J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 08 No. 02 (2024) pp. 158-167
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika
e-ISSN: 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

GRAF CAYLEY PADA GRUP DIHEDRAL D_{2n}

Marselina Gia[1*], Ganesha L. Putra[2], Farly O. Haning[3].

[1,2,3] Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana Kupang- Indonesia

[*] Penulis korespondensi:marselgia25@gmail.com

Abstrak

Misalkan G adalah grup berhingga dan H adalah subhimpunan *inverse-closed* dari G di mana $e \notin H$ dan $h \in H \to h^{-1} \in H$, maka graf Cayley $\Gamma = Cay\ (G, H)$ adalah graf yang dibentuk dari grup G dengan himpunan simpul $V(\Gamma) = G$ dan himpunan sisi $E(\Gamma) = \{(g, gh)|g \in G, h \in H\}$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan jenis graf Cayley pada grup dihedral D_{2n} dengan menggunakan metode kajian studi literatur. Grup G dikatakan grup dihedral dengan order $2n$, $n \geq 3$, adalah grup yang dibangun oleh dua elemen a, b dengan $G = D_{2n} = \langle a, b|a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$. Hasil penelitian menunjukkan bahwa jenis graf Cayley pada grup dihedral D_{2n} bergantung pada struktur subhimpunan H. Graf tersebut dapat berbentuk graf k-reguler jika $|H| = k$, graf lintasan nP_2 jika $|H| = 1$, graf siklus $2kC_{n/k}$ jika $H = \{a^i, a^{-i}\}$ dengan FPB$(n, i) = k$, dan graf lengkap K_{2n} jika $|H| = 2n - 1$. Selain itu, hasil penelitian ini juga mengidentifikasi syarat-syarat keterhubungan graf Cayley pada grup dihedral D_{2n}, yaitu bahwa graf akan terhubung jika terdapat himpunan S dimana $S \subseteq H$ dan $S = \{a^i, a^{-i}, a^ib\}$ dengan FPB$(n, i) = 1$ atau jika $S = \{a^ib, a^jb\}$ dengan $o((a^ib)(a^jb)) = n$.
Kata kunci: Graf Cayley, grup dihedral, subhimpunan H.

Abstract

Let G be a finite group, and let H be an inverse-closed subset of G where $e \notin H$ and $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$. The Cayley graph $\Gamma = Cay(G, H)$ is the graph constructed from the group G with vertex set $V(\Gamma) = G$ and edge set $E(\Gamma) = \{(g, gh) \mid g \in G, h \in H\}$. This study aims to determine the types of Cayley graphs on the dihedral group D_{2n} using a literature review approach. The group G is called a dihedral group of order $2n$, $n \geq 3$, which is generated by two elements a and b with $G = D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1}\rangle$. The results of this study indicate that the type of Cayley graph on the dihedral group depends on the structure of the subset H. This graph can take the form of a k-regular graph if $|H| = k$, a path graph nP_2 if $|H| = 1$, a cycle graph $2kC_{n/k}$ if $H = \{a^i, a^{-i}\}$ with $gcd(n, i) = k$, and a complete graph K_{2n} if $|H| = 2n - 1$. Additionally, this study identifies the conditions for connectivity of the Cayley graph on the dihedral group D_{2n}, where the graph is connected if there exists a set S such that $S \subseteq H$ and $S = \{a^i, a^{-i}, a^ib\}$ with $gcd(n, i) = 1$ or if $S = \{a^ib, a^jb\}$ with $o((a^ib)(a^jb)) = n$
***Keywords**: Cayley graph, dihedral group, subset H.*

2020 *Mathematics Subject Classification*: 15C25
Tanggal Masuk: 25-06-24; direvisi: 30-10-24; diterima: 30-10-24

1 Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu topik dalam bidang matematika diskrit yang menarik untuk dipelajari.Teori graf berkembang pesat melalui banyak penelitian yang telah dilakukan. Graf banyak diterapkan dalam berbagai bidang ilmu salah satu diantaranya adalah bidang aljabar. Teori graf dan teori grup merupakan dua pokok pembahasan dalam matematika yang sering dikombinasikan pada suatu penelitian. Bentuk kombinasi tersebut adalah graf digunakan untuk merepresentasikan suatu grup. Salah satu graf yang merupakan representasi suatu grup adalah graf Cayley.Graf Cayley diperkenalkan oleh seorang ilmuwan berkebangsaan Inggris bernama Arthur Cayley pada tahun 1878 [1]. Graf Cayley merupakan graf yang dibentuk dari suatu grup di mana elemen-elemen pada grup direpresentasikan sebagai simpul-simpul dalam graf, dan keberadaan sisi ditentukan oleh subhimpunan grup yang tidak mengandung elemen identitas grup. .

Penelitian yang dilakukan oleh A.Hadi dan K. A. Sugeng pada tahun 2021 memberikan gambaran tentang graf Cayley dari grup simetri dengan membahas mengenai sifat-sifat dasar dan beberapa jenis graf Cayley yang dibentuk dengan subhimpunan pembangkit berupa transposisi dan reversal [2]. Pada tahun 2022, J. Daniel bersama K. A Sugeng dan N. Hariadi juga memberikan karakteristik subhimpunan S dari grup $\mathbb{Z}_n$ sehingga diperoleh nilai eigen matriks *antiadjacency* graf $Cay(\mathbb{Z}_n, S)$ semuanya bilangan bulat [3]. Kemudian pada tahun 2023 A. Kumala dkk juga melakukan penelitian terhadap graf Cayley dari grup dihedral, mereka menentukan dekomposisi hamiltonian graf Cayley yang fokus pada generator $\{a^{n-1}, b\}$ dari grup dihedral [4].

Mengacu pada hasil-hasil penelitian sebelumnya yang telah mengidentifikasi sifat-sifat dasar dan karakteristik graf Cayley dari grup lainnya, penelitian mengenai graf Cayley pada grup dihedral ini bertujuan untuk mengeksplorasi lebih dalam jenis-jenis graf Cayley yang terbentuk pada grup dihedral D_{2n} dengan dengan meninjau berbagai struktur subhimpunan H dari grup tersebut.

2 Tinjauan Pustaka

Pada bagian ini akan diberikan beberapa dasar teori yang menunjang penelitian ini yang meliputi graf, grup, grup dihedral dan graf cayley.

2.1 Graf

Definisi 2.1.1. [5] Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan $(V(G), E(G))$, di mana $V(G)$ adalah himpunan berhingga dan tak kosong, yang elemen-elemennya disebut simpul *(vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan berhingga yang mungkin kosong dimana elemen-elemennya disebut sisi *(edge)* sedemikian hingga setiap elemen dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurut dari simpul-simpul $V(G)$.

Jika dua simpul u dan v dari suatu graf G dihubungkan oleh sebuah sisi $e = uv$ maka simpul u dan v disebut bertetangga *(adjacent)* dan sisi e disebut bersisian *(incident)* dengan simpul u dan v. Banyak sisi yang bersisian dengan suatu simpul v disebut derajat *(deegre)* dan dinotasikan sebagai $d(v)$.

Definisi 2.1.2. [5] Lintasan *(path)* $u - v$ dalam suatu graf G adalah barisan simpul-simpul berbeda yang dimulai dari simpul u dan berakhir di simpul v. Jika simpul awal dan akhir pada lintasan sama atau $u = v$ maka disebut **sikel** (*cycle*).

Definisi 2.1.3. [5] Suatu graf G dikatakan **terhubung** *(connected)* jika untuk sembarang dua simpul yang berbeda u dan v dari G terdapat sebuah lintasan antara u dan v. Jika tidak, maka G merupakan graf **tidak terhubung** *(disconnected)*.

Ada beberapa macam jenis graf yang digunakan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. **Graf lintasan** adalah graf yang tepat hanya memiliki satu lintasan dan dinotasikan dengan P_n di mana $n \geq 2$.
2. **Graf siklus** adalah graf yang masing-masing simpulnya berderajat dua. Graf siklus dinotasikan sebagai C_n dengan $n \geq 3$.
3. **Graf lengkap** adalah graf yang setiap dua simpul pada graf bertetangga. Graf lengkap dinotasikan sebagai K_n. Karena setiap dua simpul pada graf K_n dihubungkan oleh sisi maka jumlah sisi pada graf K_n adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.
4. **Graf teratur** *(regular graph)* adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Jika setiap simpul di graf G berderajat r, maka graf tersebut G disebut sebagai **graf teratur** berderajat r (r-reguler) .

2.2 Grup dan Subgrup

Definisi 2.2.1. [6] **Grup** adalah pasangan $(G, *)$, dengan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner pada G, yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. **Tertutup**. G tertutup atas operasi $*$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$, $(a * b) \in G$.
2. **Asosiatif**. Operasi $*$ bersifat asosiatif, yaitu berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in G$.
3. **Identitas**. Terdapat suatu elemen e di G sedemikian sehingga untuk setiap $x \in G$, berlaku $x * e = e * x = x$.
4. **Invers**. Untuk setiap $a \in G$ memiliki invers $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Definisi 2.2.2. [6] Suatu himpunan tak kosong H dari grup G merupakan subgrup dari G, jika $H \subseteq G$ dan $\langle H, * \rangle$ adalah grup dengan $*$ adalah operasi pada G.

Definisi 2.2.3. [6] Diketahui $(G, *)$ merupakan grup, $a \in G$ dan $H = \{a^i, i \in \mathbb{Z}\}$ disebut subgrup siklik dari G dengan generator a dan dinotasikan $\langle a \rangle$.

Definisi 2.2.4. [6] Misalkan A himpunan dan $\sim$ relasi pada himpunan A. $\sim$ merupakan relasi ekuivalen jika memenuhi sifat:

1. **Refleksif**, untuk setiap $a \in A$ berlaku $a \sim a$
2. **Simetri**, untuk setiap $a, b \in A$ jika$a \sim b$ maka berlaku $b \sim a$
3. **Transitif**, untuk setiap $a, b, c \in A$ jika $a \sim b$, $b \sim c$ maka berlaku $a \sim c$.

Definisi 2.2.5. [6] Misalkan A himpunan dengan $\sim$ relasi ekuivalen pada A. Misalkan $a \in A$, maka kelas ekuivalensi dari a dinotasikan sebagai $[a]$ adalah $[a] = \{b \in A | b \sim a\}$.

Teorema 2.2.1. *[6] Jika $\sim$ adalah relasi ekuivalen pada A, maka $A = \bigcup_{a \in A} [a]$. Lebih lanjut jika $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ maka $[a] = [b]$.*

Teorema 2.2.2. *[6] Misalkan G grup dan H subgrup dari G. Relasi* $\sim$ *pada G didefinisikan dengan* $a \sim b$ *jika dan hanya jika* $a^{-1}b \in H$ *untuk setiap* $a, b \in G$. $\sim$ *merupakan relasi ekuivalen.*

Teorema 2.2.3. *[6] Misalkan* $\sim$ *suatu relasi ekuivalen pada grup G dengan* $a \sim b$ *jika dan hanya jika* $a^{-1}b \in H$ *maka* $[a] = aH$ *dengan* $aH = \{ah|h \in H\}$ *disebut koset kiri dari H di G.*

Teorema 2.2.4. *[6] Jika G grup berhingga dan H subgrup G, maka* $|H|$ *membagi* $|G|$.

Teorema 2.2.5. *[6] Jika G grup berhingga dan* $a \in G$, *maka* $o(a)$ *membagi* $|G|$.

2.3 Grup Dihedral

Definisi 2.3.1. [7, 8, 9] Misalkan G grup. Grup G dihedral dengan order $2n, n \geq 3$, adalah grup yang dibangun oleh dua elemen a, b dengan

$$G = D_{2n} = \langle a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

Unsur a merupakan unsur rotasi simetri sebesar $\frac{360}{n}$ yang berorde $n \geq 3$ sedangkan unsur b merupakan unsur refleksi terhadap sumbu-sumbu simetri yang berorde 2 yang mengakibatkan b memiliki invers dirinya sendiri.

Teorema 2.3.1. *[7, 10] Misalkan* D_{2n} *grup dihedral, maka untuk* $i = 1, 2, \cdots n$ *berlaku* $a^i b = ba^{-i}$.

Teorema 2.3.2. *[7] Misalkan* D_{2n} *grup dihedral dan* $x \in D_{2n}$ *merupakan unsur refleksi, maka* $x = a^k b$ *untuk* $k = 1, 2, ...n$.

Teorema 2.3.3. *[7] Misalkan* D_{2n} *grup dihedral, jika* $u \leq n$ *maka* $a^r ba^{n-u} = a^r a^u b$

Contoh 2.3.1. Misalkan $n = 3$,elemen-elemen dari D_6 adalah $D_6 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. Apabila dikenakan operasi komposisi "$\circ$" pada D_6 maka struktur grup dihedral $(D_6, \circ)$ dapat dilihat sehingga pada tabel Cayley berikut:

Tabel 1: Tabel Cayley dari grup D_6

$\circ$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

2.4 Graf Cayley

Definisi 2.4.1. [2, 11, 12] Misalkan G grup berhingga dan H adalah subhimpunan *inverse-closed* dari G dan tidak mengandung elemen identitas grup, $e \notin H$ dan $h \in H \to h^{-1} \in H$. Graf Cayley $\Gamma = Cay\ (G, H)$ adalah graf yang dibentuk dari grup G dengan himpunan simpul $V(\Gamma) = G$ dan himpunan sisi $E(\Gamma) = \{(g, gh)|g \in G, h \in H\}$.

Lemma 2.4.1. *[13, 14] Misalkan G grup berhingga dan* $H \subset G$ *dengan* $e \notin H$ *didefinisikan sebagai graf Cay* (G, H) *sedemikian sehingga* (x, y) *merupakan sisi di graf Cay* (G, H) *jika dan hanya jika* $x^{-1}y \in H$.

3 Hasil dan Pembahasan

Bagian ini berisi pembuktian teorema-teorema terkait jenis-jenis graf Cayley pada grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$.

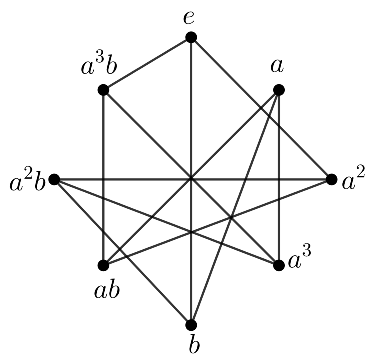
Teorema 3.1. *Misalkan D_{2n} grup dihedral. Jika $H \subset D_{2n}$ sedemikian sehingga $|H| = k$ di mana $e \notin H$ dan $h \in H \rightarrow h^{-1} \in H$, maka graf Cayley $Cay(D_{2n}, H)$ merupakan graf $k-$reguler dengan $k < 2n$.*

BUKTI. Diketahui $|H| = k$, misalkan $H = \{h_1, h_2, \cdots, h_k\}$. Ambil sebarang $x \in D_{2n}$. Dibuktikan bahwa $d(x) = k$. Berdasarkan Definisi 2.4.1, diperoleh $N(x) = \{xh_1, xh_2, .., xh_k\}$. Berdasarkan Lemma 2.4.1, $y \in N(x)$ jika $x^{-1}y \in H$. Tanpa mengurangi keumuman,

$$\begin{aligned} x^{-1}y &= h_j \\ xx^{-1}y &= xh_j \\ y &= xh_j. \end{aligned}$$

Jadi untuk setiap $y \in N(x)$, $y = xh_j$. Lebih lanjut, andaikan terdapat $t > k$ sehingga $xh_t \in N(x)$. Perhatikan bahwa, $(xh_t)^{-1}x = (h_t)^{-1}x^{-1}x = h_t \notin H$. Sehingga pengandaian salah, dengan demikian diperoleh $d(x) = k$. □

Contoh 3.1. Diberikan grup $(D_8, \circ)$, diambil $H = \{a^2, b, a^3b\}$ sebagai subhimpunan dari $(D_8, \circ)$ sehingga $|H| = 3$ dapat dilihat bahwa graf $Cay(D_{2n}, H)$ merupakan graf 3−reguler seperti pada Gambar 1



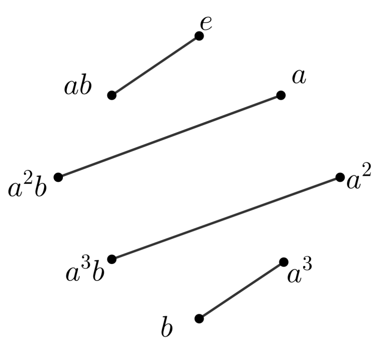
Gambar 1: Graf Cay(D_8, H), $H = \{a^2, b, a^3b\}$

Teorema 3.2. *Misalkan D_{2n} grup dihedral. Jika $H \subset D_{2n}$ sedemikian sehingga $H = \{x\}$ di mana $x = x^{-1}$ dan $o(x) = 2$ maka graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf nP_2.*

BUKTI. Diketahui $x = x^{-1}$ maka $x^2 = e$ sehingga berdasarkan Definisi 2.4.1, e bertetangga dengan x. Selanjutnya diambil sebarang $y \in D_{2n}$ sedemikian sehingga $y \neq x$. Berdasarkan Definisi 2.4.1 y bertetangga dengan yx. Karena berlaku untuk sebarang y maka diperoleh n sisi yang tidak saling terhubung. Dengan demikian graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf nP_2. □

Contoh 3.2. Diberikan grup $(D_8, \circ)$, di mana $n = 4$. Jika diambil $H = \{ab\}$ sebagai subhimpunan dari $(D_8, \circ)$ maka dapat dilihat bahwa graf $Cay(D_{2n}, H)$ merupakan graf $4P_2$ seperti pada Gambar 2.

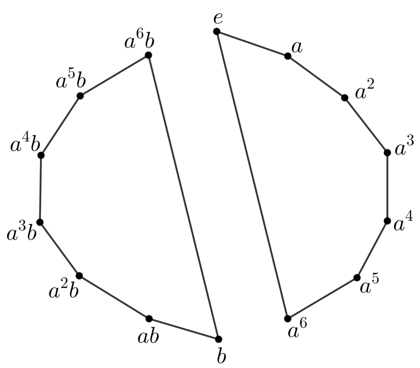
Teorema 3.3. *Misalkan D_{2n} grup dihedral. Jika $H \subset D_{2n}$ sedemikian sehingga $H = \{a^i, a^{-i}\}$, $a^i \neq a^{-i}$ dan $FPB(n, i) = 1$ dengan $1 \leq i \leq n - 1$ maka graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $2C_n$.*



Gambar 2: Graf Cay(D_8, H), $H = \{ab\}$

BUKTI. Diketahui FPB$(n, i) = 1$ maka $o(a^i) = n$. Diambil $e \in D_{2n}$. Perhatikan bahwa e bertetangga a^i bertetangga dengan a^{2i} dan seterusnya hingga diperoleh siklus dengan panjang n, $e - a^i - a^{2i} - \cdots - a^{(n-1)i} - a^{ni} = e$. Karena $o(a^i) = n$, misalkan $S = \langle a^i \rangle = \{e, a^i, a^{2i}, \cdots, a^{(n-1)i}\}$ sebagai subgrup siklik berorde n dari D_{2n}. Dengan demikian $[D_{2n} : S] = 2$ sehingga diperoleh 2 koset kiri dari S di D_{2n} yang masing-masing memuat siklus dengan panjang n. Jadi graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $2C_n$. □

Contoh 3.3. Diberikan grup $(D_{14}, \circ)$, jika diambil $H = \{a, a^6\}$ sebagai subhimpunan dari $(D_{14}, \circ)$ maka dapat dilihat bahwa graf $Cay(D_{2n}, H)$ merupakan graf $2C_7$ seperti pada Gambar 3.



Gambar 3: Graf Cay(D_{14}, H), $H = \{a, a^6\}$

Teorema 3.4. *Misalkan D_{2n} grup dihedral. Jika $H \subset D_{2n}$ sedemikian sehingga $H = \{a, a^{-i}\}$ di mana $a \neq a^{-i}$ dan FPB$(n, i) = k$, $k \geq 2$ maka graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $2kC_{n/k}$.*

BUKTI. Diketahui FPB$(n, i) = k$ maka $o(a^i) = \frac{n}{k}$. Diambil $e \in D_{2n}$. Perhatikan bahwa e bertetangga a^i bertetangga dengan a^{2i} dan seterusnya hingga diperoleh siklus dengan panjang n, $e - a^i - a^{2i} - \cdots - a^{(\frac{n}{k}-1)i} - a^{\frac{n}{k}i} = e$. Karena $o(a^i) = \frac{n}{k}$, misalkan $S = \langle a^i \rangle = \{e, a^i, a^{2i}, \cdots, a^{(\frac{n}{k}-1)i}\}$ sebagai subgrup siklik berorde $\frac{n}{k}$ dari D_{2n}. Dengan demikian $[D_{2n} : S] = 2k$ sehingga diperoleh 2k koset kiri dari S di D_{2n} yang masing-masing memuat siklus dengan panjang $\frac{n}{k}$. Jadi graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $2kC_{n/k}$. □

Teorema 3.5. *Misalkan D_{2n} grup dihedral. Jika $H \subset D_{2n}$ sedemikian sehingga $H = \{x, y\}$ di mana $x = x^{-1}$, $y = y^{-1}$ dan $o(xy) = m$ maka graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $\frac{n}{m}C_{2m}$.*

BUKTI. Pandang n ganjil. Karena $x = x^{-1}$ dan $y = y^{-1}$ maka $o(x) = o(y) = 2$, sehingga tidak mungkin x dan y berbentuk a^i, $1 \leq i \leq n-1$. Dengan demikian $x = a^ib$ dan $y = a^jb$, $0 \leq i \neq j \leq$

$n-1$. Selanjutnya perhatikan bahwa,

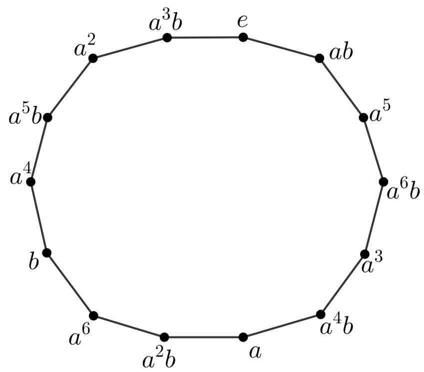
$$\begin{aligned}((xy)^k x)^{-1}(xy)^{k+1} &= x^{-1}(xy)^{-k}(xy)^{k+1}\\ &= x^{-1}xy\\ &= y \in H\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}((xy)^k)^{-1}((xy)^k x) &= (xy)^{-k}(xy)^k x\\ &= x \in H\end{aligned}$$

$(xy)^k x$ bertetangga dengan $(xy)^{k+1}$ dan $(xy)^k$ untuk setiap $1 \leq k \leq m$. Maka diperoleh siklus berikut, $e - x - xy - (xy)x - (xy)^2 - (xy)^2x - \cdots - (xy)^{m-1}x - (xy)^m = e$.
Kemudian, definisikan $D_{2m} = \langle (xy), x | (xy)^m = x^2 = e, x(xy)x = (xy)^{-1} \rangle$ sebagai subgrup berorder $2m$ dari D_{2n}. Dengan demikian $[D_{2n} : D_{2m}] = \frac{n}{m} = t$. Oleh karena itu, diperoleh t koset kiri di mana setiap koset kiri memuat siklus dengan panjang $2m$. Jadi graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf tC_{2m}. □

Contoh 3.4. Diberikan grup $(D_{14}, \circ)$, jika diambil $H = \{ab, a^3b\}$ sebagai subhimpunan. Dapat dilihat bahwa graf Cay(D_{14}, H) merupakan graf C_{14} seperti pada Gambar 4.



Gambar 4: Graf Cay(D_{14}, H), $H = \{ab, a^3b\}$

Teorema 3.6. *Misalkan D_{2n} grup dihedral. Jika $H \subset D_{2n}$ sedemikian sehingga $|H| = 2n - 1$ maka graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf K_{2n}.*

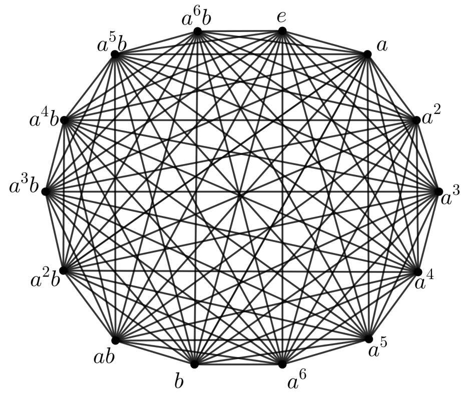
Bukti. Diketahui $|H| = 2n - 1$ maka berdasarkan Teorema 3.1 $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $(2n - 1)$−reguler sehingga $d(x) = 2n-1$ untuk setiap $x \in D_{2n}$. Karena $|D_{2n}| = 2n$ maka jelas x bertetangga dengan semua simpul lain di $Cay(D_{2n}, H)$. □

Contoh 3.5. Diberikan grup $(D_{14}, \circ)$, jika diambil $H = D_{2n}/\{e\}$ sebagai subhimpunan. Maka dapat dilihat bahwa graf $Cay(D_{2n}, H)$ yang terbentuk adalah K_{14} seperti pada Gambar 5.

Teorema 3.7. *Misalkan D_{2n} grup dihedral. Jika $H \subset D_{2n}$ sedemikian sehingga $H = \{a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ di mana $|H| = n - 1$ maka graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $2K_n$.*

Bukti. Berikut dibuktikan bahwa $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $2K_n$.

1. Misalkan diambil $a^i \in D_{2n}$, $0 \leq i \leq n - 1$.
   Perhatikan bahwa $N(a^i) = \{a^{i+1}, a^{i+2}, \cdots, a^{i+(n-1)}\}$. Dengan demikian , diketahui bahwa untuk a^i, $0 \leq i \leq n - 1$ bertetangga dengan setiap a^{i+j} di mana $1 \leq j \leq n - 1$. Karena $1 \leq j \leq n - 1$ maka $d(a^i) = n - 1$ sehingga diperoleh graf lengkap K_n.

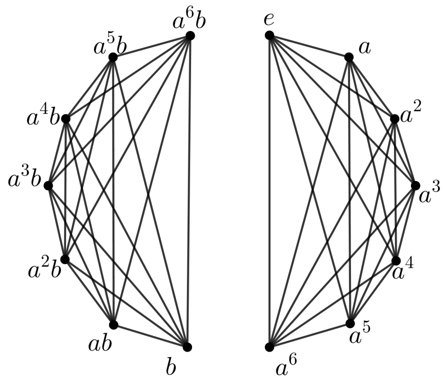


Gambar 5: Graf Cay(D_{14}, H), $H = D_{2n}/\{e\}$

2. Misalkan diambil $a^ib \in D_{2n}$, $0 \leq i \leq n-1$.
   Perhatikan bahwa $N(a^ib) = \{a^{i-1}b, a^{i-2}b, \cdots, a^{i-n+1}\}$. Dengan demikian , diketahui bahwa untuk a^ib, $0 \leq i \leq n-1$ bertetangga dengan setiap $a^{i-j}b$ di mana $1 \leq j \leq n-1$. Karena $1 \leq j \leq n-1$ maka $d(a^ib) = n-1$ sehingga diperoleh graf lengkap K_n.

Dengan demikian, $Cay(D_{2n}, H)$ terdiri dari 2 graf K_n. □

Contoh 3.6. Diberikan grup $(D_{14}, \circ)$, jika diambil $H = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$ sebagai subhimpunan. Maka dapat dilihat bahwa graf $Cay(D_{2n}, H)$ yang terbentuk adalah $2K_7$ seperti pada Gambar 6.



Gambar 6: Graf Cay(D_{14}, H), $H = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$

Teorema 3.8. *Misalkan D_{2n} grup dihedral. Jika $H \subset D_{2n}$ untuk n genap sedemikian sehingga $H = \{a^2, a^4, \cdots, a^{n-2}\}$ di mana $|H| = \dfrac{n}{2} - 1$ maka graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $4K_{n/2}$.*

BUKTI. Berikut dbuktikan bahwa graf $Cay(D_{2n}, H)$ adalah graf $4K_{n/2}$.

1. Misalkan diambil $a^i \in D_{2n}$. Perhatikan bahwa $N(a^i) = \{a^{i+2}, a^{i+4}, \cdots, a^{i+n-2}\}$. Ketika i genap maka $a^x \in N(a^i)$ untuk setiap x, x adalah genap sedangkan ketika i ganjil maka $a^x \in N(a^i)$ untuk suatu x, x adalah ganjil. Dengan demikian akan diperoleh 2 graf lengkap $K_{n/2}$.

2. Misalkan diambil $a^ib \in D_{2n}$. Perhatikan bahwa $N(a^ib) = \{a^{i-2}b, a^{i-4}b, \cdots, a^{i-n+2}b\}$. Ketika i genap maka $a^xb \in N(a^i)$ untuk setiap x, x adalah genap sedangkan ketika i ganjil maka $a^x \in N(a^ib)$ untuk suatu x, x adalah ganjil. Dengan demikian akan diperoleh 2 graf lengkap $K_{n/2}$.

Oleh karena itu maka graf $CayD_{2n}, H$ terdiri dari 4 graf lengkap $K_{n/2}$. □

Berikut diberikan syarat subhimpunan H dari grup D_{2n} untuk graf $Cay(D_{2n,H})$ terhubung dan tidak terhubung yang disajikan dalam teorema-teorema berikut.

Teorema 3.9. *Misalkan D_{2n} grup dihedral dan $H \subset D_{2n}$. Graf $Cay(D_{2n}, H)$ merupakan graf tidak terhubung jika :*

a. $H = \{a^i, a^{-i}\}$ *di mana* $a^i \neq a^{-i}$ *dengan* $1 \leq i \leq n-1$.

b. $H = \{a, a^2, ..., a^{n-2}, a^{n-1}\}$

c. $H = \{a^i b\}, 1 \leq i \leq n$

d. $H = \{a^i b, a^j b\}$ *di mana* $o((a^i b)(a^j b)) \neq n$

Teorema 3.10. *Misalkan D_{2n} grup dihedral dan $H \subset D_{2n}$. Graf $Cay(D_{2n}, H)$ merupakan graf tidak terhubung jika :*

a. $H = \{a^i, a^{-i}\}$ *dimana* $a^i \neq a^{-i}$ *dengan* $1 \leq i \leq n-1$.

b. $H = \{a, a^2, ..., a^{n-2}, a^{n-1}\}$

c. $H = \{a^i b\}, 1 \leq i \leq n$

d. $H = \{a^i b, a^j b\}$ *dimana* $o((a^i b)(a^j b)) \neq n$

Teorema 3.11. *Misalkan D_{2n} grup dihedral dan $H \subset D_{2n}$. Jika $S \subseteq H$ dimana $S = \{a^i, a^{-i}, a^j b\}$ dan $FPB(n, i) = 1$, maka graf $Cay(D_{2n}, H)$ terhubung.*

Bukti. Diketahui bahwa $S \subseteq H$ dimana $S = \{a^i, a^{-i}, a^j b\}$ dan $\text{FPB}(n, i) = 1$. Karena $S \subseteq H$ maka Graf $\text{Cay}(D_{2n}, S)$ adalah subgraf dari $\text{Cay}(D_{2n}, H)$. Perhatikan bahwa berdasarkan Teorema 3.3, diketahui Graf $\text{Cay}(D_{2n}, S)$ adalah graf $2C_n$ sehingga terdapat dua siklus dengan panjang n, yaitu $C_1 = e - a^i - a^{2i} - \cdots - a^{(n-1)i} - e$ dan $C_2 = b - a^i b - a^{2i} b - \cdots - a^{(n-1)i} b - b$. Karena panjang siklus C_2 adalah n maka terdapat k sedemikian sehingga $a^{ki} b = a^j b$. Selanjutnya, diketahui pula bahwa $a^j b$ bertetangga dengan e. Dengan demikian C_1 dan C_2 terhubung. □

Teorema 3.12. *Misalkan D_{2n} grup dihedral dan $H \subset D_{2n}$. Jika $S \subseteq H$ dimana $S = \{a^i b, a^j b\}$ dan $o((a^i b)(a^j b)) = n$, $i \neq j$ dan $1 \leq i, j \leq n$ maka graf $Cay(D_{2n}, H)$ terhubung.*

Bukti. Diketahui $o((a^i b)(a^j b)) = n$. Diambil $e \in D_{2n}$, perhatikan bahwa e bertetangga dengan $a^i b$ dan $a^i b$ bertetangga dengan a^{i-j} dan seterusnya hingga diperoleh lintasan berikut, $e - a^{ib} - a^{i-j} - a^{2i-j} b - a^{2i-2j} - \cdots - a^{ni-n-1j} b = a^j b$. Karena $o((a^i b)(a^j b)) = n$ maka $A = \{e, a^i b, a^{i-j}, a^{2i-j} b, a^{2i-2j}, \cdots, a^j b\}$ berbeda. Akibatnya $|A| = 2n$. Diketahui $|D_{2n}| = 2n$ maka $A = D_{2n}$. Sehingga untuk setiap $x, y \in D_{2n}$ terdapat lintasan dari x, y.

□

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh beberapa kesimpulan. Pertama, jenis graf Cayley pada grup dihedral dengan subhimpunan H adalah graf k-reguler jika $|H| = k$, graf lintasan nP_2 jika $|H| = 1$, graf siklus $2kC_{n/k}$ jika $H = \{a^i, a^{-i}\}$ dengan $\text{FPB}(n, i) = k$, graf siklus $\frac{n}{m} C_{2m}$ jika $H = \{x, y\}$ dimana $x^2 = y^2 = e$ dan $o(xy) = m$, graf lengkap K_{2n} jika $|H| = 2n - 1$, graf lengkap $2K_n$ jika $H = \{a, a^2, a^3 \cdots, a^{n-1}\}$ dan graf lengkap $4K_{n/2}$ jika $H = \{a^2, a^4, \cdots, a^{n-2}\}$ ketika n genap. Kedua, Graf $Cay(D_2 n, H)$ merupakan graf tidak terhubung jika $H = \{a^i, a^{-i}\}$, $H = \{a, a^2, a^3 \cdots, a^{n-1}\}$, $H = \{a^i b\}$, $H = \{a^i b, a^j b\}$ dengan $o((a^i b)(a^j b)) \neq n$, dan ketika n genap $H = \{a^2, a^4, \cdots, a^{n-2}\}$, $H = \{a^{n/2}\}$ dan $H = \{a^{n/2}, a^i b\}$. Ketiga, Graf $Cay(D_2 n, H)$ merupakan graf terhubung jika $S \subseteq H$ apabila $S = \{a^i, a^{-i}, a^i b\}$ dengan $\text{FPB}(n, i) = 1$ dan $S = \{a^i b, a^j b\}$ dengan $o((a^i b)(a^j b)) = n$.

Daftar Pustaka

[1] J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*. Boston: Brooks/Cole Cengage Learning, 8th ed., 2013.

[2] A. Hadi and K. A. Sugeng, "Sifat-sifat graf cayley grup s_n," in *Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology*, pp. 171–176, 2021.

[3] J. Daniel, K. A. Sugeng, and N. Hariadi, "Eigenvalues of antiadjacency matrix of cayley graph of $\mathbb{Z}_n$," *Indonesian Journal of Combinatorics*, vol. 6, no. 1, pp. 66–76, 2022.

[4] A. Kumala, H. Susanto, D. Rahmadani, and W. H. Irawan, "Decomposition hamilton in cayley graphs with certain invers generator of dihedral- $2n$ group," in *12th International Conference on Green Technology (ICGT 2022)*, pp. 423–431, Atlantis Press, 2023.

[5] A. Widodo *et al.*, *Teori Graf*. Universitas Brawijaya Press, 2016.

[6] I. N. Herstein, *Abstract algebra*. John Wiley & Sons, 1996.

[7] M. I. Hidayat and I. G. A. W. Wardhana, "p-grup pada grup dihedral," *3rd ELPSA Conference*, 2019.

[8] A. Gazir and I. G. A. W. Wardhana, "Subgrup non trivial dari grup dihedral," *Eigen Mathematics Journal*, pp. 73–76, 2019.

[9] Q. Aini, "Some properties of coprime graph of dihedral group d2n when n is a prime power," *JFMA*, vol. 3, no. 1, 2020.

[10] H. Muhammad, *Grup Dihedral Dan Derajat Kekomutatifannya*. PhD thesis, Universitas Airlangga, 2020.

[11] T. A. Mujiwinarta, *Graf cayley pada grup modulo-n (M_n)*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, 2014.

[12] M. Conder, J.-X. Zhou, Y.-Q. Feng, and M.-M. Zhang, "Edge-transitive bi-cayley graphs," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 145, pp. 264–306, 2020.

[13] M. Okal, M. Kiftiah, and F. Fran, "Graf cayley pada s_n," *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 8, no. 1.

[14] F. Afshari and M. Maghasedi, "On the eigenvalues of cayley graphs on generalized dihedral groups," *Algebraic Structures and Their Applications*, vol. 6, no. 2, pp. 39–45, 2019.

[15] Y. Xu, "Normal and non-normal cayley graphs for symmetric groups," *Discrete Mathematics*, vol. 345, no. 6, p. 112834, 2022. https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.112834.