J. Ris. Ap. Mat. Vol. 9, No. 1 (2025), pp. 26–43.
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

SPEKTRUM MATRIKS KETETANGGAAN GRAF CAYLEY PADA GRUP $\mathbb{Z}_n$

Yohanis Christanto Sewar[1*], Ganesha L. Putra[2], Farly O. Haning[3], Irvandi G. Pasangka[4].

[1,2,3,4]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana.

*Corresponding email:yohanischristantosewar@gmail.com

Abstrak

Graf Cayley merupakan graf yang merepretasikan suatu grup. Graf Cayley sama seperti konsep teori graf, pada umumnya terdiri dari *vertex* dan *edges*, dimana simpulnya merupakan elemen grup sedangkan *edges*-nya dibentuk berdasarkan himpunan pembangkit dari elemen grup kecuali elemen identitas. Graf Cayley dapat direpretasikan ke dalam matriks ketetanggaan dimana simpul yang saling bertetanggaan bernilai 1 dan bernilai 0 jika tidak saling bertetangga. Spektrum matriks merupakan kumpulan nilai eigen dengan multiplisitasnya yang direpretasikan ke dalam matriks. Tujuan penelitian ini adalah mengetahui pola umum graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$ dan spektrum matriks ketetanggan graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$. Penelitian ini dilakukan dengan meggunakan studi literatur dan diperoleh hasil bahwa graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$ merupakan graf teratur. Adapun jenis-jenis graf graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$ antara lain lain graf nP_2, graf C_n, graf K_n, graf $kK_{\frac{n}{k}}$, graf $2K_n$. Spektrum matriks ketetanggaan graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$ diperoleh dengan memanfaatkan matriks sirkulan dalam penyelesaiannya.

Kata kunci: Graf Cayley, Grup $\mathbb{Z}_n$, Matriks Ketetangaan, Matriks Sirkulan, Spektrum Matriks

Abstract

A Cayley graph is a graph that represents a group. Cayley graphs, just like the concept of graph theory, generally consist of vertex and edges, where the vertices are group elements while the edges is formed based on the generating set of group elements except the identity element. The Cayley graph can be represented as an adjacency matrix where the neighboring vertices are 1 and 0 if they are not. The matrix spectrum is a collection of eigenvalues with their multiplicities represented in a matrix. The purpose of this study is to determine the general pattern of Cayley graphs in group $\mathbb{Z}_n$ and the spectrum of the adjacency matrix of Cayley graphs in group $\mathbb{Z}_n$. This research was conducted using literature study and the results obtained that the Cayley graph in group $\mathbb{Z}_n$ is an ordered graph. The types of Cayley graphs in group $\mathbb{Z}_n$ include nP_2 graph, C_n graph, K_n graph, $kK_{\frac{n}{k}}$ graph, $2K_n$ graph. The adjacency matrix spectrum of Cayley graphs in group $\mathbb{Z}_n$ is obtained by utilizing the circulant matrix in its solution.

***Keywords**: Cayley Graph, Group $\mathbb{Z}_n$, Adjacency Matrix, Circulant Matrix, Matrix Spectrum.*

2020 Mathematics Subject Classification: 47A10
Diterima: 31-10-2024, direvisi: 12-03-2025, dimuat: 25-04-2025.

1 Pendahuluan

Matematika merupakan suatu cabang ilmu yang sangat berperan penting dalam kehidupan. Cabang ilmu ini terus mengalami perkembangan dari masa ke masa. Perkembangan matematika sendiri dimulai sejak zaman primitif. Hal ini dikemukan oleh Dr. Wati Susilawati (2017) dalam bukunya yang berjudul "Sejarah dan Filsafat Matematika"[1]. Dalam buku tersebut, dipaparkan bahwa matematika sudah dimanfaatkan sejak zaman primitif sebagai alat perhitungan domba atau populasi lainnya.

Teori Graf merupakan salah satu pengembangan dari ilmu matematika yang sering dibahas. Graf secara sederhana dapat digambarkan sebagai hubungan antara beberapa titik yang dikaitkan oleh sebuah garis, titik tersebut dinamakan *vertex* sedangkan garis dinamakan *edge*. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang ilmuwan matematika berkebangsaan Swiss yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736. Euler pada masa itu, berupaya memecahkan masalah terkait 7 jembatan Konigsberg. Dalam permasalahan tersebut, Euler menggambarkannya ke dalam model graf yang dimana, Ia memisalkan daratan sebagai *vertex* dan ketujuh jembatan Konigsberg sebagai *edges*. Dari permasalahan tersebut, Euler menyampaikan kesimpulan bahwa seseorang tidak akan mungkin melewati masing-masing jembatan hanya satu kali dan kembali pada titik awal. Kisah jembatan Konigsberg inilah yang menjadi Sejarah lahirnya Teori Graf (Munir,2010)[2]. Teori Graf terus mengalami perkembangan, banyak kajian yang membahas terkait bidang ilmu ini dan terapannya dalam kehidupan.

Aljabar merupakan salah satu topik dalam matematika yang menarik untuk dibahas. Berdasarkan etimologisnya, aljabar berasal dari Bahasa arab dari kata "al-jabr" yang berarti "hubungan", 'pertemuan". Aljabar pertama kali muncul pada zaman Babilonia kuno. Pada masa tersebut, aljabar digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang meliputi masalah persamaan linear, persamaan kuadrat dan persamaan linear tak tentu. Istilah aljabar diperkenalkan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Persia yang bernama Muhammad Ibn Musa Al-Khawarizwi yang kita kenal sebagai "Bapak Aljabar" (Noor Handayani, 2012)[3]. Banyak buah pemikiran beliau sering menjadi landasan dalam perkembangan ilmu aljabar. Pada tahun abad ke-19 Aljabar mengalami perkembangan, dikenalkanlah konsep aljabar abstrak. Konsep aljabar abstrak meliputi grup, gelanggang (*ring*), ruang vektor, lapangan *(field)*.

Grup merupakan pengembangan ilmu aljabar abstrak. Grup didefinisikan secara sederhana sebagai himpunan G yang dilengkapi dengan satu operasi biner, himpunan G yang dimaksud adalah himpunan tak kosong yang harus memenuhi empat aksioma, antara lain tertutup, asosiatif, identitas dan invers (Herstein, 1996)[4]. Himpunan $\mathbb{Z}_n$ terhadap operasi + ($\mathbb{Z}_n$,+) merupakan salah satu contoh grup. Grup $\mathbb{Z}_n$ mmerupakan himpunan bilangan bulat modulo n atau dengan kata lain suatu grup terhadap operasi penjumlahan modulo (Indra Bayu Muktyas dan Samsul Arifin, 2018)[5].

Teori grup dan Teori graf merupakan 2 pokok pembahasan yang sering kali dikaitkan. Dimana graf dapat dikombinasikan dengan grup. Graf Cayley merupakan contoh nyata graf yang dapat dikaitkan dengan konsep grup. Graf Cayley sama seperti konsep teori graf, pada umumnya terdiri dari *vertex* dan *edges*, dimana simpulnya merupakan elemen grup sedangkan *edges*-nya merupakan himpunan pembangkit dari elemen grup kecuali elemen identitas. Graf Cayley pertama kali dikemukan oleh seorang ilmuwan yang bernama Arthur Cayley. Pada tahun 1878, Cayley mencoba merepretasikan hubungan teori grup dan teori graf menggunakan diagram warna Cayley. Graf Cayley menjadi topik yang sangat menarik untuk dikaji. Teori ini dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, graf Cayley dapat dimanfaatkan dalam berbagai bidang kehidupan seperti biologi dan teori pengkodean (Afifan Hadi dan Kiki Ariyanti Sugeng, 2021)[6].

Spektrum Graf merupakan matriks yang elemennya terdiri dari nilai eigen dengan multipasitasnya. Sejarah mencatat, spektrum graf dibahas pertama kali sekitar pada tahun 1950 sampai 1960-an pada teori *spectral* graf [7]. Topik ini terus mengalami pengembangan. Hal itu menunjukkan bahwa ilmuwan matematika sangat antusias terhadap topik ini. Adapun metode pendekatan yang digunakan pada beberapa penelitian dalam mengkaji spektrum graf antara lain, pendekatan dengan menggunakan persamaan karakteristik maupun menggunakan nilai karakteristik dari matriks ketetanggannya.

Beberapa penelitian yang membahas terkait graf Cayley antara lain, Juan Daniel pada tahun 2022 dalam artikelnya yang berjudul *"Eigenvalue of Antiadjacency Matrix of Cayley Graph of ($\mathbb{Z}_n$,+)"*[8], Tirta Adlha Mujiwinarta dalam skripsinya yang terbit pada tahun 2014 dengan judul "Graf Cayley pada Grup Modulo-n" sudah menjelaskan langkah-langkah dalam membentuk graf Cayley pada grup modulo-n[9]. Ifkra Febri dalam skripsinya pada tahun 2019 dengan judul *"Spektrum Matriks Antiadjacency dan Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo"*[10]. Berdasarkan penelitian terdahulu, penulis mencoba untuk mengkaji lebih mendalam terkait graf Cayley yang merepretasikan grup $\mathbb{Z}_n$. Penulis tertarik untuk melakukan penelitian lebih lanjut dengan judul **"Spektrum Matriks Ketetanggaan Graf Cayley pada Grup $\mathbb{Z}_n$"**

2 Tinjauan Pustaka

Matriks

Definisi 2.1. *Matriks merupakan kumpulan bilangan yang direpresentasikan dalam suatu susunan persegi panjang. Bilangan-bilangan inilah yang disebut entri dalam matriks. Suatu matriks memiliki baris dan kolom matriks. Banyaknya baris dan kolom menunjukkan ukuran suatu matriks[11]. Matriks dengan ukuran $m \times n$ dapat dinyatakan sebagai berikut.*

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2. *Matriks persegi A dikatakan dapat didiagonalisasikan apabila terdapat matriks P yang mempunyai invers sehingga $P^{-1}AP$ diagonal, matriks P dikatakan sebagai matriks pendiagonal A[11].*

Definisi 2.3. *Sebuah matriks persegi S dengan ukuran $n \times n$ dikatakan sebagai matriks sirkulan apabila entri-entrinya memenuhi $s_{ij} = s_{1,j-i+1}$, dimana notasi indeksnya sisa modulo n dan terletak di dalam himpunan n $\{1, 2, ..., n\}$ atau dapat diartikan baris ke-i pada S dibentuk dari hasil pergeseran sirkular sebanyak $i - 1$ langkah pada anggota baris pertama S. Diberikan matriks W sebagai sebuah matriks sirkulan dengan baris pertama $[0, 1, 0, ..., 0]$ dan diketahui matriks S merupakan bentuk umum matriiks sirkulan dengan baris pertama $[s_1, s_2, ..., s_n]$[12]. Dapat dinotasikan sebagai berikut*

$$S = \sum_{j=1}^{n} s_j W^{j-1}$$

yang diperoleh dari:

$$\begin{aligned} circ[s_1, s_2, ..., s_n] &= s_1.I + s_2.circ[0, 1, 0, ..., 0] + s_3.(circ[0, 1, 0, ..., 0])^2 + \dots \\ &\quad + s_n(circle[0, 1, 0, ..., 0])^{n-1} \\ &= s_1 I + s_2 W + s_3 W^2 + \dots + s_n W^{n-1} \\ &= s_1 W^0 + s_2 W + s_3 W^2 + \dots + s_n W^{n-1} \end{aligned}$$

Definisi 2.4. *Misalkan G merupakan graf. Graf adalah himpunan pasangan terurut yang dinotasikan dengan* $G = (V, E)$*, dimana himpunan* $V(G)$ *merupakan himpunan tak kosong yang disebut titik (vertex atau simpul) dan* $E(G)$ *merupakan himpunan sisi(edges) yang terbentuk dari 2 titik(vertex) dan dilambangkan dengan* $e = (uv)$*,* $(uv) = (vu)$ *merupakan sisi yang sama.*

Definisi 2.5. *Diberikan suatu graf H, graf H dikatakan sebagai* ***subgraf*** *dari graf G apabila semua titik* $V(H)$ *merupakan titik yang ada pada* $V(G)$ *dan semua sisi* $E(H)$ *merupakan sisi yang ada pada sisi* $E(G)$ *atau dapat dinyatakan sebagai berikut,* $H \subseteq G$ ***, jika*** $V(H) \subseteq V(G)$ ***dan*** $E(H) \subseteq E(G)$*.*

Definisi 2.6. *Matriks yang terbentuk dari hubungan ketetanggaan vertex dinamakan matriks ketetanggaan atau adjacency matrix. Matriks ketetanggaan merupakan matriks dengan ukuran* $n \times n$*, yang dinotasikan dengan* $A(G) = [a_{ij}]$ *dengan* a_{ij} *mempunyai ketentuan [16].*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ;jika\ v_i\ bertetangga\ dengan\ v_j \\ 0 & ;jika\ v_i\ tidak\ bertetangga\ dengan\ v_j \end{cases}$$

Graf Cayley

Graf Cayley pertama kali dikemukan oleh Arthur Cayley pada tahun 1878, beliau mendefinisikan graf Cayley sebagai suatu graf yang dibangun oleh grup yang dibangkitkan oleh suatu generator pembangkit [15].

1. Misalkan Γ adalah grup berhingga dengan e sebagai elemen identitas S merupakan subhimpunan dari grup Γ dengan syarat $e \notin S$ Dan jika $s \in S$ maka $s^{-1} \in S$.

2. S merupakan himpunan generator dan elemen dari S disebut generator Γ , sehingga dapat dikatakan bahwa Γ dibangkitkan oleh S.

Definisi 2.7. *Graf Cayley* $G = Cay(\Gamma, S) = (V, E)$ *yang dimana V adalah himpunan titik* $V = \Gamma$ *Sedangkan himpunan sisi E merupakan sisi di graf Cayley jika dan hanya jika* $g^{-1}h \in S$ *atau* $\mathrm{hg}^{-1} \in S$ *dengan* $I_G \notin S$.

Grup

Definisi 2.8. *Suatu himpunan tak kosong G dikatakan Grup dengan operasi* $*$ *dinotasikan* $(G, *)$ *apabila memenuhi 4 aksioma, sebagai berikut (Herstein, 1996)[4].*

1. *Tertutup/closed*

2. *Asosiatif*

3. *Identitas*

4. *Invers*

Definisi 2.9. *Suatu Grup G dikatakan sebagai grup berhingga, memiliki anggota berhingga. Banyaknya elemen di G disebut order G atau secara matematis dinotasikan* $|G|$*.*

Definisi 2.10. *Suatu grup dikatakan grup Abelian apabila grup tersebut memenuhi sifat komutatif maka* $a * b = b * a$ *dengan* $a, b \in G$*.*

Definisi 2.11. *[4]Suatu himpunan tak kosong H dikatakan sebagai subgrup dari G apabila,* $H \subseteq G$ *dan* $< H, * >$ *merupakan grup dengan * merupakan operasi pada G.*

Definisi 2.12. *Misalkan* $< G, * >$ *merupakan suatu grup. Untuk* $a \in G, (a) = \{a^i | i \in \mathbb{Z}_n\}$ *merupakan subgrup siklik dari G.*

Subgrup siklik juga dapat didefinisikan sebagai subgrup yang dibangun oleh satu unsur.

Lemma 2.13. *Misalkan H merupakan himpunan tak kosong,* $H \subseteq G$*, H merupakan himpunan berhingga dengan operasi * tertutup di G maka H merupakan subgrup dari G.*

Definisi 2.14. *Suatu relasi "* $\sim$ *" pada himpunan S dikatakan relasi ekuivalen jika* $\forall a, b, c \in S$ *memenuhi :*

1. ***Reflektif***, $a \sim a$.
2. ***Simetri***, $a \sim b$ *maka* $b \sim a$
3. ***Transitif***, *jika* $a \sim b$ *dan* $b \sim c$ *maka* $a \sim c$

Definisi 2.15. *Jika "* $\sim$ *" merupakan suatu relasi ekuivalen pada S, maka a merupakan kelas dari a yang dinotasikan sebagai berikut .*

$$[a] = \{b \in S | b \sim a\}$$

Teorema 2.16. *jika "* $\sim$ *" adalah suatu relasi ekuivalen pada S maka* $S = \cup_{a \in A}[a]$. *Jika* $[a] \neq [b]$ *maka* $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Teorema 2.17. ***Teorema Lagrange***. *Jika G merupakan suatu grup dan H subgrup G, G merupakan grup berhingga maka* $|H|$ *habis membagi* $|G|$.

Definisi 2.18. *Jika G merupakan grup hingga, orde dari* $a \in G$ *dengan notasi* $o(a)$ *adalah bilangan bulat positif terkecil m sehingga* $a^m = e$

Teorema 2.19. *Jika G grup hingga dan* $a \in G$*, maka* $o(a) = |G|$

Grup $\mathbb{Z}_n$

Himpunan $\mathbb{Z}_n$ yaitu himpunan yang beranggotakan semua kelas yang diperoleh dari relasi ekuivalensi kongruen modulo-n. Disajikan suatu himpunan bilangan bulat modulo-n:

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{n-1}\}$$

Himpunan $\mathbb{Z}_n$ didefinisikan dengan operasi penjumlahan "+", ($\mathbb{Z}_n$, +) merupakan grup Abelian dengan elemen identitasnya adalah $\bar{0} \in \mathbb{Z}_n$.

Definisi 2.20. *Diberikan suatu graf G. Spektrum graf G merupakan kumpulan nilai eigen dan multiplisitasnya. Jika nilai eigen yang berbeda dinyatakan* $\lambda_0 > \lambda_1 > ... > \lambda_s - 1$ *dan multiplisitasnya dinyatakan* $m(\lambda_1), m(\lambda_2), ..., m(\lambda_{s-1})$. *Spektrum graf, secara matematis dapat ditulis*

$$x = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_{s-1}) \end{bmatrix}$$

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Bentuk Umum Graf Cayley pada Grup $\mathbb{Z}_n$

Teorema 3.1. *Misalkan $S \subseteq \mathbb{Z}_n$ dimana $e \notin S$ dan $s \in S \rightarrow s^{-1} \in S$. Graf Cayley $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ merupakan graf |S|-reguler.*

Bukti. Misalkan |S|= k dapat ditulis $S = \{\overline{s_1}, \overline{s_2}, \overline{s_3}, ..., \overline{s_k}\}$. Akan ditunjukkan bahwa titik di $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ memiliki derajat |S|= k ambil sebarang $\bar{v} \in \mathbb{Z}_n$ akan ditunjukkan $d(v) = k$. Berdasarkan **Definisi 2.4.1**, untuk sebarang titik $\bar{v}$ di $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ akan bertetangga dengan titik yang merupakan hasil operasi "+" penjumlahan dengan semua elemen $\mathbb{Z}_n$, maka $N(\bar{v}) = \{\bar{v}+\overline{s_1}, \bar{v}+\overline{s_2}, \bar{v}+\overline{s_3}, ..., \bar{v}+\overline{s_k}\}$. Oleh karena itu, $d(\bar{v}) = k$, terbukti bahwa $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ merupakan graf |S|-reguler.

Adapun jenis-jenis graf Cayley yang terbentuk berdasarkan subhimpunannya sebagai berikut.

Teorema 3.2. *Graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ dengan $|S|=$ 1, $S = \{\bar{n}\}$, dimana $\bar{n}^{-1} = \bar{n}$ maka graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ merupakan graf nP_2.*

Bukti. Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ dengan $S = \{\bar{n}\}$ merupakan graf nP_2. Misalkan $\bar{i} \in \mathbb{Z}_{2n}$

$$\begin{aligned} N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{n}^{-1}\} \\ &= \{\bar{i} + \bar{n}\} \end{aligned}$$

Karena $|S|= 1$ berdasarkan Teorema 4.1.1 maka graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ hanya bertetangga dengan 1 titik. Akibatnya,

$$\begin{aligned} N(\bar{0}) &= \{\bar{0} + \bar{n}\} \\ &\vdots \\ N(\overline{n-1}) &= \{\overline{n-1} + \bar{n}\} \end{aligned}$$

Terbukti, banyaknya lintasan yang terbentuk sebanyak n.

Teorema 3.3. *Graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ dengan $|S| = n$ dan $S = \{\bar{2}, \bar{4}, .., .., \overline{2n-4}, \overline{2n-2}\}$, maka graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ merupakan graf $2K_n$.*

Bukti. Misalkan diambil $\bar{i}, \bar{j}. \bar{i} \neq \bar{j} \in \mathbb{Z}_{2n}$

1. $\bar{i}$ genap bertetangga dengan $\bar{j}$ genap
   Perhatikan

   $$\begin{aligned} N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{2}^{-1}, \bar{i} + \bar{4}^{-1}, ..., \bar{i} + \overline{2n-2}^{-1}\} \\ N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{2}, \bar{i} + \bar{4}, ..., \bar{i} + \overline{(2n-2)}\} \end{aligned}$$

   Akan dibuktikan bahwa untuk $\bar{i} + \bar{k}$ dan $\bar{i} + \bar{j} \in N(i)$ dengan $k \neq j$

   $$\begin{aligned} \bar{k} &\neq \bar{j} \\ \bar{i} + \bar{k} &\neq \bar{j} \end{aligned}$$

   Tanpa mengurangi keumuman, $\bar{k} > \bar{j}$

   $$\begin{aligned} \bar{i} + \bar{k} - (\bar{i} + \bar{j}) &= \bar{i} + \bar{k} - \bar{i} - \bar{j} \\ &= \bar{k} - \bar{j} \\ \bar{i} + \bar{k} - (\bar{i} + \bar{j}) &= (\bar{k} - \bar{j}) \; mod \; 2n \end{aligned}$$

Karena $\bar{k} > \bar{j}$ maka $\bar{k} - \bar{j} > 0$. Diketahui $\bar{k} \leq \overline{2n-2}$ dan $\bar{j} \leq \overline{2n-2}$ maka $0 < \bar{k} - \bar{j} < \overline{2n-2}$. Akibatnya, $(\bar{k} - \bar{j})\ mod\ 2n \neq 0$.Akan dibuktikan untuk $\bar{x} \in N(\bar{i})$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \overline{i+k}; k \in S \\ \bar{x} \bmod 2n &= (\overline{i+k}) \bmod 2n = \bar{v} \\ \overline{i+k} &= (2n)\bar{y} + \bar{v} \\ \overline{i+k} - (2n)\bar{y} &= \bar{v} \end{aligned}$$

$\overline{i+k}$ merupakan bilangan genap dan $(2n)\bar{y}$ merupakan bilangan genap, akibatnya $\bar{v}$ merupakan bilangan genap. Terbukti bahwa ketika $\bar{i}$ bilangan genap akan bertetangga dengan $\bar{j}$ bilangan genap. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $|N(i)| = n$. Perhatikan,

$$\begin{aligned} N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{2}^{-1}, \bar{i} + \bar{4}^{-1}, ..., \bar{i} + \overline{2n-2}^{-1}\} \\ N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{2}, \bar{i} + \bar{4}, ..., \bar{i} + \overline{(2n-2)}\} \end{aligned}$$

Karena $\bar{i}$ bertetangga dengan tiap titik S maka akibatnya $\bar{i}$ bertetangga sebanyak n sehingga membentuk graf K_n bilangan genap

2. $\bar{i}$ ganjil bertetangga dengan $\bar{j}$ ganjil
   Perhatikan,

$$\begin{aligned} N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{2}^{-1}, \bar{i} + \bar{4}^{-1}, ..., \bar{i} + \overline{2n-2}^{-1}\} \\ N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{2}, \bar{i} + \bar{4}, ..., \bar{i} + \overline{(2n-2)}\} \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa untuk $\bar{i} + \bar{k}$ dan $\bar{i} + \bar{j} \in N(i)$ dengan $k \neq j$.

$$\begin{aligned} \bar{k} &\neq \bar{j} \\ \bar{i} + \bar{k} &\neq \bar{j} \end{aligned}$$

Tanpa mengurangi keumuman, $\bar{k} > \bar{j}$

$$\begin{aligned} \bar{i} + \bar{k} - (\bar{i} + \bar{j}) &= \bar{i} + \bar{k} - \bar{i} - \bar{j} \\ &= \bar{k} - \bar{j} \\ \bar{i} + \bar{k} - (\bar{i} + \bar{j}) &= (\bar{k} - \bar{j})\ mod\ 2n \end{aligned}$$

Karena $\bar{k} > \bar{j}$ maka $\bar{k} - \bar{j} > 0$. Diketahui $\bar{k} \leq \overline{2n-2}$ dan $\bar{j} \leq \overline{2n-2}$ maka $0 < \bar{k} - \bar{j} < \overline{2n-2}$. Akibatnya, $(\bar{k} - \bar{j})\ mod\ 2n \neq 0$. Akan dibuktikan untuk $\bar{x} \in N(\bar{i})$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \overline{i+k}; k \in S \\ \bar{x} \bmod 2n &= (\overline{i+k}) \bmod 2n = \bar{v} \\ \overline{i+k} &= (2n)\bar{y} + \bar{v} \\ \overline{i+k} - (2n)\bar{y} &= \bar{v} \end{aligned}$$

$\overline{i+k}$ merupakan bilangan ganjil dan $(2n)\bar{y}$ merupakan bilangan genap, akibatnya $\bar{v}$ merupakan bilangan ganjil. Sehingga terbukti ketika $\bar{i}$ bilangan ganjil akan bertetangga dengan $\bar{j}$ bilangan ganjil. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $|N(i)| = n$. Perhatikan,

$$\begin{aligned} N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{2}^{-1}, \bar{i} + \bar{4}^{-1}, ..., \bar{i} + \overline{2n-2}^{-1}\} \\ N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{2}, \bar{i} + \bar{4}, ..., \bar{i} + \overline{(2n-2)}\} \end{aligned}$$

Karena $\bar{i}$ bertetangga dengan tiap titik S maka akibatnya $\bar{i}$ bertetangga sebanyak n sehingga membentuk graf K_n bilangan ganjil

Teorema 3.4. *Graf Cayley $(\mathbb{Z}_n, S)$ dengan $|S|=$ n-1 dan $S = \{\bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$ merupakan graf lengkap.*

Bukti. Dikatakan graf lengkap K_n apabila 2 titik berbeda saling bertetangga.
Akan dibuktikan $\bar{i}$ dan $\bar{j}$ bertetangga dengan $\bar{i} \neq \bar{j}, \bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}_n$. Diambil $\bar{i}, \bar{j}$ akan ditunjukkan $\bar{i}$ dan $\bar{j}$ bertetangga

$$\begin{aligned} \bar{k} &\in S \\ N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \bar{k}\} \\ &= \{\bar{j}\} \end{aligned}$$

anggap $i < j$ karena $\bar{j} - \bar{i} \in S, \bar{j} - \bar{i} \neq 0, (\bar{j} - \bar{i})^{-1} \in S$

$$\begin{aligned} \bar{i} + \bar{k} &= \bar{j} \\ \bar{k} &= (\bar{j} - \bar{i})^{-1} \\ \bar{i} + ((\bar{j} - \bar{i})^{-1})^{-1} &= \bar{i} + \bar{j} - \bar{i} = \bar{j} \end{aligned}$$

Terbukti, $\bar{i}$ bertetangga dengan $\bar{j}$. Maka dapat disimpulkan bahwa titik $\bar{i}$ bertetangga dengan $\bar{j}$ sebanyak n-1.

Teorema 3.5. *Graf Cayley $(\mathbb{Z}_n, S)$ dengan $|S|=2$ dan $S = \{\bar{i}, \overline{(n-i)}\}$ serta FPB $(n, i) = 1$ dengan $1 \leq i \leq n-1$ maka graf Cayley $(\mathbb{Z}_n, S)$ adalah graf C_n.*

Bukti. Misalkan $(\mathbb{Z}_n, S) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$ dan $S = \{\bar{i}, \overline{n-i}\}$, karena $FPB(n, i) = 1$ maka $o(i) = n$. Selanjutnya, akan dibuktikan $o(i) = n$.
Ambil $\bar{0} \in \mathbb{Z}_n$. Perhatikan bahwa $\bar{0} - \bar{i}, \bar{i} - \bar{2}i$ dan seterusnya. Sehingga diperoleh lintasan $\bar{0}$-$\bar{i}$ - $\bar{2}i$ -....- $\overline{(n-1)i}$. Karena $o(\bar{i}) = n$ maka $A = \{\bar{0}, \bar{i}, \bar{2}i, ..., \overline{(n-1)i}\}$ berbeda. $|A| = n$, $|\mathbb{Z}_n| = n$,$A \subseteq \mathbb{Z}_n$ maka $A = \mathbb{Z}_n$. Diketahui bahwa $\overline{(n-1)i}$ bertetangga dengan $\bar{0}$ karena,

$$\begin{aligned} \overline{(n-1)i} + (\bar{i}^{-1})^{-1} &= \overline{(n-1)i} + i \\ &= ni \\ &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan lintasan di atas dan fakta bahwa $\overline{(n-1)i}$ bertetangga dengan $\bar{0}$ maka $\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_n, o(\bar{x}) = 2$ maka terbentuk lintasan.

$$\begin{aligned} Cay(\mathbb{Z}_n, S) &= \bar{0} - \bar{i} - \bar{2}i - ... - \overline{(n-1)i} - \bar{0} \\ &= C_n \end{aligned}$$

Terbukti bahwa graf Cayley $(\mathbb{Z}_n, S)$ dengan $|S|=2$ dan $S = \{\bar{i}, \overline{(n-i)}\}$ serta FPB $(n, i) = 1$ dengan $1 \leq i \leq n-1$ adalah graf C_n.

Teorema 3.6. *Graf Cayley $(\mathbb{Z}_n, S)$ dengan $|S|=2$, $S = \{\bar{i}, \overline{(n-i)}\}$ dan FPB $(n, i) = k$ dengan $1 \leq k \leq n-1$ maka graf Cayley $(\mathbb{Z}_n, S)$ adalah graf $kC_{\frac{n}{k}}$.*

Bukti. Misalkan $(\mathbb{Z}_n, S)$, $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$ dan $S = \{\bar{i}, \overline{n-i}\}$, karena $FPB(n, i) = k$ maka $o(i) = \frac{n}{k}$. Selanjutnya, akan dibuktikan $o(i) = \frac{n}{k}$.
Ambil $\bar{0} \in \mathbb{Z}_n$.

$$\begin{aligned} &< H_0 >=< \bar{0} >; \bar{0} - \bar{i} - \bar{2}i - ... - \overline{(\frac{n}{k} - 1)i} - \overline{(\frac{n}{k})i} = \bar{0} \\ &< H_1 >=< \bar{1} >; \bar{1} - (\bar{1} + \bar{i})) - (\bar{1} + \bar{2}i) - ... - (\bar{1} + \overline{(\frac{n}{k} - 1)i}) - (\bar{1} + \overline{(\frac{n}{k})i}) = \bar{1} \\ &\vdots \\ &< H_{k-1} >=< \overline{k-1} >; \overline{k-1} - (\overline{k-1} + \bar{i}) - ... - (\overline{k-1} + \overline{(\frac{n}{k} - 1)i}) - (\overline{k-1} + \overline{(\frac{n}{k})i}) = \overline{k-1} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $V < H_0 >= V < \bar{0} >= \{\bar{0}, \bar{i}, \bar{2i}, ..., \overline{(\frac{n}{k})i}\}$ merupakan $V < \bar{0} >=< i >$ relasi ekuivalen sebagai berikut $a, b \in \mathbb{Z}_n$ dikatakan relasi ekuivalen $(a \sim b)$ jika dan hanya jika $a - b \in H$. $V(H_i)$ merupakan koset kanan dari $V(H_0)$; $i \in \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{k-1}$.
Diketahui bahwa $V(H_i) \cap V(H_j) = \emptyset$ dan $|V(H_i)| = \frac{n}{k}$, Maka

$$|\bigcup_{i=0}^{k-1} V < H_i > | = \sum_{i=0}^{k-1} |V < H_i >= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n}{k} = k\frac{n}{k} = n = |\mathbb{Z}_n|$$

Teorema 3.7. *Suatu graf Cayley* $(\mathbb{Z}_n, S)$ *dikatakan terhubung apabila :*

1. *Graf Cayley* $(\mathbb{Z}_{2n}, S), |S| \geq 2, S = \{\bar{2}, \bar{4}, ..., \bar{n}, ..., \overline{2n-4}, \overline{2n-2}\}$.
2. *Graf Cayley* $(\mathbb{Z}_n, S)$ *dengan* $S = \{\bar{i}, ..., \overline{n-i}\}$. *Jika* $U \subseteq S, U = \{i, \overline{n-i}\}$ *dan FPB* $(n, i) = 1$ *dengan* $1 \leq i \leq n-1$.

Bukti. Pembuktian graf Cayley terhubung.

1. Graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ $|S| \geq 2, S = \{\bar{2}, \bar{4}, ..., \bar{n}, ..., \overline{2n-4}, \overline{2n-2}\}$ mempunyai minimal 1 elemen ganjil. Misalkan diambil $\bar{i}$, $\bar{j} \in \mathbb{Z}$. Perhatikan, jika $\bar{i}$ merupakan elemen genap dan $\bar{j}$ merupakan elemen ganjil maka akan diperoleh ketetanggaan :

$$N(i) = \{\bar{i} + \bar{2}, \bar{i} + \bar{4}, ..., \bar{i} + \bar{n}, ..., \bar{i} + \overline{2n-4}, \bar{i} + \overline{2n-2}\}$$

dan

$$N(j) = \{\bar{j} + \bar{2}, \bar{j} + \bar{4}, ..., \bar{j} + \bar{n}, ..., \bar{j} + \overline{2n-4}, \bar{j} + \overline{2n-2}\}$$

Karena $\bar{n}$ merupakan elemen ganjil dari $\mathbb{Z}_{2n}$ ketika dioperasikan "+" dengan $\bar{i}$ yang merupakan elemen genap maka $\bar{i}$ akan bertetangga dengan elemen ganjil yang merupakan elemen ketetanggaan dari $\bar{j}$ dan sebaliknya ketika $\bar{n}$ dioperasikan "+" dengan $\bar{j}$ yang merupakan elemen ganjil maka $\bar{j}$ akan bertetangga dengan elemen genap yang merupakan elemen ketetanggaan dari $\bar{i}$ genap. Akibatnya, terbentuk lintasan yang menghubungkan $\bar{i}$ dan $\bar{j}$.

2. Graf Cayley $(\mathbb{Z}_n, S)$ dengan $S = \{\bar{i}, ..., \overline{n-i}\}$. Jika $U \subseteq S, U = \{i, \overline{n-i}\}$ dan FPB $(n, i) = 1$ dengan $1 \leq i \leq n-1$ maka $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ graf terhubung. Berdasarkan Teorema 4.1.5 diketahui $U = \{i, \overline{n-i}\}$ dan FPB $(n, i) = 1$ merupakan graf siklus. Akan dibuktikan $Cay(\mathbb{Z}_n, U)$ merupakan subgraf dari $Cay(\mathbb{Z}_n, S.)$.Dikatakan Cay $(\mathbb{Z}_n, U)$ merupakan subgraf dari $Cay(\mathbb{Z}_n, S.)$. Misalkan $G_1 = Cay(\mathbb{Z}_n, U)$ dan $G_2 = Cay(\mathbb{Z}_n, S)$.

   (a) $V(G_1) \subseteq V(G_2)$
   Karena $U \subseteq S$ maka terbukti $V(G_1) \subseteq V(G_2)$.

   (b) $E(G_1) \subseteq E(G_2)$
   Ambil $uv \in E(cay(\mathbb{Z}_n, U))$. Akibatnya, $uv^{-1} \in U \subseteq S$ sehingga $uv^{-1} \in S$. Maka, $uv \in E(cay(\mathbb{Z}_n, S))$.

Teorema 3.8. *Suatu graf Cayley* $(\mathbb{Z}_n, S)$ *dikatakan tidak terhubung apabila :*

1. *Graf Cayley* $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ *dengan* $|S| = 1$, $S = \{n\}$.
2. *Graf Cayley* $(\mathbb{Z}_n, S)$ *dengan* $S = \{\bar{i}, \overline{n-i}\}$, *FPB* $(n, i) = k$ *dengan* $1 \leq i \leq n-1$.
3. *Graf Cayley* $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ $|S| \geq 2, S = \{\bar{2}, \bar{4}, ..., ..., \overline{2n-4}, \overline{2n-2}\}$.

Bukti. Akan dibuktikan.

1. Graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ dengan $|S| = 1$.
   Akan dibuktikan tidak terdapat lintasan yang membuat graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ dengan $S = \{n\}$ terhubung. Misalkan $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}_{2n}$

$$\begin{aligned} N(\bar{i}) &= \{\bar{i} + \overline{n^{-1}}\} \\ &= \{\bar{i} + \bar{n}\} \end{aligned}$$

   selanjutnya untuk $N(\bar{j})$

$$\begin{aligned} N(\bar{j}) &= \{\bar{j} + \overline{n^{-1}}\} \\ &= \{\bar{j} + \bar{n}\} \end{aligned}$$

   Karena $|S|$= 1 berdasarkan Teorema 4.1.1 maka graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ hanya bertetangga dengan 1 titik, maka $\bar{i}$ dan $\bar{j}$ tidak saling bertetangga, sehingga terbukti tidak ada lintasan yang menghubungkan $\bar{i}$ dan $\bar{j}$. Terbukti bahwa graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ dengan $|S| = 1$ tidak terhubung.

2. Berdasarkan teorema 4.1.6 akan membentuk Graf $kC_{\frac{n}{k}}$ yang merupakan graf tidak terhubung.

3. Graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$, $|S| \geq 2$, $S = \{\bar{2}, \bar{4}, ..., ..., \overline{2n-4}, \overline{2n-2}\}$. Misalkan diambil $\bar{i}$, $\bar{j}$ $\in \mathbb{Z}$. Perhatikan, jika $\bar{i}$ merupakan elemen genap dan $\bar{j}$ merupakan elemen ganjil maka akan diperoleh ketetanggaan :

$$\begin{aligned} &N(i) = \{\bar{i} + \bar{2}, \bar{i} + \bar{4}, ..., \bar{i} + \overline{2n-4}, \bar{i} + \overline{2n-2}\} \\ &\text{dan} \\ &N(j) = \{\bar{j} + \bar{2}, \bar{j} + \bar{4}, ..., \bar{j} + \overline{2n-4}, \bar{j} + \overline{2n-2}\} \end{aligned}$$

   Karena $\bar{i}$ merupakan elemen genap dari $\mathbb{Z}_{2n}$ dioperasikan "+" dengan S yang merupakan elemen genap maka $\bar{i}$ hanya bertetangga dengan semua elemen genap dan sebaliknya $\bar{j}$ merupakan elemen ganjil dari $\mathbb{Z}_{2n}$ ketika dioperasikan "+" dengan S yang merupakan elemen genap maka $\bar{j}$ hanya bertetangga dengan semua elemen ganjil. Akibatnya tidak terdapat lintasan yang menghubungkan $\bar{i}$ dan $\bar{j}$.

3.2 Spektrum Matriks Ketetanggaan Graf Cayley pada Grup $\mathbb{Z}_n$

Teorema 3.9. *Matriks ketetanggaan graf Cayley pada Grup $\mathbb{Z}_n$ merupakan matriks sirkulan.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa matriks ketetanggaan graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$ merupakan matriks sirkulan. Matriks ketetanggaan graf Cayley pada Grup $\mathbb{Z}_n$ dibentuk dari hasil pergeseran sirkular sebanyak $i - 1$ langkah pada anggota baris pertama S. $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ merupakan graf Cayley dengan V merupakan $\mathbb{Z}_n$= $(\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, ..., \overline{n-1})$ dan S merupakan himpunan pembangkit yang terbentuk dari elemen yang memiliki invers kecuali elemen identitas yaitu $\bar{0}$ atau dapat dinotasikan $S = (\bar{1}, \bar{2}, .., \overline{n-1})$.
Misalkan A merupakan matriks ketetanggaan untuk $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan a_i merupakan baris a_1 yang digeser sebanyak *i-1* kali

1. Ambil sebarang $x \in S$

   karena $0 + x^{-1} \in S$ maka 0 dan x bertetangga. Akibatnya,entri tak nol pada A_1 terletak pada kolom $(x + 1)$

2. Pandang A_i diperoleh ketetanggaan $i - 1$ dengan anggota $\mathbb{Z}_n$

$$(i-1)i + (x + (i-1)) = i + (n - (x - i)) = i + n - x - i = n - x = x^{-1} \in S$$

   Akibatnya, entri tak nol dari A_i terletak pada kolom $x + i - 1 + 1 = x + i$

Terbukti bahwa matriks ketetanggaan untuk $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ merupakan matriks sirkulan.

Teorema 3.10. *Graf Cayley $(\mathbb{Z}_n, S)$ dengan $|\ S\ | = 2$ merupakan graf siklus dengan $S = \{\bar{i}, \overline{n-i}\}$, $k = 1, 2, ..., n \in \mathbb{N}$, maka spektrum matriks ketetanggaan graf Cayley $(\mathbb{Z}_n, S)$ dinyatakan sebagai berikut.*

$$a_{ij} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 2cos2\pi/n & \dots & 2cos(n-1)\pi/n \\ 1 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix} & ; n\ ganjil \\ \begin{pmatrix} 2 & 2cos2\pi/n & \dots & 2cos(n-1)\pi/n & -2 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} & ; n\ genap \end{cases}$$

Bukti.Matriks ketetanggaan graf Siklus C_n dapat direpretasikan sebagai berikut.

$$A(C)_n \times N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = circle[0, 1, 0, 0, ..., 1]$$

Berdasarkan matriks ketetanggaan di atas, dapat dinyatakan ke dalam matriks sirkulan.

$$\begin{aligned} A &= circle[0, 1, 0, 0, ..., 1] \\ &= circle[0, 1, 0, 0, ..., 0] + circle[0, 0, 0, 0, ..., 1] \\ &= W + W^{n-1} \end{aligned}$$

Akan dicari persamaan karakteristik dari C_n yaitu

$$\begin{aligned} \lambda(C_n) &= det(\lambda I - A) \\ &= det(\lambda I - (W + W^{n-1})) \\ &= det(\lambda I - (PDP^{-1} + PD^{n-1}P^{-1})) \\ &= det(PP^{-1}\lambda I - PDP^{-1} - PD^{n-1}P^{-1}) \\ &= det(P\lambda IP^{-1} - PDP^{-1} - PD^{n-1}P^{-1}) \\ &= det(P(\lambda I - D - D^{n-1})P^{-1}) \\ &= det(P).det(\lambda I - D - D^{n-1}).det(P^{-1}) \\ &= det(\lambda I - D - D^{n-1}) \\ &= det(diag(\lambda - 2, \lambda - \omega - \omega^{n-1}, \dots, \lambda - \omega^{-1} - \omega)) \end{aligned}$$

Maka, diperoleh nilai eigen dari C_n yaitu

$$\lambda_0 = 2$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \omega + \omega^{n-1}\\ &\vdots\\ \lambda_r &= \omega + \omega^{n-r}; r = 1, 2, \ldots, n-1\end{aligned}$$

Diketahui $\omega^n = 1$, sehingga λ_r dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\lambda_r = \omega^r + \frac{1}{\omega^r}$$

Diketahui juga $\omega = e^{2i/n}$, menggunakan rumus Euler $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ maka ω dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$$

$\overline{\omega}$ merupakan konjugat dari ω dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\overline{\omega} = \cos\frac{2\pi}{n} - i \sin\frac{2\pi}{n}$$

dan memenuhi salah satu sifat operasi bilangan kompleks yaitu

$$\omega + \overline{\omega} = 2Re(\omega)$$

Akibatnya, λ_r dapat dinyatakan

$$\begin{aligned}\lambda_r &= \omega^r + \frac{1}{\omega^r}\\ &= 2Re(\omega^r)\\ &= 2\cos\frac{2\pi r}{n}; r = 1, 2, 3, \ldots, n-1\end{aligned}$$

Multiplisitas dari setiap eigen dinyatakan melalui **Lemma 4.2.1**.

Lemma 3.11. *Misalkan C_n merupakan matriks siklus. Maka*

$$\lambda_k = \lambda_{n-k}$$

dengan k=1,2,. . .,$n-1$

BUKTI.

$$\begin{aligned}\lambda_{n-k} &= 2\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}\\ &= 2\cos(2\pi - \frac{2\pi k}{n})\\ &= 2\cos\frac{2\pi k}{n}\\ &= \lambda_k\end{aligned}$$

Jadi, Lemma 4.2.1 terbukti benar.
Untuk n merupakan bilangan genap, akan diperoleh $r = \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ sehingga $\lambda_{\frac{n}{2}} = 2cos\frac{2\pi\frac{n}{2}}{2} = 2\cos\pi = -2$.Ketika n merupakan bilangan ganjil diperoleh $r = \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ sehingga tidak ada nilai eigen paa $\lambda_{\frac{n}{2}}$. Dapat disimpulkan bahwa $\lambda = 2$ dan λ=-2 (n genap), seluruh nilai eigennya akan berulang sebanyak dua kali atau dengan kata lain bermultiplisitas dua.

Teorema 3.12. *Misalkan graf Cayley* $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ *dengan* $S = \{\bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$ *merupakan graf lengkap* K_n *dan spektrum matriks ketetanggaan graf* K_n *dinyatakan sebagai berikut.*

$$Spektrum\ K_n = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Bukti. Matriks ketetanggaan graf K_n dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$A(K)_n \times N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = circle[0, 1, 1, 1, ..., 1]$$

Berdasarkan matriks ketetanggaan di atas, dapat dinyatakan ke dalam matriks sirkulan.

$$\begin{aligned} A &= circle[0, 1, 1, 1, ..., 1] \\ &= circle[0, 1, 0, 0, ..., 0] + circle[0, 0, 1, 0, ..., 0] + circle[0, 0, 0, 1, ..., 0] + circle[0, 0, 0, 0, ..., 1] \\ &= W + W^2 + W^3 + \ldots + W^{n-1} \end{aligned}$$

Akan dicari persamaan karakteristik dari K_n yaitu

$$\begin{aligned} \lambda(C_n) &= det(\lambda I - A) \\ &= det(\lambda I - (W + W^2 + W^3 + \ldots + W^{n-1})) \\ &= det(\lambda I - (PDP^{-1} + PD^{n-1}P^{-1})) \\ &= det(PP^{-1}\lambda I - PDP^{-1} - PD^2P^{-1} - PD^3P^{-1} - \ldots - PD^{n-1}P^{-1}) \\ &= det(P\lambda IP^{-1} - PDP^{-1} - PD^2P^{-1} - PD^3P^{-1} - \ldots - PD^{n-1}P^{-1}) \\ &= det(P(\lambda I - D - D^2 - D^3 - \ldots - D^{n-1})P^{-1}) \\ &= det(P).det(\lambda I - D - D^2 - D^3 - \ldots - D^{n-1}).det(P^{-1}) \\ &= det(\lambda I - D - D^2 - D^3 - \ldots - D^{n-1}) \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $D = diag(\omega^0, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1})$ dimana $\omega = \frac{2\pi i}{n}$, sehingga diperoleh.

$$\begin{aligned} \Rightarrow D &= diag(\omega^0, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}) \\ \Rightarrow D^3 &= diag[(\omega^0, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1})]^3 = diag(\omega^0, \omega^3, \omega^6, \omega^9, \ldots, \omega^{3n-3}) \\ &\vdots \\ \Rightarrow D^{n-1} &= diag[(\omega^0, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1})]^{n-1} \\ &= diag(\omega^0, \omega^{n-1}, \omega^{2n-2}, \omega^{3n-3}, \ldots, \omega^{(n-1)(n-1)}) \end{aligned}$$

Maka, diperoleh nilai eigen dari K_n yaitu

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= n - 1 \\ \lambda_1 &= \omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1} \\ &\vdots \\ \lambda_r &= \omega^{n-1} + \omega^{2n-2} + \ldots + \omega^{(n-1)(n-1)} \\ &= [\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1}]^{n-1}; r = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Misalkan $n-1=r$, maka dapat dituliskan $\lambda_n=\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+...+\omega^{(n-1)r}$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\lambda_n=\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+...+\omega^{(n-1)r}=-1$. Pembuktian :

$$\begin{aligned}
\omega^{nr}-1 &= (\omega^r-1)(\omega^{(n-1)r}+\omega^{(n-2)r}+\omega^{(n-3)r}+...+\omega^r+1)\\
1+\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+...+\omega^{(n-1)r} &= \frac{\omega^{nr}-1}{\omega^r-1}\\
1+\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+...+\omega^{(n-1)r} &= \frac{(\omega^n)^r-1}{\omega^r-1}\\
1+\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+...+\omega^{(n-1)r} &= \frac{(1)^r-1}{\omega^r-1}\\
1+\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+...+\omega^{(n-1)r} &= \frac{1-1}{\omega^r-1}\\
1+\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+...+\omega^{(n-1)r} &= \frac{0}{\omega^r-1}\\
1+\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+...+\omega^{(n-1)r} &= 0\\
\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+...+\omega^{(n-1)r} &= -1
\end{aligned}$$

Terbukti $\omega^r+\omega^{2r}+\omega^{3r}+\dots+\omega^{(n-1)r}=-1$. Maka, spektrum matriks ketetanggaan graf lengkap dapat ditulis sebagai berikut.

$$\text{Spektrum } K_n=\begin{pmatrix} n-1 & -1\\ 1 & n-1\end{pmatrix}$$

Teorema 3.13. *Misalkan graf Cayley* $(\mathbb{Z}_{2n},S)$ *dengan* $S=\{\bar{1},\bar{n},\overline{n-1}\}$ *memiliki spektrum matriks ketetanggaan graf Cayley* $(\mathbb{Z}_{2n},S)$ *dinyatakan sebagai berikut.*

$$\textit{Spektrum } Cay(\mathbb{Z}_{2n},S)=\begin{pmatrix} 3 & 2\cos(\frac{\pi k}{n})+\cos(\pi k)\\ 1 & n-1\end{pmatrix}$$

Bukti. Matriks ketetanggaan graf Cayley $(\mathbb{Z}_{2n},S)$ dinyatakan sebagai berikut.

$$A(\mathbb{Z}_{2n},S)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks ketetanggaan di atas, dapat dinyatakan ke dalam matriks sirkulan.

$$\begin{aligned}
A &= circle[0,1,...,1,...,1]\\
&= circle[0,1,0,0,...,0]+circle[0,0,...,1,...,0]+circle[0,0,..,1,...,0]+circle[0,0,0,0,...,1]\\
&= W+W^n+W^{2n-1}
\end{aligned}$$

Akan dicari persamaan karakteristik dari $\mathbb{Z}_{2n}, S$ yaitu

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbb{Z}_2 n, S) &= det(\lambda I - A)\\
&= det(\lambda I - (W + W^n + W^{2n-1}))\\
&= det(\lambda I - (PDP^{-1} - PD^n P^{-1} - PD^{2n-1}P^{-1}))\\
&= det(PP^{-1}\lambda I - PDP^{-1} - PD^n P^{-1} - PD^{2n-1}P^{-1})\\
&= det(P\lambda IP^{-1} - PDP^{-1} - PD^n P^{-1} - PD^{2n-1}P^{-1})\\
&= det(P(\lambda I - D - D^n - D^{2n-1})P^{-1})\\
&= det(P).det(\lambda I - D - D^n - D^{2n-1})\\
&= det(\lambda I - D - D^n - D^{2n-1})
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $D = diag(\omega^0, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1})$ dimana $\omega = \frac{\pi i}{n}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\Rightarrow D &= diag(\omega^0, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1})\\
\Rightarrow D^n &= diag(\omega^0, \omega^n, \omega^{2n}, \omega^{3n}, \ldots + \omega^{(2n-1)n})\\
\Rightarrow D^{2n-1} &= diag(\omega^0 + \omega^{2n-1} + \omega^{2(2n-1)} + \omega^{3(2n-1)} + \ldots + \omega^{(2n-1)(2n-1)})\\
&= diag(\omega^0, \omega^{2n-1}, \ldots, \omega^1)
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa $\omega = e^{\frac{2k\pi i}{2n}} = e^{\frac{k\pi i}{n}}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= 3\\
\lambda_1 &= \omega + \omega^{2n-1} + \cos\pi\\
&= \omega + \bar{\omega} + \cos\pi\\
&= 2\Re(\omega) + \cos\pi\\
&= 2\cos\frac{2\pi}{2n} + \cos\pi\\
&= 2\cos\frac{\pi}{n} + \cos\pi\\
\lambda_2 &= \omega^2 + \cos 2\pi + \omega^{2n-2}\\
&= \omega^2 + \cos\pi + \bar{\omega}^2\\
&= \omega^2 + \bar{\omega}^2 + \cos 2\pi\\
&= 2\Re\omega^2 + \cos\pi\\
&= 2\cos\frac{4\pi}{2n} + \cos 2\pi\\
&= 2\cos\frac{2\pi}{n} + \cos 2\pi\\
&\vdots\\
\lambda_k &= \omega^k + \cos k\pi + \omega^{2n-k}\\
&= \omega^k + \cos k\pi + \bar{\omega}^k\\
&= 2\Re\omega^k + \cos k\pi\\
&= 2\cos\frac{k\pi}{n} + \cos k\pi\\
&= 2\cos\frac{k\pi}{n} + \cos k\pi
\end{aligned}$$

Maka, terbukti spektrum graf $Cay(\mathbb{Z}_{2n}, S) = \begin{pmatrix} 3 & 2\cos(\frac{\pi k}{n}) + \cos(\pi k) \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$

Teorema 3.14. *Misalkan graf Cayley* $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ *dengan* $S = \{\bar{2}, \bar{4}, ..., \overline{2n-4}, \overline{2n-2}\}$ *maka spektrum matriks ketetanggaan graf Cayley* $(\mathbb{Z}_{2n}, S)$ *dinyatakan sebagai berikut.*

$$Spektrum\ Cay(\mathbb{Z}_{2n}, S) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{pmatrix}$$

Bukti.Matriks ketetanggaan graf K_n dapat dinyatakan sebagai berikut

$$A(K)_n \times N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = circle[0, 0, 1, 0, 1, ...1, 0, 1, 0]$$

Berdasarkan matriks ketetanggaan di atas, dapat dinyatakan ke dalam matriks sirkulan.

$$\begin{aligned} A &= circle[0, 0, 1, 0, 1, ...1, 0, 1, 0] \\ &= circle[0, 0, 1, 0, ..., 0] + circle[0, 0, 0, 0, 1..., 0] + ... + circle[0, 0, ..., 0, 1, 0] \\ &= W^2 + W^4 + W^6 + \dots + W^{2n-2} \end{aligned}$$

Akan dicari persamaan karakteristik dari K_n yaitu

$$\begin{aligned} \lambda(C_n) &= det(\lambda I - A) \\ &= det(\lambda I - (W^2 + W^4 + W^6 + \dots + W^{2n-2})) \\ &= det(\lambda I - (PD^2P^{-1} + PD^4P^{-1} + PD^6P^{-1} + \dots + PD^{2n-2}P^{-1}))) \\ &= det(PP^{-1}\lambda I - PD^2P^{-1} - PD^4P^{-1} - PD^6P^{-1} - \dots - PD^{2n-2}P^{-1}) \\ &= det(P\lambda IP^{-1} - PD^2P^{-1} - PD^4P^{-1} - PD^6P^{-1} - \dots - PD^{2n-2}P^{-1}) \\ &= det(P(\lambda I - D^2 - D^4 - D^6 - \dots - D^{2n-2})P^{-1}) \\ &= det(P).det(\lambda I - D^2 - D^4 - D^6 - \dots - D^{2n-2}).det(P^{-1}) \\ &= det(\lambda I - D^2 - D^4 - D^6 - \dots - D^{2n-2}) \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $D = diag(\omega^0 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{2n-1})$ dimana $\omega = \frac{\pi i}{n}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \Rightarrow D^2 &= diag[(\omega^0, \omega, \omega^2, \dots, \omega^n, \dots, \omega^{2n-1})]^2 = diag(\omega^0, \omega^2, \dots, \omega^{2n}, \dots, \omega^{4n-2}) \\ \Rightarrow D^4 &= diag[(\omega^0, \omega, \omega^2, \dots, \omega^n, \dots, \omega^{2n-1})]^4 = diag(\omega^0, \omega^4, \dots, \omega^{4n}, \dots, \omega^{8n-4}) \\ &\vdots \\ \Rightarrow D^{2n-2} &= diag[(\omega^0, \omega, \omega^2, \dots, \omega^n, \dots, \omega^{2n-1})]^{2n-2} \\ &= diag(\omega^0, \omega^{2n-2} + \omega^{4n-4n} + \dots + \omega^{2n^2-2n} + \dots + \omega^{(2n-2)(2n-1)}) \end{aligned}$$

Diketahui $\omega = \frac{\pi i}{n}$,$\omega^n = 1$ sehingga diperoleh nilai $\omega^{2n}, \omega^{4n}, \dots, \omega^{2n^2-n}$ yaitu

$$\begin{aligned} \omega^{2n} &= (\omega^n)^2 \\ &= (1)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Maka, diperoleh nilai eigen dari K_n yaitu

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \omega^0 + \omega^0 + \ldots + \omega^0 = n-1 \\
\lambda_1 &= \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \ldots + \omega^{2n-2} \\
&\vdots \\
\lambda_n &= \omega^{2n} + \omega^{4n} + \ldots + \omega^{2n^2-n} = n-1 \\
&\vdots \\
\lambda_{2n-2} &= \omega^{2n-2} + \omega^{8n-8} + \ldots + \omega^{(2n-1)(2n-2)} \\
&= [\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \ldots + \omega^{2n-1}]^{2n-2}; r = 1, 2, \ldots, n-1
\end{aligned}$$

Misalkan $2n-2 = r$, maka dapat dituliskan $\lambda_n = \omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + ... + \omega^{(n-1)r}$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\lambda_n = \omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + ... + \omega^{(n-1)r} = -1$. Pembuktian :

$$\begin{aligned}
\omega^{nr} - 1 &= (\omega^r - 1)(\omega^{(2n-1)r} + \omega^{(2n-2)r} + \omega^{(2n-3)r} + ... + \omega^r + 1) \\
1 + \omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + ... + \omega^{(n-1)r} &= \frac{\omega^{nr} - 1}{\omega^r - 1} \\
1 + \omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + ... + \omega^{(n-1)r} &= \frac{(\omega^n)^r - 1}{\omega^r - 1} \\
1 + \omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + ... + \omega^{(n-1)r} &= \frac{(1)^r - 1}{\omega^r - 1} \\
1 + \omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + ... + \omega^{(n-1)r} &= \frac{1 - 1}{\omega^r - 1} \\
1 + \omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + ... + \omega^{(n-1)r} &= \frac{0}{\omega^r - 1} \\
1 + \omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + ... + \omega^{(n-1)r} &= 0 \\
\omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + ... + \omega^{(n-1)r} &= -1
\end{aligned}$$

Terbukti $\omega^r + \omega^{2r} + \omega^{3r} + \ldots + \omega^{(2n-1)r} = -1$. Maka, spektrum matriks ketetanggaan graf lengkap dapat ditulis sebagai berikut.

$$\text{Spektrum } Cay(\mathbb{Z}_{2n}, S) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{pmatrix}$$

4 Kesimpulan

Graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$ merupakan graf yang merepretasikan grup $\mathbb{Z}_n$ ke dalam graf dengan anggota elemen $\mathbb{Z}_n$ sebagai himpunan titiknya. Graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$ termasuk ke dalam bentuk graf Teratur yang dimana tiap titik pada graf cayley memiliki derajat yang sama. Adapun jeni graf yang terbentuk dari Graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$ yaitu graf nP_2, graf C_n, graf K_n, graf $2K_n$, graf $kC_{\frac{n}{K}}$, graf $2C_n$. Spektrum matriks graf Graf Cayley pada grup $\mathbb{Z}_n$ diperoleh dengan memanfaatkan matriks sirkulan.

Daftar Pustaka

[1] D. W. S. M.Pd, *Sejarah dan Filsafat Matematika*. CV. INSAN MANDIRI, 2017.

[2] R. Munir, *Matematika Diskrit*. Informatika Bandung, 2010.

[3] N. Handayani, *Bentuk Aljabar*. PT. Balai Pustaka (Persero), 2012.

[4] I.N.Herstein, *Abstract Algebra*. PRENTICE-HALL,Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1996.

[5] I. B. M. dan Samsul Arifin, "Semua subgrup siklik dari grup $(\mathbb{Z}_n,+)$," *Jurnal Teorema: Teori dan Riset Matematika*, vol. 3, no. 2, pp. 177–186, 2018.

[6] A. H. dan Kiki Ariyanti Sugeng, "Sifat-sifat graf cayley grup s_n," *KNM XX*, 2021.

[7] R. Novitasari and B. Irawanto, "Penentuan spektrum berbagai jenis graf dengan penggunaan matriks adjacency,"

[8] N. H. Juan Daniel, Kiki Ariyanti Sugeng, "Eigenvalues of antiadjancency matrix of cayley graph of $(\mathbb{Z}_n,+)$," *INDONESIAN JOURNAL OF COMBINATORICS*, vol. 6, no. 1, pp. 66–76, 2022.

[9] T. A. Mujiwinarta, *Graf cayley pada grup modulo-n (Mn)*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, 2014.

[10] I. Febry, *Spektrum matriks antiadjacency dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, 2019.

[11] H. Anton and C. Rorres, *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons, 2013.

[12] N. Biggs, *Algebraic graph theory*. No. 67, Cambridge university press, 1993.

[13] C. Gary and Z. Ping, *A First Course in graph theory*. Dover Publications, INC, 2012.

[14] W. Samuel, *Matematika Diskrit*. Graha Ilmu, 2008.

[15] M. Okal, M. Kiftiah, and F. Fran, "Graf cayley pada s_n," *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 8, no. 1.

[16] S. Rahayuningsih, *TEORI GRAPH DAN PENERAPANNYA: SRI RAHAYUNINGSIH*. Sri Rahayuningsih, S. Pd. M. Pd, 2022.