya juga menyebabkan pencarian batas atas terbatas hingga  $P_7$ , dengan rincian  $\beta(P_5) \leq 6$ ,  $\beta(P_6) \leq 8$ ,  $\beta(P_7) \leq 11$ .

Pencarian batas bawah dimensi metrik graf  $P_n$  yang kami lakukan memerlukan informasi banyaknya titik berjarak  $d$  ke titik  $u$ . Informasi tersebut diberikan pada [8] dalam tabel berikut.

**Tabel 1.** Banyaknya titik berjarak  $d$  ke titik  $u$  pada graf  $P_n$  untuk  $5 \leq n \leq 10$

n \ d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	1	4	12	35	48	20	0	0	0	0	0	0
6	1	5	20	79	199	281	133	2	0	0	0	0
7	1	6	30	149	543	1357	1903	1016	35	0	0	0
8	1	7	42	251	1191	4281	10561	15011	8520	455	0	0
9	1	8	56	391	2278	10666	38015	93585	132697	79379	5804	0
10	1	9	72	575	3963	2285	106461	337863	91365	1309756	814678	73232

### 1. Untuk $P_5$

Andaikan graf  $P_5$  memiliki himpunan pembeda  $S$  yang terdiri dari 3 unsur, maka untuk setiap  $v \in V(P_5)$ ,  $r(v|S) = (a, b, c)$  dengan  $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c)$  yang hanya mengandung 2, 3, 4, dan 5 adalah  $4^3 = 64$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c)$  yang mengandung 0 adalah  $3 \times 1 = 3$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c)$  yang mengandung 1 adalah  $3 \times 4 = 12$ .

Diperoleh jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c)$  adalah  $64 + 3 + 12 = 79$ , sedangkan banyak simpul dari  $P_5$  adalah  $5! = 120$ . Akibatnya pasti ada sedikitnya 2 simpul dengan koordinat yang sama.

Pengandaian salah, jadi  $\beta(P_5) \geq 4$ .

### 2. Untuk $P_6$

Andaikan graf  $P_6$  memiliki himpunan pembeda  $S$  yang terdiri dari 4 unsur, maka untuk setiap  $v \in V(P_6)$ ,  $r(v|S) = (a, b, c, d)$  dengan  $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d)$  yang hanya mengandung 3, 4, 5, dan 6 adalah  $4^4 = 256$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d)$  yang mengandung 0 adalah  $4 \times 1 = 4$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d)$  yang mengandung 1 adalah  $4 \times 5 = 20$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d)$  yang mengandung 2 adalah  $4 \times 20 = 80$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d)$  yang mengandung 7 adalah  $4 \times 2 = 8$ .

Diperoleh jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d)$  adalah  $256 + 4 + 20 + 80 + 8 = 368$ , sedangkan banyak simpul dari  $P_6$  adalah  $6! = 720$ . Akibatnya pasti ada sedikitnya 2 simpul dengan koordinat yang sama.

Pengandaian salah, jadi  $\beta(P_6) \geq 5$ .

### 3. Untuk $P_7$

Andaikan graf  $P_7$  memiliki himpunan pembeda  $S$  yang terdiri dari 5 unsur, maka untuk setiap  $v \in V(P_7)$ ,  $r(v|S) = (a, b, c, d, e)$  dengan  $a, b, c, d, e \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e)$  yang hanya mengandung 4, 5, 6, dan

7 adalah  $4^5 = 1024$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e)$  yang mengandung 0 adalah  $5 \times 1 = 5$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e)$  yang mengandung 1 adalah  $5 \times 6 = 30$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e)$  yang mengandung 2 adalah  $5 \times 30 = 150$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e)$  yang mengandung 3 adalah  $5 \times 149 = 745$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e)$  yang mengandung 8 adalah  $5 \times 35 = 175$ .

Diperoleh jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e)$  adalah  $1024 + 5 + 30 + 150 + 745 + 175 = 2129$ , sedangkan banyak simpul dari  $P_7$  adalah  $7! = 5040$ . Akibatnya pasti ada sedikitnya 2 simpul dengan koordinat yang sama.

Pengandaian salah, jadi  $\beta(P_7) \geq 6$ .

#### 4. Untuk $P_8$

Andaikan graf  $P_8$  memiliki himpunan pembeda  $S$  yang terdiri dari 7 unsur, maka untuk setiap  $v \in V(P_7)$ ,  $r(v|S) = (a, b, c, d, e, f, g)$  dengan  $a, b, c, d, e, f, g \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g)$  yang hanya mengandung 5, 6, 7, dan 8 adalah  $4^7 = 16384$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g)$  yang mengandung 0 adalah  $7 \times 1 = 7$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g)$  yang mengandung 1 adalah  $7 \times 7 = 49$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g)$  yang mengandung 2 adalah  $7 \times 42 = 294$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g)$  yang mengandung 3 adalah  $7 \times 251 = 1757$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g)$  yang mengandung 4 adalah  $7 \times 1191 = 8337$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g)$  yang mengandung 9 adalah  $7 \times 455 = 3185$ .

Diperoleh jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g)$  adalah  $16384 + 7 + 49 + 294 + 1757 + 8337 + 3185 = 30013$ , sedangkan banyak simpul dari  $P_8$  adalah  $8! = 40320$ . Akibatnya pasti ada sedikitnya 2 simpul dengan koordinat yang sama.

Pengandaian salah, jadi  $\beta(P_8) \geq 7$ .

#### 5. Untuk $P_9$

Andaikan graf  $P_9$  memiliki himpunan pembeda  $S$  yang terdiri dari 8 unsur, maka untuk setiap  $v \in V(P_9)$ ,  $r(v|S) = (a, b, c, d, e, f, g, h)$  dengan  $a, b, c, d, e, f, g, h \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  yang hanya mengandung 6, 7, 8, dan 9 adalah  $4^7 = 65536$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  yang mengandung 0 adalah  $8 \times 1 = 8$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  yang mengandung 1 adalah  $8 \times 8 = 64$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  yang mengandung 2 adalah  $8 \times 56 = 448$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  yang mengandung 3 adalah

$$8 \times 391 = 3128.$$

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  yang mengandung 4 adalah  $8 \times 2278 = 18224$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  yang mengandung 5 adalah  $8 \times 10666 = 85328$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  yang mengandung 10 adalah  $8 \times 5804 = 46432$ .

Diperoleh jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h)$  adalah  $65536 + 8 + 64 + 448 + 3128 + 18224 + 85328 + 46432 = 219168$ , sedangkan banyak simpul dari  $P_9$  adalah  $9! = 362880$ . Akibatnya pasti ada sedikitnya 2 simpul dengan koordinat yang sama.

Pengandaian salah, jadi  $\beta(P_9) \geq 9$ .

## 6. Untuk $P_{10}$

Andaikan graf  $P_{10}$  memiliki himpunan pembeda  $S$  yang terdiri dari 10 unsur, maka untuk setiap  $v \in V(P_{10})$ ,  $r(v|S) = (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  dengan  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  yang hanya mengandung 7, 8, 9, dan 10 adalah  $4^{10} = 1048576$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  yang mengandung 0 adalah  $10 \times 1 = 10$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  yang mengandung 1 adalah  $10 \times 9 = 90$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  yang mengandung 2 adalah  $10 \times 72 = 720$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  yang mengandung 3 adalah  $10 \times 575 = 5750$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  yang mengandung 4 adalah  $10 \times 3963 = 39630$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  yang mengandung 5 adalah  $10 \times 2285 = 22850$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  yang mengandung 6 adalah  $10 \times 106461 = 1064610$ .

Jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  yang mengandung 11 adalah  $10 \times 73232 = 732320$ .

Diperoleh jumlah maksimum koordinat berbeda  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$  adalah  $1048576 + 10 + 90 + 720 + 5750 + 39630 + 22850 + 1064610 + 732320 = 3119956$ , sedangkan banyak simpul dari  $P_{10}$  adalah  $10! = 3628800$ . Akibatnya pasti ada sedikitnya 2 simpul dengan koordinat yang sama.

Pengandaian salah, jadi  $\beta(P_{10}) \geq 11$ .

Sehingga akan didapatkan  $\beta(P_5) \geq 4, \beta(P_6) \geq 5, \beta(P_7) \geq 6, \beta(P_8) \geq 8, \beta(P_9) \geq 9, \beta(P_{10}) \geq 11$ .

Selain itu, berdasarkan pencarian batas bawah dimensi metrik graf  $P_n$  tersebut, kami mengembangkan algoritma yang dapat digunakan untuk mencari batas bawah dimensi metrik graf  $P_n$  sebagai berikut.

**Algoritma 2** Pencarian batas bawah dimensi metrik graf Panekuk

---

```

1: Pilih titik  $u$  pada graf  $P_n$ 
2: Cari jarak terpendek setiap titik ke titik  $u$ 
3: Labeli setiap titik berjarak  $d$  ke titik  $u$  dengan  $d$ 
4: for  $i = 1, i \leq \text{diameter } P_n, i++$  do
5:   for  $j = 1, j \leq i, j++$  do
6:     Pilih  $j$  buah label  $d$  dengan  $|e| < |d|$  untuk setiap label  $e$  lainnya
7:     if  $d$  label yang dipilih then
8:       Hitung  $j^i$ 
9:     else
10:      Hitung  $(i - j) \times |d|$ 
11:     end if
12:     sum= jumlah seluruh  $j^i$  dan  $(i - j) \times |d|$ 
13:   end for
14: end for
15:  $p = j$ , di mana  $\max(\text{sum})$  dengan  $\text{sum} < n!$  ada pada state  $j$ 

```

---

**3. Kesimpulan**

Dimensi metrik dari graf Panekuk  $P_n$  untuk  $n = 3, 4$  adalah  $\beta(P_3) = 2$  dan  $\beta(P_4) = 3$ . Dimensi metrik dari graf Panekuk  $P_n$  untuk  $5 \leq n \leq 10$  terbatas pada  $4 \leq \beta(P_5) \leq 6$ ,  $5 \leq \beta(P_6) \leq 8$ ,  $6 \leq \beta(P_7) \leq 11$ ,  $7 \leq \beta(P_8)$ ,  $9 \leq \beta(P_9)$ , dan  $11 \leq \beta(P_{10})$ . Selain itu, pencarian dimensi metrik graf Panekuk  $P_n$  juga menginisiasi kami untuk mengembangkan sebuah algoritma pencarian bawah dimensi metrik graf Panekuk yang disajikan sebagai Algoritma 2.

**Daftar Pustaka**

- [1] F. Harary and R. A. Melter, "On the metric dimension of a graph," *Ars combin*, vol. 2, no. 191-195, p. 1, 1976.
- [2] P. J. Slater, "Leaves of trees," *Congr. Numer*, vol. 14, no. 549-559, p. 37, 1975.
- [3] M. Jannesari and B. Oomoomi, "Characterization of n-vertex graphs with metric dimension n-3," *arXiv preprint arXiv:1103.3588*, 2011.
- [4] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann, "Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 105, no. 1-3, pp. 99-113, 2000.
- [5] P. Singh, S. Sharma, S. K. Sharma, and V. K. Bhat, "Metric dimension and edge metric dimension of windmill graphs," *Aims Mathematics*, vol. 6, no. 9, pp. 9138-9153, 2021.
- [6] Q. T. Nguyen and S. Bettayeb, "On the genus of pancake network.," *Int. Arab J. Inf. Technol.*, vol. 8, no. 3, pp. 289-292, 2011.
- [7] B. Chitturi, W. Fahle, Z. Meng, L. Morales, C. O. Shields, I. H. Sudborough, and W. Voit, "An  $(18/11)$  n upper bound for sorting by prefix reversals," *Theoretical Computer Science*, vol. 410, no. 36, pp. 3372-3390, 2009.
- [8] S. A. Blanco, C. Buehrle, and A. Patidar, "On the number of pancake stacks requiring four flips to be sorted," *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, vol. 21, 2019.