J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 08 No. 02 (2024) pp. 105-121
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM) e-ISSN: 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

INDEKS TOPOLOGI PADA GRAF PEMBAGI NOL

MARGARETHA HENDRIKA SILVYA TAHU BOLOMBIAS[1*], GANESHA L. PUTRA[2], FARLY O. HANING[3]

[1,2,3] Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

[*] margarethabolombias@gmail.com

Abstrak

Misalkan R suatu ring komutatif dengan satuan dan $Z(R)$ ialah himpunan semua unsur pembagi nol dari ring R. Graf pembagi nol dari R, $\Gamma(R)$, didefinisikan sebagai graf tak berarah dengan himpunan titiknya ialah himpunan pembagi nol tak nol, $Z(R)^* = Z(R)\backslash 0$, dimana sisi graf terbentuk jika hasil kali dua titik di graf adalah nol. Indeks topologi adalah nilai numerik yang menunjukkan sifat struktural dan konektivitas graf. Indeks topologi yang dibahas dalam penelitian ini adalah indeks Wiener dan indeks Zagreb pertama. Dalam penelitian ini ditentukan rumusan umum dari indeks Wiener dan indeks Zagreb pertama dari beberapa jenis graf pembagi nol, yakni $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$, $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})$ dan $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2 p_3})$.
Kata kunci: graf pembagi nol, indeks topologi, indeks Wiener, indeks Zagreb pertama

Abstract

Let R is a commutative ring with unit and $Z(R)$ is the set of all zero divisor elements of ring R. The zero-divisor graph of R, $\Gamma(R)$, is defined as an undirected graph whose vertex set is the set of non-zero zero-divisors, $Z(R)^* = Z(R) \setminus 0$, where an edge of the graph is formed if and only if the product of two vertices in the graph is zero. A topological indeces is a numerical value that indicates the structural properties and connectivity of a graph. The topological indices discussed in this study are the Wiener index and the first Zagreb index. In this study, the general formulation of Wiener index and first Zagreb index of several types of zero-divisor graphs, namely $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$, $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})$ and $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2 p_3})$ are determined.
***Keywords**: zero-divisor graph, topological indices, Wiener index, first Zagreb index*

1 Pendahuluan

Teori graf memiliki banyak kegunaan dalam matematika, misalnya dalam struktur aljabar, graf digunakan untuk merepresentasikan suatu grup atau pun ring [1]. Salah satu contohnya ialah

2020 Mathematics Subject Classification: 105C10
Diterima: 21-06-24, direvisi: 25-10-24, dimuat: 27-10-24.

graf pembagi nol. Graf pembagi nol ialah graf yang titiknya merepresentasikan elemen-elemen di suatu ring komutatif dengan satuan dan sisinya merepresentasikan hubungan antar titik, dengan titik x dan y bertetangga jika dan hanya jika xy adalah nol [2].

Selain dalam bidang ilmu matematika, graf juga digunakan dalam banyak bidang ilmu lain, seperti teknik, kimia hingga ilmu komputer. Dalam kimia, graf dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan molekuler. Titik dan sisi pada graf secara terurut merepresentasikan atom dan ikatannya [3]. Lebih lanjut lagi, graf sangat berkaitan dengan indeks topologi. Indeks topologi adalah nilai numerik yang menunjukkan sifat struktural dan konektivitas graf [4]. Indeks topologi digunakan untuk merepresentasikan struktur kimia dengan nilai numerik dan memprediksi sifat kimia, struktur fisik molekul, serta reaksi kimianya [5].

Beberapa tahun terakhir, telah dilakukan berbagai penelitian terkait indeks topologi yang merepresentasikan struktur aljabar. Pada tahun 2020, Vaidya dan Jadeja menerapkan indeks Wiener pada beberapa graf pembagi nol, seperti graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ serta graf pembagi nol dari hasil kali ring [6]. Pada tahun yang sama, Singh dan Bhat juga melakukan penelitian yang membahas ketetanggan matriks dan tiga indeks topologi, yakni indeks Wiener, energi Laplacian dan indeks Zagreb dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_n$ [7]. Selanjutnya, pada tahun 2022 Vinothkumar dkk memperoleh indeks Wiener dari graf *H-generalized join* dan juga memperoleh formula dari indeks Wiener pada graf pembagi nol berbasis ideal $\Gamma_I(R)$ dari ring R [8]. Dolzan juga melakukan penelitian dengan menerapkan indeks Wiener dan kompleksitas Wiener dari graf pembagi nol. Dalam penelitian ini, Dolzan menghitung indeks Wiener dari graf pembagi nol atas ring semisimpel berhingga dan kompleksitas Wiener dari graf pembagi nol atas ring simpel berhingga. Dolzan juga menemukan batas atas kompleksitas Wiener untuk graf semisimpel [9].

Adapun di tahun 2019, Aykaç dkk menganalisis indeks Zagreb atas graf pembagi nol dari ring komutatif. Hal-hal yang dianalisis antara lain, indeks Zagreb pertama dan kedua, perkalian indeks Zagreb pertama dan kedua, indeks koindeks Zagreb pertama dan kedua, perkalian indeks koindeks Zagreb pertama dan kedua dari graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^2})$, dengan p dan q adalah bilangan prima [4]. Selanjutnya, pada tahun 2023, Rehman dkk manganalisis indeks Zagreb atas graf pembagi nol lemah dari ring $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_s$, dengan p, s, t bilangan prima yang belum tentu berbeda dan lebih besar dari dua. Pada penelitian ini, Rehman dkk berfokus pada barisan derajatnya, indeks ketidakteraturannya, serta derajat maksimum dan minimumnya [10]. Dalam tahun yang sama, Semil dkk juga telah menunjukkan hasil teoritis dari merekonstruksi bentuk umum dari indeks pertama Zagreb dari graf pembagi nol menggunakan himpunan bilangan bulat modulo pangkat bilangan prima, $\mathbb{Z}_{p^k}$ [5].

Berdasarkan penelitian-penelitian di atas, penulis tertarik untuk mampelajari dan mengkaji lebih dalam terkait indeks topologi, terkhususnya indeks Wiener dan indeks Zagreb pertama pada beberapa jenis graf pembagi nol. Dalam penelitian ini, penulis akan mencari dan menentukan rumusan umum dari indeks Wiener dan indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol.

Pada penelitian ini, penulis menawarkan kebaruan dengan mengeksplorasi indeks Wiener dan indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol dari jenis ring yang belum banyak diteliti serta menyusun rumusan umum secara lebih sederhana.

2 Tinjauan Pustaka

Penelitian ini dilakukan dengan mempelajari sejumlah referensi yang berhubungan dengan topik yang diangkat penulis. Selanjutnya, dengan membaca, memahami dan menganalisis tentang grup, ring, graf, graf pembagi nol, indeks Wiener dan indeks pertama Zagreb, penulis memperhatikan pola yang terbentuk dari indeks Wiener dan indeks Zagreb pertama yang dikenakan pada graf pembagi nol. Dengan pola yang terbentuk, penulis kemudian menentukan rumusan umum dari indeks Wiener dan indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol.

Jenis graf pembagi nol yang dibahas dalam penelitian ini adalah graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo bilangan prima berpangkat ($\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$), graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo perkalian dua bilangan prima berbeda ($\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$) dan graf pembagi nol dari ring bilangan bulat modulo perkalian tiga bilangan prima berbeda ($\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})$).

Definisi 2.1. *[2] Misalkan R adalah ring komutatif dengan satuan dan $Z(R)$ adalah himpunan semua unsur pembagi nol.* ***Graf pembagi nol*** *dari R, dinotasikan dengan $\Gamma(R)$, adalah graf tak berarah dengan himpunan titiknya adalah $Z(R)^* = Z(R) \setminus 0$, himpunan semua unsur pembagi nol tak nol dari R. Titik x dan y bertetangga jika dan hanya jika $xy = 0$.*

Definisi 2.2. *[12] Misalkan u dan v titik-titik di graf G.* ***Jarak*** *antar titik u dan v dinotasikan dengan $d_G(u, v)$ atau $d(u, v)$ didefinisikan dengan panjang lintasan terpendek antara u dan v di G.*

Definisi 2.3. *[12] Misalkan v titik di graf G,* ***derajat*** *dari v, dinotasikan dengan $deg_G(v)$ atau $deg(v)$, adalah jumlah sisi yang berinsiden dengan v.*

Definisi 2.4. *[12] Indeks Wiener dari graf $G(V, E)$, dinotasikan dengan $W(G)$, merupakan jumlah jarak antara semua titik di G. Secara matematis, indeks Wiener dituliskan sebagai berikut.*

$$W(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u, v)$$

Definisi 2.5. *[13] Untuk graf G, indeks Zagreb pertama $M_1(G)$ dan indeks Zagreb kedua $M_2(G)$ masing-masing didefinsikan sebagai berikut:*

$$M_1 = M_1(G) = \sum_{v \in V(G)} deg_G(v)^2$$
$$M_2 = M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} deg_G(u) deg_G(v)$$

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Indeks Wiener

Teorema 3.1. *Indeks Wiener dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan $p > 2$ adalah*

$$W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) = \binom{p-1}{2}$$

Bukti. Diberikan $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ dengan himpunan titik $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) = \{p, 2p, \cdots, (p-1)p\} = \{kp\}_{k=1}^{p-1}$. Akibatnya $| V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) | = p - 1$. Perhatikan bahwa, untuk setiap $u, v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}))$, $u \cdot v = 0$, sehingga u bertetangga dengan v dan $d(u, v) = 1$. Karena setiap u dan v bertetangga maka graf yang terbentuk adalah graf lengkap. Berdasarkan informasi-informasi tersebut, maka indeks Wiener dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ dapat dihitung sebagai berikut.

$$W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) = \sum_{u,v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}))} d(u, v) = \sum_{u,v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}))} 1 = \binom{| V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) |}{2} = \binom{p-1}{2}$$

□

Teorema 3.2. *Indeks Wiener dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^n}$ untuk $n \geq 3$ adalah*

$$W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \left[(p-1)(p^{n-1}-p) + \binom{p-1}{2}\right] + 2\binom{p^{n-1}-p}{2} - x$$

dengan

$$x = \begin{cases} 0 & \textit{jika } n = 3 \\ \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \left[(p^i - p^{i-1})(p^{n-i} - p^i) + \binom{p^i - p^{i-1}}{2}\right] & \textit{jika } n \textit{ ganjil dan } n > 3 \\ \sum_{i=2}^{\frac{n}{2}} \left[(p^i - p^{i-1})(p^{n-i} - p^i) + \binom{p^i - p^{i-1}}{2}\right] & \textit{jika } n \textit{ genap dan } n > 3 \end{cases}$$

Bukti. Diberikan $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ dengan himpunan titik $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \{p, 2p, 3p, \cdots, (p^{n-1}-1)p\} = \{kp\}_{k=1}^{p^{n-1}-1}$ akibatnya $| V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) |= p^{n-1} - 1$. Perhatikan bahwa diameter dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ adalah dua. Berikut dibuktikan $diam(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = 2$.

Misalkan $u, v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))$, maka $u = k_1 p$ dan $v = k_2 p$. Misalkan u dan v tidak bertetangga, maka lintasan dari titik u ke v adalah $u - p^{n-1} - v$ dengan $p^{n-1} \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))$. Akibatnya

$$diam(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))\} = \max\{1, 2\} = 2$$

Selanjutnya, tinjau definisi indeks Wiener pada graf. Oleh karena $diam(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = 2$, maka $d(u, v) = 1$ atau $d(u, v) = 2$. Definisikan suatu himpunan, namakan A, yang memuat titik-titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ di mana titik-titiknya memiliki tetangga terbanyak di graf. $A = \{p^{n-1}, 2p^{n-1}, \cdots, (p-1)p^{n-1}\}$ dan $| A |= p-1$. Bentuk $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = A \cup B$ dengan $B = A^C$. Akibatnya, kardinalitas dari B dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned} | V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) | &=| A | + | B | \\ p^{n-1} - 1 &= p - 1 + | B | \\ | B | &= p^{n-1} - 1 - p + 1 \\ &= p^{n-1} - p \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa hasil kali setiap $u \in A$ dengan $v \in B$ adalah nol, sehingga u bertetangga dengan v dan $d(u, v) = 1$. Kemudian, setiap hasil kali dua titik di A juga nol. Hal ini menunjukkan setiap titik di A bertetangga satu sama lain. Akibatnya,

$$\begin{aligned} W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) &= \sum_{u,v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))} d(u, v) \\ &= \sum_{\substack{u \in A \\ v \in B}} d(u, v) + \sum_{u,v \in A} d(u, v) + \sum_{u,v \in B} d(u, v) \\ &= \sum_{\substack{u \in A \\ v \in B}} 1 + \sum_{u,v \in A} 1 + \sum_{u,v \in B} d(u, v) \\ &=| A | \cdot | B | + \binom{| A |}{2} + \sum_{u,v \in B} d(u, v) \\ &= (p-1)(p^{n-1} - p) + \binom{p-1}{2} + \sum_{u,v \in B} d(u, v) \end{aligned}$$

Selanjutnya, fokus pembahasannya adalah $\sum_{u,v \in B} d(u, v)$. Pandang setiap dua titik di B hanya terhubung melalui titik-titik di A sehingga jarak antara dua titik di B adalah dua. Oleh karena itu, jumlah jarak dari titik-titik di B adalah $2\binom{|B|}{2}$. Selanjutnya, perhatikan bahwa untuk $n > 3$, terdapat titik-titik di B yang bertetangga. Sehingga jumlah jarak titik-titik di B dapat dituliskan:

$$\sum_{u,v \in B} d(u, v) = 2\left(\binom{| B |}{2} - x\right) + x = 2\binom{| B |}{2} - x = 2\binom{p^{n-1} - p}{2} - x$$

x adalah banyaknya pasangan tak terurut u dan v di B yang bertetangga.
Pasangan tak terurut $u, v \in B$ yang bertetangga dapat dijabarkan sebagai berikut.

1. Perhatikan titik-titik pada $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))$. Definisikan suatu himpunan baru, namakan C_{n-2}, yang hanya memuat titik-titik kelipatan p^{n-2} saja.

$$C_{n-2} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid x \text{ titik kelipatan } p^{n-2} \text{ saja}\} = \{kp^{n-2}\}_{k=1}^{p^2-1} - \{kp^{n-1}\}_{k=1}^{p-1}$$

Akibatnya $| C_{n-2} |= (p^2-1)-(p-1) = p^2-p$. Hasil kali dua titik di C_{n-2} adalah nol, sehingga setiap titik di C_{n-2} bertetangga satu sama lain. Titik-titik anggota C_{n-2} juga bertetangga dengan himpunan titik yang anggota himpunannya merupakan titik-titik kelipatan p^2 saja, namakan himpunan tersebut C_2. Hal ini dikarenakan hasil kali titik-titik anggota C_{n-2} dengan titik-titik anggota C_2 adalah nol.

$$C_2 = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid x \text{ titik kelipatan } p^2 \text{ saja}\} = \{kp^2\}_{k=1}^{p^{n-2}-1} - \{kp^3\}_{k=1}^{p^2-1}$$

Akibatnya $| C_2 |= (p^{n-2} - 1) - (p^2 - 1) = p^{n-2} - p^2$.

2. Perhatikan titik-titik pada $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))$. Definisikan suatu himpunan baru, namakan C_{n-3}, yang hanya memuat titik-titik kelipatan p^{n-3}.

$$C_{n-3} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid x \text{ titik kelipatan } p^{n-3} \text{ saja}\} = \{kp^{n-3}\}_{k=1}^{p^3-1} - \{kp^{n-2}\}_{k=1}^{p^2-1}$$

Akibatnya $| C_{n-3} |= (p^3 - 1) - (p^2 - 1) = p^3 - p^2$. Hasil kali dua titik di C_{n-3} adalah nol, sehingga setiap titik di C_{n-3} bertetangga satu sama lain. Titik-titik anggota C_{n-3} juga bertetangga dengan himpunan titik yang anggota himpunannya merupakan titik-titik kelipatan p^3 saja, namakan himpunan tersebut C_3. Hal ini dikarenakan hasil kali titik-titik anggota C_{n-3} dengan titik-titik anggota C_3 adalah nol.

$$C_3 = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid x \text{ titik kelipatan } p^3 \text{ saja}\} = \{kp^3\}_{k=1}^{p^{n-3}-1} - \{kp^4\}_{k=1}^{p^3-1}$$

Akibatnya $| C_3 |= (p^{n-3} - 1) - (p^3 - 1) = p^{n-3} - p^3$.

Dengan melihat pola yang terbentuk, maka pola yang sama berlaku hingga titik-titik kelipatan $p^{\frac{n+1}{2}}$ untuk n ganjil dan kelipatan $p^{\frac{n}{2}}$ untuk n genap.

1. Untuk n ganjil. Perhatikan titik-titik pada $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))$. Definisikan suatu himpunan baru, namakan $C_{\frac{n+1}{2}}$, yang hanya memuat titik-titik kelipatan $p^{\frac{n+1}{2}}$.

$$C_{\frac{n+1}{2}} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid x \text{ titik kelipatan } p^{\frac{n+1}{2}} \text{ saja}\} = \{kp^{\frac{n+1}{2}}\}_{k=1}^{p^{\frac{n-1}{2}}-1} - \{kp^{\frac{n+3}{2}}\}_{k=1}^{p^{\frac{n-3}{2}}-1}$$

Akibatnya $| C_{\frac{n+1}{2}} |= (p^{\frac{n-1}{2}} - 1) - (p^{\frac{n-3}{2}} - 1) = p^{\frac{n-1}{2}} - p^{\frac{n-3}{2}}$. Hasil kali dua titik di $C_{\frac{n+1}{2}}$ adalah nol, sehingga setiap titik di $C_{\frac{n+1}{2}}$ bertetangga satu sama lain. Titik-titik anggota $C_{\frac{n+1}{2}}$ juga bertetangga dengan himpunan titik yang anggota himpunannya merupakan titik-titik kelipatan $p^{\frac{n-1}{2}}$ saja, namakan himpunan titik tersebut $C_{\frac{n-1}{2}}$. Hal ini dikarenakan hasil kali titik-titik anggota $C_{\frac{n+1}{2}}$ dengan titik-titik anggota $C_{\frac{n-1}{2}}$ adalah nol.

$$C_{\frac{n-1}{2}} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid x \text{ titik kelipatan } p^{\frac{n-1}{2}} \text{ saja}\} = \{kp^{\frac{n-1}{2}}\}_{k=1}^{p^{\frac{n+1}{2}}-1} - \{kp^{\frac{n+1}{2}}\}_{k=1}^{p^{\frac{n-1}{2}}-1}$$

Akibatnya $| C_{\frac{n-1}{2}} |= (p^{\frac{n+1}{2}} - 1) - (p^{\frac{n-1}{2}} - 1) = p^{\frac{n+1}{2}} - p^{\frac{n-1}{2}}$.

2. Untuk n genap. Perhatikan titik-titik pada $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))$. Definisikan suatu himpunan baru, namakan $C_{\frac{n}{2}}$, yang hanya memuat titik-titik kelipatan $p^{\frac{n}{2}}$.

$$C_{\frac{n}{2}} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid x \text{ titik kelipatan } p^{\frac{n}{2}} \text{ saja}\} = \{kp^{\frac{n}{2}}\}_{k=1}^{p^{\frac{n}{2}}-1} - \{kp^{\frac{n}{2}+1}\}_{k=1}^{p^{\frac{n}{2}-1}-1}$$

Akibatnya $\mid C_{\frac{n}{2}} \mid = (p^{\frac{n}{2}} - 1) - (p^{\frac{n}{2}-1} - 1) = p^{\frac{n}{2}} - p^{\frac{n}{2}-1}$. Hasil kali dua titik di $C_{\frac{n}{2}}$ adalah nol, sehingga setiap titik di $C_{\frac{n}{2}}$ bertetangga satu sama lain. Berdasarkan pola dari penjelasan sebelumnya, maka titik-titik di $C_{\frac{n}{2}}$ juga akan bertetangga dengan himpunan titik yang anggota himpunannya merupakan titik-titik kelipatan $p^{\frac{n}{2}-1}$ saja, namakan himpunan titik tersebut $C_{\frac{n}{2}-1}$.

$$\begin{aligned} C_{\frac{n}{2}-1} &= \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid x \text{ titik kelipatan } p^{\frac{n}{2}-1} \text{ saja}\} \\ &= \{kp^{\frac{n}{2}-1}\}_{k=1}^{p^{\frac{n}{2}}-1} - \{kp^{\frac{n}{2}}\}_{k=1}^{p^{\frac{n}{2}}-1} \end{aligned}$$

Akibatnya $\mid C_{\frac{n}{2}-1} \mid = (p^{\frac{n}{2}}-1)-(p^{\frac{n}{2}}-1) = p^{\frac{n}{2}} - p^{\frac{n}{2}} = 0$. Karena banyak anggota dari himpunan $C_{\frac{n}{2}-1}$ adalah nol, maka $C_{\frac{n}{2}-1}$ merupakan himpunan kosong. Hal ini mengakibatkan titik-titik anggota $C_{\frac{n}{2}}$ tidak bertetangga dengan titik lain selain titik-titik dalam himpunannya sendiri.

Berdasarkan penjelasan di atas, nilai x dapat dihitung sebagai berikut.

1. Untuk n ganjil.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{u,v \in B} 1 \\ &= \sum_{\substack{u \in C_{n-2} \\ v \in C_2}} 1 + \sum_{u,v \in C_{n-2}} 1 + \sum_{\substack{u \in C_{n-3} \\ v \in C_3}} 1 + \sum_{u,v \in C_{n-3}} 1 + \cdots + \sum_{\substack{u \in C_{\frac{n+1}{2}} \\ v \in C_{\frac{n-1}{2}}}} 1 + \sum_{u,v \in C_{\frac{n+1}{2}}} 1 \\ &= \mid C_{n-2} \mid \cdot \mid C_2 \mid + \binom{\mid C_{n-2} \mid}{2} + \mid C_{n-3} \mid \cdot \mid C_3 \mid + \binom{\mid C_{n-3} \mid}{2} + \cdots + \mid C_{\frac{n+1}{2}} \mid \cdot \mid C_{\frac{n-1}{2}} \mid + \binom{\mid C_{\frac{n+1}{2}} \mid}{2} \\ &= (p^2 - p)(p^{n-2} - p^2) + \binom{p^2 - p}{2} + (p^3 - p^2)(p^{n-3} - p^3) + \binom{p^3 - p^2}{2} + \cdots + \\ &\quad (p^{\frac{n-1}{2}} - p^{\frac{n-3}{2}})(p^{\frac{n+1}{2}} - p^{\frac{n-1}{2}}) + \binom{p^{\frac{n-1}{2}} - p^{\frac{n-3}{2}}}{2} \\ &= \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \left[(p^i - p^{i-1})(p^{n-i} - p^i) + \binom{p^i - p^{i-1}}{2} \right] \end{aligned}$$

2. Untuk n genap.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{u,v \in B} 1 \\ &= \sum_{\substack{u \in C_{n-2} \\ v \in C_2}} 1 + \sum_{u,v \in C_{n-2}} 1 + \sum_{\substack{u \in C_{n-3} \\ v \in C_3}} 1 + \sum_{u,v \in C_{n-3}} 1 + \cdots + \sum_{\substack{u \in C_{\frac{n}{2}} \\ v \in C_{\frac{n}{2}-1}}} 1 + \sum_{u,v \in C_{\frac{n}{2}}} 1 \\ &= \mid C_{n-2} \mid \cdot \mid C_2 \mid + \binom{\mid C_{n-2} \mid}{2} + \mid C_{n-3} \mid \cdot \mid C_3 \mid + \binom{\mid C_{n-3} \mid}{2} + \cdots + \mid C_{\frac{n}{2}} \mid \cdot \mid C_{\frac{n}{2}-1} \mid + \binom{\mid C_{\frac{n}{2}} \mid}{2} \\ &= (p^2 - p)(p^{n-2} - p^2) + \binom{p^2 - p}{2} + (p^3 - p^2)(p^{n-3} - p^3) + \binom{p^3 - p^2}{2} + \cdots + \\ &\quad (p^{\frac{n}{2}} - p^{\frac{n}{2}-1})(p^{\frac{n}{2}} - p^{\frac{n}{2}}) + \binom{p^{\frac{n}{2}} - p^{\frac{n}{2}-1}}{2} \\ &= \sum_{i=2}^{\frac{n}{2}} \left[(p^i - p^{i-1})(p^{n-i} - p^i) + \binom{p^i - p^{i-1}}{2} \right] \end{aligned}$$

Dari penjelasan tersebut, diperoleh indeks Wiener dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^n}$ untuk $n \geq 3$ adalah

$$W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \left[(p-1)(p^{n-1}-p) + \binom{p-1}{2}\right] + 2\binom{p^{n-1}-p}{2} - x$$

dengan

$$x = \begin{cases} 0 & \text{jika } n = 3 \\ \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \left[(p^i - p^{i-1})(p^{n-i} - p^i) + \binom{p^i - p^{i-1}}{2}\right] & \text{jika } n \text{ ganjil dan } n > 3 \\ \sum_{i=2}^{\frac{n}{2}} \left[(p^i - p^{i-1})(p^{n-i} - p^i) + \binom{p^i - p^{i-1}}{2}\right] & \text{jika } n \text{ genap dan } n > 3 \end{cases}$$

□

Teorema 3.3. *Indeks Wiener dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p_1 p_2}$ dengan $p_1 \neq p_2$ adalah*

$$W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) + 2\left[\binom{p_1 - 1}{2} + \binom{p_2 - 1}{2}\right]$$

Bukti. Diberikan $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})$ dengan himpunan titik

$$V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})) = \{p_1, 2p_1, \cdots, (p_2 - 1)p_1, p_2, 2p_2, \cdots, (p_1 - 1)p_2\} = \{kp_1\}_{k-1}^{p_2 - 1} + \{lp_2\}_{l=1}^{p_1 - 1}$$

Akibatnya $|\ V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2}))\ | = p_1 + p_2 - 2$. Definisikan suatu himpunan, namakan A, yang memuat titik-titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})$ di mana titik-titiknya merupakan kelipatan p_1. $A = \{p_1, 2p_1, \cdots, (p_2 - 1)p_1\} = \{kp_1\}_{k=1}^{p_2 - 1}$. Akibatnya $|\ A\ | = p_2 - 1$. Bentuk $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})) = A \cup B$ dengan $B = A^C$. Perhatikan bahwa B memuat titik-titik kelipatan p_2. $B = \{p_2, 2p_2, \cdots, (p_1 - 1)p_2\} = \{lp_2\}_{l=1}^{p_1 - 1}$. Akibatnya $|\ B\ | = p_1 - 1$.

Selanjutnya perhatikan bahwa hasil kali setiap setiap $u \in A$ dengan $v \in B$ adalah nol. Maka setiap titik di A bertetangga dengan titik-titik di B. Hal ini menunjukkan graf yang terbentuk adalah graf bipartit lengkap dengan himpunan partisi A dan B. Selanjutnya, terlihat pula diamater dari graf adalah dua. Berikut dibuktikan $diam(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})) = 2$.

Misalkan $u, v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2}))$. u dan v tidak bertetangga hanya terjadi jika kedua titik berada di dalam himpunan partisi yang sama sehingga u dan v terhubung melalui salah satu titik dari partisi lainnya. Jika $u, v \in A$ maka lintasan yang terbentuk adalah $u - p_2 - v$, dengan $p_2 \in B$ dan jika $u, v \in B$ maka lintasan yang terbentuk adalah $u - p_1 - v$, dengan $p_1 \in \Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})$. Akibatnya

$$diam(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2}))\} = \max\{1, 2\} = 2$$

Selanjutnya, ditinjau definisi indeks Wiener pada graf. Berdasarkan kondisi-kondisi yang telah diberikan, indeks Wiener dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})$ dengan $p_1 \neq p_2$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2})) &= \sum_{u,v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1 p_2}))} d(u, v) \\ &= \sum_{\substack{u \in A \\ v \in B}} d(u, v) + \sum_{u,v \in A} d(u, v) + \sum_{u,v \in B} d(u, v) \\ &= \sum_{\substack{u \in A \\ v \in B}} 1 + \sum_{u,v \in A} 2 + \sum_{u,v \in B} 2 \\ &= |\ A\ | \cdot |\ B\ | + 2 \cdot \binom{|\ A\ |}{2} + 2 \cdot \binom{|\ B\ |}{2} \\ &= (p_2 - 1)(p_1 - 1) + 2\binom{p_2 - 1}{2} + 2\binom{p_1 - 1}{2} \\ &= (p_1 - 1)(p_2 - 1) + 2\left[\binom{p_1 - 1}{2} + \binom{p_2 - 1}{2}\right] \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4. *Indeks Wiener dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}$ dengan $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ adalah*

$$\begin{aligned}W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) = {}& [(p_1-1)(p_2p_3-1)+(p_2-1)(p_1p_3-p_1)+(p_3-1)(p_1p_2-p_1-p_2+1)] + \\ & 2\left[\binom{(p_1-1)(p_2-1)}{2}+\binom{(p_1-1)(p_3-1)}{2}+\binom{(p_2-1)(p_3-1)}{2}+\binom{p_1-1}{2}+\binom{p_2-1}{2}+\right. \\ & \left.\binom{p_3-1}{2}\right] + 2\left[(p_1-1)(p_2-1)(p_1+p_2-2)+(p_1-1)(p_3-1)(p_1+p_3-2)+\right. \\ & \left.(p_2-1)(p_3-1)(p_2+p_3-2)\right] + 3(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(p_1+p_2+p_3-3)\end{aligned}$$

BUKTI. Diberikan $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})$ dengan himpunan titik $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}))$. Selanjutnya, $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}))$ dapat dibagi menjadi beberapa subhimpunan berbeda yang dijabarkan sebagai berikut:

1. Definisikan suatu himpunan $V_{p_1p_2}$, yakni himpunan yang memuat titik-titik kelipatan p_1p_2 saja.
$$\begin{aligned}V_{p_1p_2} &= \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_1p_2 \text{ saja}\} \\ &= \{p_1p_2, 2p_1p_2, \cdots, (p_3-1)p_1p_2\} = \{kp_1p_2\}_{k=1}^{p_3-1}\end{aligned}$$
Sehingga $\mid V_{p_1p_2} \mid = p_3 - 1$.

2. Definisikan suatu himpunan $V_{p_1p_3}$, yakni himpunan yang memuat titik-titik kelipatan p_1p_3 saja.
$$\begin{aligned}V_{p_1p_3} &= \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_1p_3 \text{ saja}\} \\ &= \{p_1p_3, 2p_1p_3, \cdots, (p_2-1)p_1p_3\} = \{kp_1p_3\}_{k=1}^{p_2-1}\end{aligned}$$
Sehingga $\mid V_{p_1p_3} \mid = p_2 - 1$.

3. Definisikan suatu himpunan $V_{p_2p_3}$, yakni himpunan yang memuat titik-titik kelipatan p_2p_3 saja.
$$\begin{aligned}V_{p_2p_3} &= \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_2p_3 \text{ saja}\} \\ &= \{p_2p_3, 2p_2p_3, \cdots, (p_1-1)p_2p_3\} = \{kp_2p_3\}_{k=1}^{p_1-1}\end{aligned}$$
Sehingga $\mid V_{p_2p_3} \mid = p_1 - 1$.

4. Definisikan suatu himpunan V_{p_1}, yakni himpunan yang memuat titik-titik kelipatan p_1 saja.
$$V_{p_1} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_1 \text{ saja}\} = \{p_1\}_{k=1}^{p_2p_3-1} - \{p_1p_2\}_{k=1}^{p_3-1} - \{p_1p_3\}_{k=1}^{p_2-1}$$
Akibatnya $\mid V_{p_1} \mid = (p_2p_3-1)-(p_3-1)-(p_2-1) = (p_2-1)(p_3-1)$.

5. Definisikan suatu himpunan V_{p_2}, yakni himpunan yang memuat titik-titik kelipatan p_2 saja.
$$V_{p_2} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_2 \text{ saja}\} = \{p_2\}_{k=1}^{p_1p_3-1} - \{p_1p_2\}_{k=1}^{p_3-1} - \{p_2p_3\}_{k=1}^{p_1-1}$$
Akibatnya $\mid V_{p_2} \mid = (p_1p_3-1)-(p_3-1)-(p_1-1) = (p_1-1)(p_3-1)$.

6. Definisikan suatu himpunan V_{p_3}, yakni himpunan yang memuat titik-titik kelipatan p_3 saja.
$$V_{p_3} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_3 \text{ saja}\} = \{p_3\}_{k=1}^{p_1p_2-1} - \{p_1p_3\}_{k=1}^{p_2-1} - \{p_2p_3\}_{k=1}^{p_1-1}$$
Akibatnya $\mid V_{p_3} \mid = (p_1p_2-1)-(p_2-1)-(p_1-1) = (p_1-1)(p_2-1)$.

Derajat dan ketetanggaan antar titik pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})$ dijabarkan sebagai berikut:

1. Setiap titik dalam himpunan V_{p_1} bertetangga dengan setiap titik dalam himpunan $V_{p_2p_3}$. Hal ini dikarenakan hasil kali setiap titik di V_{p_1} dengan $V_{p_2p_3}$ adalah nol. Jika v adalah titik pada himpunan V_{p_1}, maka $deg(v) = \mid V_{p_2p_3} \mid = (p_1 - 1)$.

2. Setiap titik dalam himpunan V_{p_2} bertetangga dengan setiap titik dalam himpunan $V_{p_1p_3}$. Hal ini dikarenakan hasil kali setiap titik di V_{p_2} dengan $V_{p_1p_3}$ adalah nol. Jika v adalah titik pada himpunan V_{p_2}, maka $deg(v) =| V_{p_1p_3} |= (p_2 - 1)$.

3. Setiap titik dalam himpunan V_{p_3} bertetangga dengan setiap titik dalam himpunan $V_{p_1p_2}$. Hal ini dikarenakan hasil kali setiap titik di V_{p_3} dengan $V_{p_1p_2}$ adalah nol. Jika v adalah titik pada himpunan V_{p_3}, maka $deg(v) =| V_{p_1p_2} |= (p_3 - 1)$.

4. Setiap titik dalam himpunan $V_{p_1p_2}$ bertetangga dengan setiap titik dalam himpunan V_{p_3}, $V_{p_1p_3}$, dan $V_{p_2p_3}$. Hal ini dikarenakan hasil kali setiap titik di $V_{p_1p_2}$ dengan titik p_3 dan kelipatannya adalah nol. Jika v adalah titik pada himpunan $V_{p_1p_2}$, maka

$$deg(v) =| V_{p_3} | + | V_{p_1p_3} | + | V_{p_2p_3} |= (p_1 - 1)(p_2 - 1) + (p_2 - 1) + (p_1 - 1) = p_1p_2 - 1$$

5. Setiap titik dalam himpunan $V_{p_1p_3}$ bertetangga dengan setiap titik dalam himpunan V_{p_2}, $V_{p_1p_2}$, dan $V_{p_2p_3}$. Hal ini dikarenakan hasil kali setiap titik di $V_{p_1p_3}$ dengan titik p_2 dan kelipatannya adalah nol. Jika v adalah titik pada himpunan $V_{p_1p_3}$, maka

$$deg(v) =| V_{p_2} | + | V_{p_1p_2} | + | V_{p_2p_3} |= (p_1 - 1)(p_3 - 1) + (p_3 - 1) + (p_2 - 1) = p_1p_2 - 1$$

6. Setiap titik dalam himpunan $V_{p_2p_3}$ bertetangga dengan setiap titik dalam himpunan V_{p_1}, $V_{p_1p_2}$, dan $V_{p_1p_3}$. Hal ini dikarenakan hasil kali setiap titik di $V_{p_2p_3}$ dengan titik p_1 dan kelipatannya adalah nol. Jika v adalah titik pada himpunan $V_{p_2p_3}$, maka

$$deg(v) =| V_{p_1} | + | V_{p_1p_2} | + | V_{p_1p_3} |= (p_2 - 1)(p_3 - 1) + (p_3 - 1) + (p_2 - 1) = p_2p_3 - 1$$

Perhatikan bahwa titik-titik yang berada dalam himpunan yang sama tidak bertetangga satu sama lain dan hanya terhubung melalui titik dari himpunan lain yang bertetangga. Akibatnya, jarak antara titik-titik dalam himpunan yang sama adalah dua.

Selanjutnya, perhatikan titik-titik yang tidak bertetangga. Jarak antar titik yang tidak bertetangga dijabarkan sebagai berikut.

1. Jika $u \in V_{p_1}$ dan $v \in V_{p_2}$ maka terdapat $p \in V_{p_2p_3}$ dan $q \in Vp_1p_3$ sehingga *geodesic* dari u ke v adalah $u - p - q - v$. Oleh karena itu, $d(u, v) = 3$.

2. Jika $u \in V_{p_1}$ dan $v \in V_{p_3}$ maka terdapat $p \in V_{p_2p_3}$ dan $q \in Vp_1p_2$ sehingga *geodesic* dari u ke v adalah $u - p - q - v$. Oleh karena itu, $d(u, v) = 3$.

3. Jika $u \in V_{p_2}$ dan $v \in V_{p_3}$ maka terdapat $p \in V_{p_1p_3}$ dan $q \in Vp_1p_2$ sehingga *geodesic* dari u ke v adalah $u - p - q - v$. Oleh karena itu, $d(u, v) = 3$.

4. Jika $u \in V_{p_1}$ dan $v \in V_{p_1p_2}$ maka terdapat $p \in V_{p_2p_3}$ sehingga *geodesic* dari u ke v adalah $u - p - v$. Oleh karena itu, $d(u, v) = 2$.

5. Jika $u \in V_{p_1}$ dan $v \in V_{p_1p_3}$ maka terdapat $p \in V_{p_2p_3}$ sehingga *geodesic* dari u ke v adalah $u - p - v$. Oleh karena itu, $d(u, v) = 2$.

6. Jika $u \in V_{p_2}$ dan $v \in V_{p_1p_2}$ maka terdapat $p \in V_{p_1p_3}$ sehingga *geodesic* dari u ke v adalah $u - p - v$. Oleh karena itu, $d(u, v) = 2$.

7. Jika $u \in V_{p_2}$ dan $v \in V_{p_2p_3}$ maka terdapat $p \in V_{p_1p_3}$ sehingga *geodesic* dari u ke v adalah $u - p - v$. Oleh karena itu, $d(u, v) = 2$.

8. Jika $u \in V_{p_3}$ dan $v \in V_{p_1p_3}$ maka terdapat $p \in V_{p_1p_2}$ sehingga *geodesic* dari u ke v adalah $u - p - v$. Oleh karena itu, $d(u, v) = 2$.

9. Jika $u \in V_{p_3}$ dan $v \in V_{p_2p_3}$ maka terdapat $p \in V_{p_1p_2}$ sehingga *geodesic* dari u ke v adalah $u - p - v$. Oleh karena itu, $d(u, v) = 2$.

Berdasarkan informasi yang telah diberikan, maka indeks Wiener dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) &= \sum_{u,v\in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}))} d(u,v) \\
&= \sum_{u,v\in V_{p_1}} d(u,v) + \sum_{u,v\in V_{p_2}} d(u,v) + \sum_{u,v\in V_{p_3}} d(u,v) + \sum_{u,v\in V_{p_1p_2}} d(u,v) + \sum_{u,v\in V_{p_1p_3}} d(u,v) + \\
&\quad \sum_{u,v\in V_{p_2p_3}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_1}\\ v\in V_{p_2}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_1}\\ v\in V_{p_3}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_1}\\ v\in V_{p_1p_2}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_1}\\ v\in V_{p_1p_3}}} d(u,v) + \\
&\quad \sum_{\substack{u\in V_{p_1}\\ v\in V_{p_2p_3}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_2}\\ v\in V_{p_3}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_2}\\ v\in V_{p_1p_2}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_2}\\ v\in V_{p_1p_3}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_2}\\ v\in V_{p_2p_3}}} d(u,v) + \\
&\quad \sum_{\substack{u\in V_{p_3}\\ v\in V_{p_1p_2}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_3}\\ v\in V_{p_1p_3}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_3}\\ v\in V_{p_2p_3}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_1p_2}\\ v\in V_{p_1p_3}}} d(u,v) + \sum_{\substack{u\in V_{p_1p_2}\\ v\in V_{p_2p_3}}} d(u,v) + \\
&\quad \sum_{\substack{u\in V_{p_1p_3}\\ v\in V_{p_2p_3}}} d(u,v) \\
&= \sum_{\substack{u\in V_{p_2p_3}\\ v\in V_{p_1}\cup V_{p_1p_2}\cup V_{p_1p_3}}} 1 + \sum_{\substack{u\in V_{p_1p_3}\\ v\in V_{p_2}\cup V_{p_1p_2}}} 1 + \sum_{\substack{u\in V_{p_1p_2}\\ v\in V_{p_3}}} 1 + \sum_{u,v\in V_{p_1}} 2 + \sum_{u,v\in V_{p_2}} 2 + \sum_{u,v\in V_{p_3}} 2 + \sum_{u,v\in V_{p_1p_2}} 2 + \\
&\quad \sum_{u,v\in V_{p_1p_3}} 2 + \sum_{u,v\in V_{p_2p_3}} 2 + \sum_{\substack{u\in V_{p_1}\\ v\in V_{p_1p_2}}} 2 + \sum_{\substack{u\in V_{p_1}\\ v\in V_{p_1p_3}}} 2 + \sum_{\substack{u\in V_{p_2}\\ v\in V_{p_1p_2}}} 2 + \sum_{\substack{u\in V_{p_2}\\ v\in V_{p_2p_3}}} 2 + \sum_{\substack{u\in V_{p_3}\\ v\in V_{p_1p_3}}} 2 + \sum_{\substack{u\in V_{p_3}\\ v\in V_{p_2p_3}}} 2 + \\
&\quad \sum_{\substack{u\in V_{p_1}\\ v\in V_{p_2}}} 3 + \sum_{\substack{u\in V_{p_1}\\ v\in V_{p_3}}} 3 + \sum_{\substack{u\in V_{p_2}\\ v\in V_{p_3}}} 3 \\
&= | V_{p_2p_3} | \cdot deg(u) + | V_{p_1p_3} | \cdot [deg(u) - | V_{p_2p_3} |] + | V_{p_1p_2} | \cdot [deg(u) - | V_{p_1p_3} | - \\
&\quad | V_{p_2p_3} |] + 2\cdot\binom{| V_{p_1} |}{2} + 2\cdot\binom{| V_{p_2} |}{2} + 2\cdot\binom{| V_{p_3} |}{2} + 2\cdot\binom{| V_{p_1p_2} |}{2} + 2\cdot\binom{| V_{p_1p_3} |}{2} + \\
&\quad 2\cdot\binom{| V_{p_2p_3} |}{2} + 2 | V_{p_1} || V_{p_1p_2} | + 2 | V_{p_1} || V_{p_1p_3} | + 2 | V_{p_2} || V_{p_1p_2} | + \\
&\quad 2 | V_{p_2} || V_{p_2p_3} | + 2 | V_{p_3} || V_{p_1p_3} | + 2 | V_{p_3} || V_{p_2p_3} | + 3 | V_{p_1} || V_{p_2} | + \\
&\quad 3 | V_{p_1} || V_{p_3} | + 3 | V_{p_2} || V_{p_3} | \\
&= (p_1 - 1)(p_2p_3 - 1) + (p_2 - 1)[p_1p_3 - 1 - (p_1 - 1)] + (p_3 - 1)[(p_1p_2 - 1) - \\
&\quad ((p_2 - 1) + (p_1 - 1))] + 2\cdot\binom{(p_2 - 1)(p_3 - 1)}{2} + 2\cdot\binom{(p_1 - 1)(p_3 - 1)}{2} + \\
&\quad 2\cdot\binom{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}{2} + 2\cdot\binom{p_2 - 1}{2} + 2\cdot\binom{p_1 - 1}{2} + 2(p_2 - 1)(p_3 - 1)\cdot(p_3 - 1) + \\
&\quad 2(p_2 - 1)(p_3 - 1)\cdot(p_2 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_3 - 1)\cdot(p_3 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_3 - 1)\cdot \\
&\quad (p_1 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdot(p_2 - 1) + 2(p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdot(p_1 - 1) + \\
&\quad 3(p_2 - 1)(p_3 - 1)\cdot(p_1 - 1)(p_3 - 1) + 3(p_2 - 1)(p_3 - 1)\cdot(p_1 - 1)(p_2 - 1) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3(p_1-1)(p_3-1)\cdot(p_1-1)(p_2-1)\\
&=(p_1-1)(p_2p_3-1)+(p_2-1)(p_1p_3-p_1)+(p_3-1)(p_1p_2-p_1-p_2+1)+\\
&2\left[\binom{(p_1-1)(p_2-1)}{2}+\binom{(p_1-1)(p_3-1)}{2}+\binom{(p_2-1)(p_3-1)}{2}+\binom{p_1-1}{2}+\right.\\
&\left.\binom{p_2-1}{2}+\binom{p_3-1}{2}\right]+2(p_2-1)(p_3-1)\cdot[(p_3-1)+(p_2-1)]+\\
&2(p_1-1)(p_3-1)\cdot[(p_3-1)+(p_1-1)]+2(p_1-1)(p_2-1)\cdot[(p_2-1)+\\
&(p_1-1)]+3(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(p_1-1+p_2-1+p_3-1)\\
W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}))=&\left[(p_1-1)(p_2p_3-1)+(p_2-1)(p_1p_3-p_1)+(p_3-1)(p_1p_2-p_1-p_2+1)\right]+\\
&2\left[\binom{(p_1-1)(p_2-1)}{2}+\binom{(p_1-1)(p_3-1)}{2}+\binom{(p_2-1)(p_3-1)}{2}+\binom{p_1-1}{2}+\right.\\
&\left.\binom{p_2-1}{2}+\binom{p_3-1}{2}\right]+2\left[(p_1-1)(p_2-1)(p_1+p_2-2)+\right.\\
&\left.(p_1-1)(p_3-1)(p_1+p_3-2)+(p_2-1)(p_3-1)(p_2+p_3-2)\right]+\\
&3(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(p_1+p_2+p_3-3)
\end{aligned}
$$

□

3.2 Indeks Zagreb Pertama

Teorema 3.5. *Indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan $p \geq 2$ adalah*

$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) = (p-1)(p-2)^2$$

Bukti. Diberikan $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ dengan himpunan titik $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) = \{p, 2p, \cdots, (p-1)p\} = \{kp\}_{k=1}^{p-1}$. Akibatnya $\mid V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) \mid = p-1$. Perhatikan bahwa, untuk setiap $u, v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}))$, $u \cdot v = 0$, sehingga u bertetangga dengan v. Oleh karena itu, derajat dari $u \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}))$ ialah

$$deg(u) = \mid V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) \mid -1 = (p-1) - 1 = p-2$$

Dengan demikian, indeks Zagreb pertama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ dihitung sebagai berikut.

$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}))} deg^2(v) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}))} (p-2)^2 = \mid V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid (p-2)^2 = (p-1)(p-2)^2$$

□

Teorema 3.6. *Indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^n}$ untuk $n \geq 3$ adalah*

$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \begin{cases} (p-1)\left[\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} p^{i-1}(p^{n-i}-2)^2 + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1} p^{i-1}(p^{n-i}-1)^2\right] & \textit{jika } n \textit{ ganjil}\\ (p-1)\left[\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} p^{i-1}(p^{n-i}-2)^2 + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1} p^{i-1}(p^{n-i}-1)^2\right] & \textit{jika } n \textit{ genap} \end{cases}$$

Bukti. Diberikan $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})$ dengan himpunan titik $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))$.
Berdasarkan penjelasan pada pembuktian Teorema 3.2., maka $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))$ juga dapat dituliskan sebagai $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$ dengan $V_i = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) \mid x$ kelipatan p^i saja$\}$. Perhatikan bahwa untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ dengan $i \neq j$ maka $V_i \cap V_j = \varnothing$.

Berikut dijabarkan kardinalitas dari V_i untuk $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$.

1. $V_{n-1} = \{p^{n-1}, 2p^{n-1}, \cdots, (p-1)p^{n-1}\} = \{kp^{n-1}\}_{k=1}^{p-1}$. $\mid V_{n-1} \mid = p-1$.

2. $V_{n-2} = \{kp^{n-2}\}_{k=1}^{p^2-1} - \{kp^{n-1}\}_{k=1}^{p-1}$. $| V_{n-2} |= (p^2 - 1) - (p - 1) = p^2 - p = p(p - 1)$.
3. $V_{n-3} = \{kp^{n-3}\}_{k=1}^{p^3-1} - \{kp^{n-2}\}_{k=1}^{p^2-1}$. $| V_{n-3} |= (p^3 - 1) - (p^2 - 1) = p^3 - p^2 = p^2(p - 1)$.

Dengan melihat pola kardinalitas $V_{n-1}, V_{n-2}, V_{n-3}$ maka diperoleh $| V_1 |= p^{n-1} - p^{n-2} = p^{n-2}(p-1)$, $| V_2 |= p^{n-2} - p^{n-3} = p^{n-3}(p - 1)$ dan $| V_3 |= p^{n-3} - p^{n-4} = p^{n-4}(p - 1)$. Begitu pula, untuk n ganjil berlaku $| V_{\frac{n+1}{2}} |= p^{\frac{n-1}{2}} - p^{\frac{n-3}{2}} = p^{\frac{n-3}{2}}(p - 1)$ dan $| V_{\frac{n-1}{2}} |= p^{\frac{n+1}{2}} - p^{\frac{n-1}{2}} = p^{\frac{n-1}{2}}(p - 1)$. Serta untuk n genap berlaku $| V_{\frac{n}{2}} |= p^{\frac{n}{2}} - p^{\frac{n}{2}-1} = p^{\frac{n}{2}-1}(p - 1)$ dan $| V_{\frac{n}{2}-1} |= p^{\frac{n}{2}+1} - p^{\frac{n}{2}} = p^{\frac{n}{2}}(p - 1)$.

Selanjutnya dihitung derajat dari setiap titik di V_i. Pertama-tama, akan dijabarkan derajat setiap titik di V_i ketika $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ bagi n ganjil dan $1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$ bagi n genap.

1. Ambil $x \in V_1$. Perhatikan x bertetangga dengan titik-titik pada himpunan V_{n-1}. Oleh karena itu, banyak tetangga dari x adalah $deg(x) =| V_{n-1} |= p - 1$.
2. Ambil $x \in V_2$. Perhatikan x bertetangga dengan titik-titik pada himpunan V_{n-1} dan V_{n-2}. Oleh karena itu, banyak tetangga dari x adalah $deg(x) =| V_{n-1} | + | V_{n-2} |= (p-1)+(p^2-p) = p^2 - 1$
3. Ambil $x \in V_3$. Perhatikan x bertetangga dengan titik-titik pada himpunan V_{n-1}, V_{n-2} dan V_{n-3}. Oleh karena itu, banyak tetangga dari x adalah $deg(x) =| V_{n-1} | + | V_{n-2} | + | V_{n-3} |= (p - 1) + (p^2 - p) + (p^3 - p^2) = p^3 - 1$.

Dengan melihat pola derajat V_1, V_2 dan V_3 maka pola yang sama berlaku hingga $V_{\frac{n-1}{2}}$ bagi n ganjil, yakni jika diambil $x \in V_{\frac{n-1}{2}}$ maka $deg(x) = p^{\frac{n-1}{2}} - 1$, dan hingga $V_{\frac{n}{2}-1}$ bagi n genap, yakni jika diambil $x \in V_{\frac{n}{2}-1}$ maka $deg(x) = p^{\frac{n}{2}-1} - 1$.

Kemudian akan dijabarkan derajat setiap titik di V_i ketika $\frac{n+1}{2} \leq i \leq n - 1$ untuk n ganjil dan $\frac{n}{2} \leq i \leq n - 1$ untuk n genap.

1. Ambil $x \in V_{n-1}$. Perhatikan x bertetangga dengan semua titik kelipatan p. Titik kelipatan p ada sebanyak $| V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) |$. Diketahui pula bahwa x juga kelipatan p, sehingga $deg(x) = (p^{n-1} - 1) - 1 = p^{n-1} - 2$.
2. Ambil $x \in V_{n-2}$. Perhatikan x bertetangga dengan titik-titik pada himpunan $V_{n-1}, V_{n-2}, \cdots, V_2$. Oleh karena itu, banyak tetangga dari x adalah $deg(x) =| V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) | - | V_1 | -1 = (p^{n-1} - 1) - (p^{n-1} - p^{n-2}) - 1 = p^{n-2} - 2$.
3. Ambil $x \in V_{n-3}$. Perhatikan x bertetangga dengan titik-titik pada himpunan $V_{n-1}, V_{n-2}, \cdots, V_3$. Oleh karena itu, banyak tetangga dari x adalah $deg(x) =| V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) | - | V_1 | - | V_2 | -1 = (p^{n-1} - 1) - (p^{n-1} - p^{n-2}) - (p^{n-2} - p^{n-3}) - 1 = p^{n-3} - 2$.

Dengan melihat pola derajat V_{n-1}, V_{n-2} dan V_{n-3} maka pola yang sama berlaku hingga $V_{\frac{n+1}{2}}$ bagi n ganjil, yakni jika diambil $x \in V_{\frac{n+1}{2}}$ maka $deg(x) = p^{\frac{n+1}{2}} - 2$, dan hingga $V_{\frac{n}{2}}$ bagi n genap, yakni jika diambil $x \in V_{\frac{n}{2}}$ maka $deg(x) = p^{\frac{n}{2}} - 2$.

Sehingga berdasarkan kondisi-kondisi tersebut, dihitung indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^n}$.

1. Untuk n ganjil.

$$\begin{aligned} M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) &= \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))} deg^2(v) \\ &= \sum_{v \in V_{n-1}} deg^2(v) + \sum_{v \in V_{n-2}} deg^2(v) + \sum_{v \in V_{n-3}} deg^2(v) + \cdots + \sum_{v \in V_{\frac{n+1}{2}}} deg^2(v) + \\ &\quad \sum_{v \in V_{\frac{n-1}{2}}} deg^2(v) + \cdots + \sum_{v \in V_3} deg^2(v) + \sum_{v \in V_2} deg^2(v) + \sum_{v \in V_1} deg^2(v) \end{aligned}$$

$$= \sum_{v \in V_{n-1}} (p^{n-1} - 2)^2 + \sum_{v \in V_{n-2}} (p^{n-2} - 2)^2 + \sum_{v \in V_{n-3}} (p^{n-3} - 2)^2 + \cdots + \sum_{v \in V_{\frac{n+1}{2}}} (p^{\frac{n+1}{2}} - 2)^2 +$$
$$\sum_{v \in V_{\frac{n-1}{2}}} (p^{\frac{n-1}{2}} - 1)^2 + \cdots + \sum_{v \in V_3} (p^3 - 1)^2 + \sum_{v \in V_2} (p^2 - 1)^2 + \sum_{v \in V_1} (p - 1)^2$$
$$= | V_{n-1} | (p^{n-1} - 2)^2 + | V_{n-2} | (p^{n-2} - 2)^2 + | V_{n-3} | (p^{n-3} - 2)^2 + \cdots +$$
$$| V_{\frac{n+1}{2}} | (p^{\frac{n+1}{2}} - 2)^2 + | V_{\frac{n-1}{2}} | (p^{\frac{n-1}{2}} - 1)^2 + \cdots + | V_3 | (p^3 - 1)^2 +$$
$$| V_2 | (p^2 - 1)^2 + | V_1 | (p - 1)^2$$
$$=(p - 1)(p^{n-1} - 2)^2 + p(p - 1)(p^{n-2} - 2)^2 + p^2(p - 1)(p^{n-3} - 2)^2 + \cdots +$$
$$p^{\frac{n-3}{2}}(p - 1)(p^{\frac{n+1}{2}} - 2)^2 + p^{\frac{n-1}{2}}(p - 1)(p^{\frac{n-1}{2}} - 1)^2 + \cdots + p^{n-4}(p - 1)(p^3 - 1)^2 +$$
$$p^{n-3}(p - 1)(p^2 - 1)^2 + p^{n-2}(p - 1)(p - 1)^2$$
$$=(p - 1)\left[\left(p^0(p^{n-1} - 2)^2 + p(p^{n-2} - 2)^2 + p^2(p^{n-3} - 2)^2 + \cdots + p^{\frac{n-3}{2}}(p^{\frac{n+1}{2}} - 2)^2\right) +\right.$$
$$\left.\left(p^{\frac{n-1}{2}}(p^{\frac{n-1}{2}} - 1)^2 + \cdots + p^{n-4}(p^3 - 1)^2 + p^{n-3}(p^2 - 1)^2 + p^{n-2}(p - 1)^2\right)\right]$$
$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) =(p - 1)\left[\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} p^{i-1}(p^{n-i} - 2)^2 + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1} p^{i-1}(p^{n-i} - 1)^2\right]$$

2. Untuk n genap.

$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n}))} deg^2(v)$$
$$= \sum_{v \in V_{n-1}} deg^2(v) + \sum_{v \in V_{n-2}} deg^2(v) + \sum_{v \in V_{n-3}} deg^2(v) + \cdots + \sum_{v \in V_{\frac{n}{2}}} deg^2(v) +$$
$$\sum_{v \in V_{\frac{n}{2}-1}} deg^2(v) + \cdots + \sum_{v \in V_3} deg^2(v) + \sum_{v \in V_2} deg^2(v) + \sum_{v \in V_1} deg^2(v)$$
$$= \sum_{v \in V_{n-1}} (p^{n-1} - 2)^2 + \sum_{v \in V_{n-2}} (p^{n-2} - 2)^2 + \sum_{v \in V_{n-3}} (p^{n-3} - 2)^2 + \cdots + \sum_{v \in V_{\frac{n}{2}}} (p^{\frac{n}{2}} - 2)^2 +$$
$$\sum_{v \in V_{\frac{n}{2}-1}} (p^{\frac{n}{2}-1} - 1)^2 + \cdots + \sum_{v \in V_3} (p^3 - 1)^2 + \sum_{v \in V_2} (p^2 - 1)^2 + \sum_{v \in V_1} (p - 1)^2$$

$$= | V_{n-1} | (p^{n-1} - 2)^2 + | V_{n-2} | (p^{n-2} - 2)^2 + | V_{n-3} | (p^{n-3} - 2)^2 + \cdots +$$
$$| V_{\frac{n}{2}} | (p^{\frac{n}{2}} - 2)^2 + | V_{\frac{n}{2}-1} | (p^{\frac{n}{2}-1} - 1)^2 + \cdots + | V_3 | (p^3 - 1)^2 + | V_2 | (p^2 - 1)^2 +$$
$$| V_1 | (p - 1)^2$$
$$=(p - 1)(p^{n-1} - 2)^2 + p(p - 1)(p^{n-2} - 2)^2 + p^2(p - 1)(p^{n-3} - 2)^2 + \cdots +$$
$$p^{\frac{n}{2}-1}(p - 1)(p^{\frac{n}{2}} - 2)^2 + p^{\frac{n}{2}}(p - 1)(p^{\frac{n}{2}-1} - 1)^2 + \cdots + p^{n-4}(p - 1)(p^3 - 1)^2 +$$
$$p^{n-3}(p - 1)(p^2 - 1)^2 + p^{n-2}(p - 1)(p - 1)^2$$
$$=(p - 1)\left[\left(p^0(p^{n-1} - 2)^2 + p(p^{n-2} - 2)^2 + p^2(p^{n-3} - 2)^2 + \cdots + p^{\frac{n}{2}-1}(p^{\frac{n}{2}} - 2)^2\right) +\right.$$
$$\left.\left(p^{\frac{n}{2}}(p^{\frac{n}{2}-1} - 1)^2 + \cdots + p^{n-4}(p^3 - 1)^2 + p^{n-3}(p^2 - 1)^2 + p^{n-2}(p - 1)^2\right)\right]$$
$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) =(p - 1)\left[\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} p^{i-1}(p^{n-i} - 2)^2 + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1} p^{i-1}(p^{n-i} - 1)^2\right]$$

$\square$

Teorema 3.7. *Indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p_1p_2}$ dengan $p_1 \neq p_2$ adalah*

$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})) = (p_1-1)(p_2-1)(p_1+p_2-2)$$

Bukti. Diberikan $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$ dengan himpunan titik $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2}))$. Berdasarkan penjelasan pembuktian Teorema 3.3., maka $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2}))$ juga dapat ditulis sebagai $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})) = \{kp_1\}_{k=1}^{p_2-1} + \{lp_2\}_{l=1}^{p_1-1} = A \cup B$. Dengan A adalah himpunan yang memuat titik-titik kelipatan p_1 di $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$ dan $\mid A \mid = p_2 - 1$ dan B adalah himpunan yang memuat titik-titik kelipatan p_2 di $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$ dan $\mid B \mid = p_1 - 1$.

Berdasarkan penjelasan pembuktian Teorema 3.3., diketahui pula setiap titik di A bertetangga dengan titik-titik di B dan oleh karena $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})) = A \cup B$, maka derajat dari titik-titik di $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$ dapat dijabarkan sebagai berikut.

1. Misal $v \in V(A)$ maka $deg(v) = \mid B \mid = p_1 - 1$.
2. Misal $v \in V(B)$ maka $deg(v) = \mid A \mid = p_2 - 1$.

Sehingga berdasarkan kondisi-kondisi tersebut, indeks Zagreb pertama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})$ ialah

$$\begin{aligned} M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})) &= \sum_{v\in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2}))} deg^2(v) \\ &= \sum_{v\in A} deg^2(v) + \sum_{v\in B} deg^2(v) \\ &= \sum_{v\in A} (\mid B \mid)^2 + \sum_{v\in B} (\mid A \mid)^2 \\ &= \mid A \mid \cdot (\mid B \mid)^2 + \mid B \mid \cdot (\mid A \mid)^2 \\ &= (p_2-1)(p_1-1)^2 + (p_1-1)(p_2-1)^2 \\ &= (p_1-1)(p_2-1)(p_1+p_2-2) \end{aligned}$$

□

Teorema 3.8. *Indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}$, dengan $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ adalah*

$$\begin{aligned} M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) = &(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(p_1+p_2+p_3-3) + (p_1-1)(p_2p_3-1)^2 + \\ &(p_2-1)(p_1p_3-1)^2 + (p_3-1)(p_1p_2-1)^2 \end{aligned}$$

Bukti. Diberikan $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})$ dengan himpunan titik $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}))$. Berdasarkan penjelasan pada pembuktian Teorema 3.4., maka $V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}))$ dapat dibagi menjadi subhimpunan berbeda yang dijabarkan sebagai berikut.

1. $V_{p_1p_2} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_1p_2 \text{ saja}\} = \{kp_1p_2\}_{k=1}^{p_3-1}$. Sehingga $\mid V_{p_1p_2} \mid = p_3 - 1$.
2. $V_{p_1p_3} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_1p_3 \text{ saja}\} = \{kp_1p_3\}_{k=1}^{p_2-1}$. Sehingga $\mid V_{p_1p_3} \mid = p_2 - 1$.
3. $V_{p_2p_3} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_2p_3 \text{ saja}\} = \{kp_2p_3\}_{k=1}^{p_1-1}$. Sehingga $\mid V_{p_2p_3} \mid = p_1 - 1$.
4. $V_{p_1} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_1 \text{ saja}\} = \{p_1\}_{k=1}^{p_2p_3-1} - \{p_1p_2\}_{k=1}^{p_3-1} - \{p_1p_3\}_{k=1}^{p_2-1}$. Sehingga $\mid V_{p_1} \mid = (p_2-1)(p_3-1)$.
5. $V_{p_2} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x \text{ titik kelipatan } p_2 \text{ saja}\} = \{p_2\}_{k=1}^{p_1p_3-1} - \{p_1p_2\}_{k=1}^{p_3-1} - \{p_2p_3\}_{k=1}^{p_1-1}$. Sehingga $\mid V_{p_2} \mid = (p_1-1)(p_3-1)$.

6. $V_{p_3} = \{x \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) \mid x$ titik kelipatan p_3 saja$\} = \{p_3\}_{k=1}^{p_1p_2-1} - \{p_1p_3\}_{k=1}^{p_2-1} - \{p_2p_3\}_{k=1}^{p_1-1}$
   Sehingga $|V_{p_3}| = (p_1-1)(p_2-1)$.

Berdasarkan penjelasan pada pembuktian Teorema 3.4., diketahui pula derajat dari titik-titik dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})$, yakni:

1. Misalkan $v \in V_{p_1}$, maka $deg(v) = p_1 - 1$.
2. Misalkan $v \in V_{p_2}$, maka $deg(v) = p_2 - 1$.
3. Misalkan $v \in V_{p_3}$, maka $deg(v) = p_3 - 1$.
4. Misalkan $v \in V_{p_1p_2}$, maka $deg(v) = p_1p_2 - 1$.
5. Misalkan $v \in V_{p_1p_3}$, maka $deg(v) = p_1p_2 - 1$.
6. Misalkan $v \in V_{p_2p_3}$, maka $deg(v) = p_2p_3 - 1$.

Sehingga berdasarkan kondisi-kondisi tersebut, dihitung indeks Zagreb pertama dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})$.

$$
\begin{aligned}
M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) &= \sum_{v\in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}))} deg^2(v)\\
&= \sum_{v\in V_{p_1}} deg^2(v) + \sum_{v\in V_{p_2}} deg^2(v) + \sum_{v\in V_{p_3}} deg^2(v) + \sum_{v\in V_{p_1p_2}} deg^2(v) + \sum_{v\in V_{p_1p_3}} deg^2(v) +\\
&\quad \sum_{v\in V_{p_2p_3}} deg^2(v)\\
&= \sum_{v\in V_{p_1}} (p_1-1)^2 + \sum_{v\in V_{p_2}} (p_2-1)^2 + \sum_{v\in V_{p_3}} (p_3-1)^2 + \sum_{v\in V_{p_1p_2}} (p_1p_2-1)^2 +\\
&\quad \sum_{v\in V_{p_1p_3}} (p_1p_3-1)^2 + \sum_{v\in V_{p_2p_3}} (p_2p_3-1)^2\\
&= |V_{p_1}|\cdot(p_1-1)^2 + |V_{p_2}|\cdot(p_2-1)^2 + |V_{p_3}|\cdot(p_3-1)^2 + |V_{p_1p_2}|\cdot(p_1p_2-1)^2 +\\
&\quad |V_{p_1p_3}|\cdot(p_1p_3-1)^2 + |V_{p_2p_3}|\cdot(p_2p_3-1)^2\\
&= (p_2-1)(p_3-1)(p_1-1)^2 + (p_1-1)(p_3-1)(p_2-1)^2 + (p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)^2 +\\
&\quad (p_3-1)(p_1p_2-1)^2 + (p_2-1)(p_1p_3-1)^2 + (p_1-1)(p_2p_3-1)^2\\
&= (p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(p_1+p_2+p_3-3) + (p_1-1)(p_2p_3-1)^2 +\\
&\quad (p_2-1)(p_1p_3-1)^2 + (p_3-1)(p_1p_2-1)^2
\end{aligned}
$$

□

4 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ialah:

1. Indeks Wiener

   a. Indeks Wiener dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan $p > 2$ adalah

$$W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) = \binom{p-1}{2}$$

b. Indeks Wiener dari graf pembagi nol Z_{p^n} untuk $n \geq 3$ adalah

$$W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \left[(p-1)(p^{n-1}-p) + \binom{p-1}{2}\right] + 2\binom{p^{n-1}-p}{2} - x$$

dengan

$$x = \begin{cases} 0 & \text{jika } n = 3 \\ \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \left((p^i - p^{i-1})(p^{n-i} - p^i) + \binom{p^i - p^{i-1}}{2}\right) & \text{jika } n \text{ ganjil dan } n > 3 \\ \sum_{i=2}^{\frac{n}{2}} \left((p^i - p^{i-1})(p^{n-i} - p^i) + \binom{p^i - p^{i-1}}{2}\right) & \text{jika } n \text{ genap dan } n > 3 \end{cases}$$

c. Indeks Wiener dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p_1p_2}$ dengan $p_1 \neq p_2$ adalah

$$W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})) = (p_1-1)(p_2-1) + 2\left[\binom{p_1-1}{2} + \binom{p_2-1}{2}\right]$$

d. Indeks Wiener dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}$ dengan $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ adalah

$$\begin{aligned} W(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) = &[(p_1-1)(p_2p_3-1) + (p_2-1)(p_1p_3-p_1) + \\ &(p_3-1)(p_1p_2-p_1-p_2+1)] + 2\left[\binom{(p_1-1)(p_2-1)}{2} + \right. \\ &\binom{(p_1-1)(p_3-1)}{2} + \binom{(p_2-1)(p_3-1)}{2} + \binom{p_1-1}{2} + \binom{p_2-1}{2} + \\ &\left.\binom{p_3-1}{2}\right] + 2\left[(p_1-1)(p_2-1)(p_1+p_2-2) + \right. \\ &\left.(p_1-1)(p_3-1)(p_1+p_3-2) + (p_2-1)(p_3-1)(p_2+p_3-2)\right] + \\ &3(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(p_1+p_2+p_3-3) \end{aligned}$$

2. Indeks Zagreb

a. Indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^2}$ dengan $p \geq 2$ adalah

$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})) = (p-1)(p-2)^2$$

b. Indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^n}$ untuk $n \geq 3$ adalah

$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^n})) = \begin{cases} (p-1)\left[\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} p^{i-1}(p^{n-i}-2)^2 + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n-1} p^{i-1}(p^{n-i}-1)^2\right] & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ (p-1)\left[\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} p^{i-1}(p^{n-i}-2)^2 + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n-1} p^{i-1}(p^{n-i}-1)^2\right] & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

c. Indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p_1p_2}$ dengan $p_1 \neq p_2$ adalah

$$M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2})) = (p_1-1)(p_2-1)(p_1+p_2-2)$$

d. Indeks Zagreb pertama dari graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3}$, dengan $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ adalah

$$\begin{aligned} M_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{p_1p_2p_3})) = &(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(p_1+p_2+p_3-3) + (p_1-1)(p_2p_3-1)^2 + \\ &(p_2-1)(p_1p_3-1)^2 + (p_3-1)(p_1p_2-1)^2 \end{aligned}$$

Daftar Pustaka

[1] E. Y. Asmarani, S. T. Lestari, D. Purnamasari, A. G. Syarifudin, S. Salwa, and I. G. A. W. Wardhana, "The first zagreb index, the wiener index, and the gutman index of the power of dihedral group," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 7, no. 4, pp. 513–520, 2023.

[2] D. F. Anderson and A. Badawi, "On the zero-divisor graph of a ring," *Communications in Algebra*, vol. 36, no. 8, pp. 3073–3092, 2008.

[3] A. G. Syarifudin, I. Muchtadi-Alamsyah, and E. Suwastika, "Topological indices and properties of the prime ideal graph of a commutative ring and its line graph," *Contemporary Mathematics*, 2024.

[4] S. Aykaç, N. Akgüneş, and A. S. Çevik, "Analysis of zagreb indices over zero-divisor graphs of commutative rings," *Asian-European Journal of Mathematics*, vol. 12, no. 06, p. 2040003, 2019.

[5] G. Semil, N. H. Sarmin, N. I. Alimon, F. Maulana, *et al.*, "The first zagreb index of the zero divisor graph for the ring of integers modulo power of primes," *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences*, vol. 19, no. 5, pp. 892–900, 2023.

[6] S. Vaidya and M. Jadeja, "21 wiener index of some zero-divisor graphs," *Recent Advancements in Graph Theory*, p. 247, 2020.

[7] P. Singh and V. K. Bhat, "Adjacency matrix and wiener index of zero divisor graph\vargamma (z_n) γ (z n)," *Journal of Applied Mathematics and Computing*, vol. 66, pp. 717–732, 2021.

[8] K. T Kavaskar, S. Balamoorthy, *et al.*, "Wiener index of an ideal-based zero-divisor graph of a finite commutative ring with unity," *Vinithkumar and Balamoorthy, S, Wiener Index of an Ideal-Based Zero-Divisor Graph of a Finite Commutative Ring with Unity*.

[9] D. Dolžan, "The wiener index and the wiener complexity of the zero-divisor graph of a finite semisimple ring," *arXiv preprint arXiv:2305.07405*, 2023.

[10] N. u. Rehman, A. S. Alali, S. A. Mir, and M. Nazim, "Analysis of the zagreb indices over the weakly zero-divisor graph of the ring z p× z t× z s," *Axioms*, vol. 12, no. 10, p. 987, 2023.

[11] G. Chartrand and P. Zhang, *A first course in graph theory*. Courier Corporation, 2013.

[12] M. Eliasi, G. Raeisi, and B. Taeri, "Wiener index of some graph operations," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 160, no. 9, pp. 1333–1344, 2012.

[13] K. Xu, "The zagreb indices of graphs with a given clique number," *Applied mathematics letters*, vol. 24, no. 6, pp. 1026–1030, 2011.