J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 9 No. 1 (2025) pp. 16-25
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN: 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

INDEKS SOMBOR, INDEKS SOMBOR TEREDUKSI, DAN INDEKS SOMBOR RATA-RATA DARI GRAF NON-KOPRIMA PADA GRUP DIHEDRAL

FATHUL MAULINA WAHIDAH[1], NA'IMAH HIJRIATI[2], I GEDE ADHITYA WISNU WARDHANA[3*]

[1,3]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mataram, Jl Majapahit no 62, Mataram, Indonesia,
[2]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat, Banjarbaru, Indonesia

*Penulis korespondensi: adhitya.wardhana@unram.ac.id

ABSTRAK

Belakangan ini, studi mengenai indeks molekul kimia yang dihungkan dengan teori graf menjadi salah satu topik penelitian yang menarik. Dalam studi graf kimia terdapat ukuran-ukuran yang dikenal sebagai indeks topologi yang digunakan untuk menganalisis struktur serta sifat-sifat molekul. Salah satunya adalah indeks Sombor, indeks Sombor tereduksi, dan indeks Sombor rata-rata. Fokus utama penelitian ini adalah untuk mencari rumus umum dari indeks Sombor, indeks Sombor tereduksi dan indeks Sombor rata-rata pada graf non-koprima dari grup dihedral, hal ini diharapkan dapat memberikan kontribusi pada pengembangan teori graf dan aplikasinya dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan yang memanfaatkan teori graf dan indeks topologi.
Kata Kunci: indeks topologi molekul; indeks Sombor; grup dihedral

ABSTRACT

Recently, the study of molecular representation linked to graph theory has become an intriguing research topic. In chemical graph studies, measures known as topological indices are used to analyze the structure and properties of molecules. Among these indices are the Sombor index, the reduced Sombor index, and the average Sombor index. The main focus of this research is to derive general formulas for the Sombor index, the reduced Sombor index, and the average Sombor index on the non-coprime graph of the dihedral group. This is expected to contribute to the development of graph theory and its applications in various scientific fields that utilize graph theory and topological indices.
Keywords: *molecular topological indixed; Sombor index; dihedral group*

1 Pendahuluan

Belakangan ini, studi mengenai teori graf sangat menarik perhatian para peneliti di berbagai bidang, seperti bidang matematika dan sains. Meski topik tentang teori graf adalah salah satu topik yang telah ada sejak abad ke-17, namun penelitian mengenai teori graf masih sangat diminati sampai dengan saat ini, karena kegunaannya yang dapat direpresentasikan pada objek-objek diskrit dan keterhubungan antara satu objek dengan objek yang lainnya [3].

Dalam bidang matematika, teori graf dapat digunakan untuk merepresentasikan berbagai sistem matematika, seperti grup, ring, dan modul. Beberapa contoh graf yang dapat

2020 *Mathematics Subject Classification*: 05C25, 05C07, 05C90
Diterima: 28-11-24; direvisi: 12-03-25; dimuat: 26-04-25

direpresentasikan dalam konteks grup antara lain graf non-koprima dari grup bilangan bulat modulo serta graf non-koprima pada grup dihedral, graf koprima dari grup bilangan bulat modulo, dan lain sebagainya [8], [9], [10]. Selain itu, teori graf juga memiliki kaitan erat dengan indeks topologi molekul.

Indeks topologi adalah bagian dari struktur aljabar yang digunakan untuk mengukur berbagai karakteristik graf, seperti jarak antar simpul dan kerapatan, serta sifat-sifat khusus lainnya. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bagaimana keterhubungan antara struktur matematika dalam teori graf dengan indeks topologinya. Adapun indeks topologi yang yang biasa kita kenal yaitu indeks Wiener, indeks Zagreb, indeks Randić, indeks Harary, indeks Szeged, dan indeks Sombor [11].

Salah satu indeks topologi yang memiliki peran yang sangat penting dalam bidang kimia yaitu indeks Sombor. Indeks Sombor dalam kimia digunakan untuk memprediksi sifat fisio-kimia [7], dan pada studi tentang QSAR/QSPR indeks Sombor digunakan untuk mengukur informasi struktural dari graf kimia dan jaringan kompleks [6]. Pada matematika indeks Sombor digunakan pada graf nilpotent di gelanggang bilangan bulat modulo [5], graf koprima pada grup quternion yang diperumum [2], hingga graf koprima pada grup dihedral [12]. Hal inilah yang menjadikan penulis termotivasi untuk mengangkat topik ini dan mendapatkan rumus umum dari keterhubungan antara indeks Sombor, indeks Sombor tereduksi, dan indeks Sombor rata-rata pada graf non-koprima dari grup dihedral. Hasil ini diharapkan dapat meningkatkan pengetahuan dan dapat memberikan kontribusi penting terhadap perkembangan ilmu pengetahuan.

2 Tinjauan Pustaka

Berdasar pada latar belakang tersebut, upaya dalam menemukan rumus umum dari indeks Sombor pada graf non-koprima dari grup dihedral adalah topik yang menarik untuk diteliti. Indeks Sombor memerankan peran yang sangat penting dalam analisis karakterisik graf khususnya dalam graf non-koprima pada grup dihedral. Adapun dalam penyelesaiannya dibutuhkan beberapa terminologi dasar yang relevan yang mencakup definisi dari grup dihedral, graf non-koprima, dan definisi dari indeks sombor itu sendiri.

Definisi 2.1 [1] Grup H, disebut grup dihedral dengan orde $2n, n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$ adalah grup bi-siklik dengan pembangun $a, b \in H$ dengan

$$H = \langle a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Grup dihedral dengan orde $2n$ dinotasikan dengan D_{2n}. Semua anggota himpunan grup dihedral dapat didaftarkan seperti $D_{2n} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$ dengan a disebut sebagai elemen rotasi dan b disebut sebagai elemen refleksi.

Pada penelitian ini, graf non-koprima digunakan untuk melihat hubungan antara elemen-elemen dalam suatu grup berdasarkan sifat divisibilitasnya, sehingga kita dapat lebih mudah memahami pola dan struktur dalam grup tersebut. Graf non-koprima dari suatu grup sebarang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2 [4] Graf non-koprima dari grup H, yang dinotasikan dengan $\overline{\Gamma}_H$, adalah graf dengan simpul-simpul yang terdiri dari $\overline{H} = H - \{e\}$, dan dua simpul yang berbeda $u, v \in H$ saling berhubungan jika dan hanya jika $\gcd(|u|, |v|) \neq 1$.

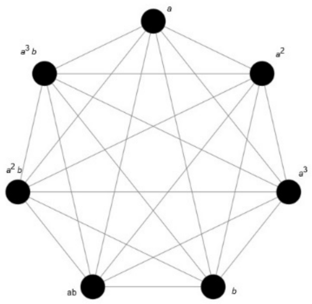
Sebuah penelitian sebelumnya dinyatakan bahwa graf non-koprima yang merupakan representasi dari grup dihedral dengan orde $2n$ merupakan suatu graf terhubung yang mengandung graf lengkap dan graf lengkap tak terhubung. Fakta ini dinyatakan pada teorema-teorema berikut.

Teorema 2.1 [10] Diberikan grup dihedral D_{2n} dengan $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}$ merupakan sebuah graf lengkap.

Conton 2.1 Graf non-koprima yang merupakan representasi dari grup dihedral D_8 diberikan oleh Tabel 2.1 dan Gambar 2.1 yang menunjukkan bentuk graf adalah graf lengkap K_7.

Tabel 2.1 Orde dari $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_8}}}$

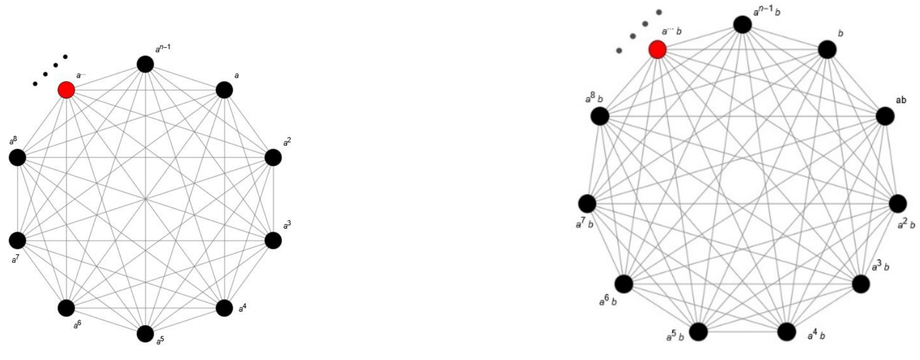
Elemen	Orde
$\boldsymbol{a}$	4
$\boldsymbol{a^2}$	2
$\boldsymbol{a^3}$	4
$\boldsymbol{b}$	2
$\boldsymbol{ab}$	2
$\boldsymbol{a^2b}$	2
$\boldsymbol{a^3b}$	2



Gambar 2.1 Graf non-koprima dari grup dihedral D_8 ($\overline{\Gamma_{\mathrm{D_8}}}$)

Teorema 2.2 [10] Diberikan grup dihedral D_{2n} dengan $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dan p merupakan bilangan prima ganjil. Diperoleh $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}$ dapat terdiri dari dua subgraf lengkap yang tak terhubung.

Dari Teorema 2.2 kita ketahui bahwa setiap elemen rotasi pada graf dihedral D_{2n} bertetangga dengan elemen rotasi lainnya, setiap elemen refleksi pada graf dihedral D_{2n} bertetangga dengan elemen refleksi lainnya, namun elemen rotasi dan elemen refleksi pada graf dihedral D_{2n} tidak bertetangga satu dengan yang lainnya. Oleh karena itu, $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}$ dapat dipartisi menjadi dua graf lengkap yang tak terhubung. Untuk mengilustrasikan permasalahan tersebut, lihatlah gambar berikut.



(a) (b)

Gambar 2.2 (a) Graf lengkap yang memuat elemen rotasi

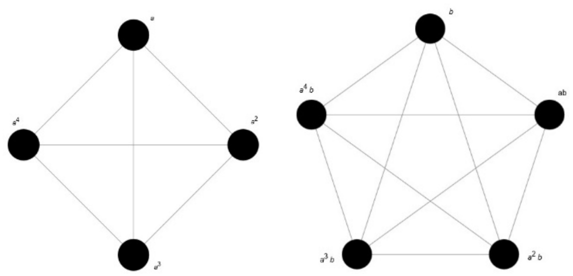
(b) Graf lengkap yang memuat elemen refleksi

Untuk mempermudah pemahaman, berikut diberikan contoh sederhana untuk mengilustrasikan Teorema 2.2.

Contoh 2.2 Graf non-koprima dari grup dihedral D_{10} diberikan oleh Tabel 2.2 dan Gambar 2.3 yang menunjukkan bentuk graf non-koprima dari grup dihedral D_{10} adalah kombinasi dari dua graf lengkap $K_4 \cup K_5$.

Tabel 2.2 Orde dari $\overline{\Gamma_{D_{10}}}$

Elemen	Orde
$\boldsymbol{a}$	5
$\boldsymbol{a^2}$	5
$\boldsymbol{a^3}$	5
$\boldsymbol{a^4}$	5
$\boldsymbol{b}$	2
$\boldsymbol{ab}$	2
$\boldsymbol{a^2b}$	2
$\boldsymbol{a^3b}$	2
$\boldsymbol{a^4b}$	2



Gambar 2.3 Graf non-koprima dari grup dihedral D_{10} $(\overline{\Gamma_{10}})$

Dalam penelitian ini, diperlukan pemahaman mendalam mengenai indeks Sombor, indeks Sombor tereduksi, dan indeks Sombor rata-rata. Berikut adalah masing-masing definisi indeks tersebut.

Definisi 2.3 [5] Diberikan graf H dengan himpunan simpul $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Indeks Sombor dari H yang dinotasikan dengan $SO(H)$ adalah sebagai berikut.

$$SO(H) = \sum_{(u,v)\in E(H)} \sqrt{deg(u)^2 + deg(v)^2},$$

dengan $deg\ (u)$ dan $deg\ (v)$ adalah derajat dari simpul u dan v.

Definisi 2.4 [12] Diberikan graf H dengan himpunan simpul $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Indeks Sombor tereduksi dari H yang dinotasikan dengan $SO_{red}(H)$ adalah sebagai berikut.

$$SO_{red}(H) = \sum_{(u,v)\in E(H)} \sqrt{(deg(u)-1)^2 + (deg(v)-1)^2}.$$

Definisi 2.5 [2] Misalkan diberikan graf H dengan himpunan simpul $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Indeks Sombor rata-rata dari H yang dinotasikan dengan $SO_{avr}(H)$ diberikan pada teorema berikut.

$$SO_{red}(H) = \sum_{(u,v)\in E(H)} \sqrt{\left(deg(u) - \frac{2m}{n}\right)^2 + \left(deg(v) - \frac{2m}{n}\right)^2},$$

dengan m menyatakan jumlah sisi dan n menyatakan jumlah simpul.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, diperoleh indeks Sombor, indeks Sombor tereduksi, dan indeks Sombor rata-rata dari graf non-koprima pada grup dihedral orde $n = 2^k$ dan $n = p^k$ berturut-turut diberikan pada teorema berikut..

Teorema 3.1 Misalkan diberikan graf non-koprima yang merupakan representasi dari grup dihedral D_{2n} $\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)$ dengan $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks Sombor dari $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}$, dinotasikan dengan $SO\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)$, adalah

$$SO\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right) = (n-1)(2n-1)(2n-2)\sqrt{2}.$$

BUKTI. Berdasarkan Teorema 2.1 $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}$ merupakan graf lengkap K_{2n-1}, maka $\forall x \in V\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)$, derajat dari x adalah $\deg(x) = 2n-2$. Selanjutnya banyak sisi yang terbentuk dari $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}$ adalah $\binom{2n-1}{2}$. Sehingga indeks Sombor dari graf non-koprima pada grup dihedral

$$\begin{aligned} SO\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right) &= \binom{2n-1}{2}\sqrt{(2n-2)^2 + (2n-2)^2} \\ &= \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}\sqrt{2(2n-2)^2} \\ &= (n-1)(2n-1)(2n-2)\sqrt{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.2 Misalkan diberikan graf non-koprima dari grup dihedral D_{2n} $\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)$ dengan $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks Sombor tereduksi dari $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}$, dinotasikan dengan $SO\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)$, adalah

$$(2n-1)(n-1)(2n-3)\sqrt{2}.$$

BUKTI. Serupa dengan bukti pada Teorema 3.1. Indeks Sombor tereduksi dari graf non-koprima pada grup dihedral adalah

$$SO_{red}\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right) = \binom{2n-1}{2}\sqrt{\left((2n-2)-1\right)^2 + \left((2n-2)-1\right)^2}$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}\sqrt{2(2n-3)^2}$$
$$= (2n-1)(n-1)(2n-3)\sqrt{2}. \blacksquare$$

Teorema 3.3 Misalkan diberiklan graf non-koprima yang merupakan representasi dari grup dihedral D_{2n} $\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right)$ dengan $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks Sombor rata-rata dari $\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}$, dinotasikan dengan $SO\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right)$ adalah

$$(2n-1)(n-1)\left((2n-2) - \frac{(2n-1)(2n-2)}{n}\right)\sqrt{2}.$$

BUKTI. Serupa dengan bukti pada Teorema 3.1, diperoleh $m = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$ sehingga $\frac{m}{n} = \frac{(2n-1)(2n-2)}{2n}$. Dengan demikian, Indeks Sombor rata-rata dari graf non-koprima pada grup dihedral adalah

$$SO_{avr}\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right) = \binom{2n-1}{2}\sqrt{\left((2n-2) - \frac{2m}{n}\right)^2 + \left((2n-2) - \frac{2m}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}\sqrt{\left((2n-2) - \frac{2(2n-1)(2n-2)}{2n}\right)^2 + \left((2n-2) - \frac{2(2n-1)(2n-2)}{2n}\right)^2}$$

$$= (2n-1)(n-1)\left((2n-2) - \frac{(2n-1)(2n-2)}{n}\right)\sqrt{2}. \blacksquare$$

Teorema 3.4 Misalkan diberikan graf non-koprima yang merupakan representasi dari grup dihedral D_{2n} $\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right)$ dengan $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, dan p adalah bilangan prima ganjil, maka indeks Sombor dari $\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}$, dinotasikan dengan $SO\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right)$, adalah

$$SO\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right) = \frac{(n-1)(n-2)^2 + n(n-1)^2}{2}\sqrt{2}.$$

BUKTI. Berdasarkan Teorema 2.2 $\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}$ terpartisi menjadi dua subgraf lengkap yang tak terhubung. Akibatnya simpul pada $\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan simpul. Misalkan $V_1 = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$ dan $V_2 = \{b, ab, a^2b, a^3b, \dots, a^{n-1}b\}$, dengan V_1 merupakan kumpulan elemen rotasi dan V_2 merupakan kumpulan elemen refleksi. Karena V_1 membentuk subgraf lengkap, maka $\deg(u_i) = n-2, u_i \in V_1$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-1$. Dan karena V_2 membentuk subgraf lengkap, maka $\deg(v_i) = n-1, v_i \in V_2$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$. Berdasarkan Definisi 2.3 indeks Sombor dari $\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}$ sebagai berikut.

$$SO\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right) = \sum_{(u,v)\in E\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right)} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2}$$

$$= \sum_{\substack{(u_i,u_j)\in E\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right) \\ u_i,u_j\in V_1 \\ i,j=1,2,\dots,n-1 \\ i\neq j}} \sqrt{\deg(u_i)^2 + \deg(u_j)^2} + \sum_{\substack{(v_i,v_j)\in E\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D}_{2n}}}\right) \\ v_i,v_j\in V_2 \\ i,j=1,2,\dots,n \\ i\neq j}} \sqrt{\deg(v_i)^2 + \deg(v_j)^2}.$$

Karena $|V_1| = n-1$, artinya terdapat $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ sisi. Dengan demikian, diperoleh

$$\sum_{\substack{(u_i,u_j)\in E(\overline{\Gamma_{D_{2n}}})\\ u_i,u_j\in V_1\\ i,j=1,2,\dots,n-1\\ i\neq j}} \sqrt{\deg(u_i)^2+\deg(u_j)^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\sqrt{(n-2)^2+(n-2)^2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)^2}{2}\sqrt{2}.$$

Karena $|V_2| = n$, artinya ada $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi sedemikian sehingga diperoleh

$$\sum_{\substack{(v_i,v_j)\in E(\overline{\Gamma_{D_{2n}}})\\ v_i,v_j\in V_2\\ i,j=1,2,\dots,n\\ i\neq j}} \sqrt{\deg(v_i)^2+\deg(v_j)^2} = \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{(n-1)^2+(n-1)^2}$$

$$= \frac{n(n-1)^2}{2}\sqrt{2}.$$

Akibatnya diperoleh rumus umum dari indeks Sombor dari $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ adalah

$$SO(\overline{\Gamma_{D_{2n}}}) = \sum_{\substack{(u_i,u_j)\in E(\overline{\Gamma_{D_{2n}}})\\ u_i,u_j\in V_1\\ i,j=1,2,\dots,n-1\\ i\neq j}} \sqrt{\deg(u_i)^2+\deg(u_j)^2} + \sum_{\substack{(v_i,v_j)\in E(\overline{\Gamma_{D_{2n}}})\\ v_i,v_j\in V_2\\ i,j=1,2,\dots,n\\ i\neq j}} \sqrt{\deg(v_i)^2+\deg(v_j)^2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)^2}{2}\sqrt{2} + \frac{n(n-1)^2}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{n(n-1)^2+(n-1)(n-2)^2}{2}\sqrt{2}. \blacksquare$$

Teorema 3.5 Jika diberikan graf non-koprima yang merupakan representasi dari grup dihedral D_{2n} $(\overline{\Gamma_{D_{2n}}})$ dengan $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, dan p merupakan bilangan prima ganjil maka indeks Sombor tereduksi dari $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$, dinotasikan dengan $SO(\overline{\Gamma_{D_{2n}}})$, adalah

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)+n(n-1)(n-2)}{2}\sqrt{2}.$$

BUKTI. Serupa dengan bukti pada Teorema 3.4. Indeks Sombor tereduksi dari graf non-koprima pada grup dihedral orde $2n$ adalah

$$SO_{red}(\overline{\Gamma_{D_{2n}}}) = \sum_{(u,v)\in E(\overline{\Gamma_{D_{2n}}})} \sqrt{(\deg(u)-1)^2+(\deg(v)-1)^2}$$

$$= \sum_{\substack{(u_i,u_j)\in E(\overline{\Gamma_{D_{2n}}})\\ u_i,u_j\in V_1\\ i,j=1,2,\dots,n-1\\ i\neq j}} \sqrt{(\deg(u_i)-1)^2+(\deg(u_j)-1)^2}$$

$$+ \sum_{\substack{(v_i,v_j)\in E(\overline{\Gamma_{D_{2n}}})\\ v_i,v_j\in V_2\\ i,j=1,2,\dots,n\\ i\neq j}} \sqrt{(\deg(v_i)-1)^2+(\deg(v_j)-1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\sqrt{\left((n-2)-1\right)^2+\left((n-2)-1\right)^2} \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\left((n-1)-1\right)^2+\left((n-1)-1\right)^2} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2}(n-3)\sqrt{2}+\frac{n(n-1)}{2}(n-2)\sqrt{2} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)+n(n-1)(n-2)}{2}\sqrt{2}. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Teorema 3.6 Jika diberikan graf non-koprima yang merupakan representasi dari grup dihedral D_{2n} $\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)$ dengan $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, dan p merupakan bilangan prima ganjil maka indeks Sombor rata-rata dari $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}$, dinotasikan dengan $SO\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)$, adalah

$$\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\left(\frac{n(n-2)-2(n-1)^2}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)-2(n-1)^2}{n}\right)\right)\sqrt{2}.$$

BUKTI. Serupa dengan bukti pada Teorema 3.4. Misalkan m_1 adalah banyak sisi yang terbentuk dari kumpulan elemen rotasi (V_1) dan m_2 adalah banyak sisi yang terbentuk dari kumpulan elemen refleksi (V_2) diperoleh banyak sisi dari $\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}$ adalah $m = m_1 + m_2 = (n-1)^2$ sehingga $\frac{m}{n} = \frac{(n-1)^2}{n}$. Akibatnya diperoleh indeks Sombor rata-rata dari graf non-koprima pada grup dihedral adalah

$$
\begin{aligned}
SO_{avr}\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right) &= \sum_{(u,v)\in E\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)} \sqrt{\left(\deg(u)-\frac{2m}{n}\right)^2+\left(\deg(v)-\frac{2m}{n}\right)^2} \\
&= \sum_{\substack{(u_i,u_j)\in E\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)\\ u_i,u_j\in V_1\\ i,j=1,2,\dots,n-1\\ i\neq j}} \sqrt{\left(\deg(u_i)-\frac{2m}{n}\right)^2+\left(\deg(u_j)-\frac{2m}{n}\right)^2} \\
&\quad + \sum_{\substack{(v_i,v_j)\in E\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{D_{2n}}}}\right)\\ v_i,v_j\in V_2\\ i,j=1,2,\dots,n\\ i\neq j}} \sqrt{\left(\deg(v_i)-\frac{2m}{n}\right)^2+\left(\deg(v_j)-\frac{2m}{n}\right)^2} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\sqrt{\left(n-2-\frac{2(n-1)^2}{n}\right)^2+\left(n-2-\frac{2(n-1)^2}{n}\right)^2} \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2}\sqrt{\left(n-1-\frac{2(n-1)^2}{n}\right)^2+\left(n-1-\frac{2(n-1)^2}{n}\right)^2} \\
&= \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\left(n-2-\frac{2(n-1)^2}{n}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)}{2}\left(n-1-\frac{2(n-1)^2}{n}\right)\right)\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} \left(\frac{n(n-2) - 2(n-1)^2}{n} \right) + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1) - 2(n-1)^2}{n} \right) \right) \sqrt{2}. \blacksquare$$

4 Kesimpulan

Sebagai kesimpulan, rumus umum untuk indeks Sombor, indeks Sombor tereduksi, dan indeks Sombor rata-rata telah berhasil diperoleh untuk graf non-koprime yang dikaitkan dengan grup dihedral D_{2n}, dimana n merupakan bilangan asli berupa prima berpangkat.

Daftar Pustaka

[1] A. Gazir and I. G. A. W. Wardhana, “Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral,” *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, vol. 1, no. 2, p. 73, Dec. 2019, doi: 10.29303/emj.v1i2.26.

[2] A. M. Siboro, F. Maulana, N. Hijriati, and I. G. A. W. Wardhana, “The Sombor Index and Its Generalization of The Coprime Graph for the Generalized Quaternion Group,” in *Proceedings of Science and Mathematics*, 2024, pp. 65–70. [Online]. Available: https://science.utm.my/procscimath/

[3] D. Satriawan, Q. Aini, F. Maulana, and I. G. A. W. Wardhana, “Molecular Topology Index of a Zero Divisor Graph on a Ring of Integers Modulo Prime Power Order,” *Contemporary Mathematics and Applications*, vol. 6, no. 2, pp. 72–82, 2024.

[4] F. Mansoori, A. Erfanian, and B. Tolue, “Non-coprime graph of a finite group,” *AIP Conf Proc*, vol. 1750, no. June 2016, 2016, doi: 10.1063/1.4954605.

[5] F. M. Wahidah, F. Maulana, imah Hijriati, and I. G. A. W. Wardana, “The Sombor Index of the Nilpotent Graph of Modulo Integer Numbers,” in *Proceedings of Science and Mathematics*, 2024, pp. 48–52. [Online]. Available: https://science.utm.my/procscimath/Volume26

[6] G. K. Jayanna, “Entropy Measures of Some Nanotubes Using Sombor Index,” *NanoNEXT*, vol. 3, no. 3, pp. 1–5, Aug. 2022, doi: 10.54392/nnxt2231.

[7] H. Deng, Z. Tang, and R. Wu, “Molecular trees with extremal values of Sombor indices,” *Int J Quantum Chem*, vol. 121, no. 11, Jun. 2021, doi: 10.1002/qua.26622.

[8] L. H. Ghoffari, I. G. A. W. Wardhana, and Abdurahim, “Padmakar-Ivan and Randic Indices of Non-Coprime Graph of Modulo Integer Groups,” *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, vol. 24, no. 1, pp. 73–84, 2024, [Online]. Available: https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index

[9] Nurhabibah, D. P. Malik, H. Syafitri, and I. G. A. W. Wardhana, “Some results of the non-coprime graph of a generalized quaternion group for some n,” *AIP Conf Proc*, vol. 2641, no. December 2022, p. 020001, 2022, doi: 10.1063/5.0114975.

[10] S. A. Aulia, I. G. A. W. Wardhana, W. U. Misuki, and N. D. H. Nghiem, “The Structures of Non-Coprime Graphs for Finite Groups from Dihedral Groups with Regular Composite Orders,” *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 115–122, 2023, doi: 10.15408/inprime.v5i2.29018.

[11] S. H. P. Ningrum, A. M. Siboro, S. T. Lestari, I. G. A. W. Wardhana, and Z. Y. Awanis, “ABSTRAKSI CHEMICAL TOPOLOGICAL GRAPH (CTG) MELALUI INDEKS TOPOLOGIS GRAF ALJABAR,” in *Prosiding Saintek 6*, 2024, pp. 92–100.

[12] S. Putri, F. Maulana, N. Hijriati, and I. G. A. W. Wardhana, “Sombor Index, Reduced Sombor Index, and Average Sombor Index of Coprime Graph Associated to the

Dihedral Groups of Order 2n," in *Proceedings of Science and Mathematics*, 2024, pp. 85–93. [Online]. Available: https://science.utm.my/procscimath/Volume26