J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 08 No. 01 (2024) pp. 6-13
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN: 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

KARAKTERISTIK RING BILANGAN BULAT P-ADIC

NOVITA DAHOKLORY[1*], HENRY W. M. PATTY[2]

[1,2]Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Universitas Pattimura

ABSTRAK

Suatu bilangan bulat p −adic merupakan deret yang berbentuk $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, p^i$ dengan $0 \leq a_i \leq p - 1$. Himpunan semua bilangan bulat p −adic dinotasikan $\mathbb{Z}_p$. Salah satu sifat khusus $\mathbb{Z}_p$ adalah bahwa $(\mathbb{Z}_p, +,\cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen kesatuan. Secara khusus, dalam penelitian ini akan dibuktikan bahwa ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan daerah integral. Lebih lanjut, akan diselidiki bentuk elemen unit dan bentuk ideal di dalam ring $\mathbb{Z}_p$.
Kata Kunci: bilangan bulat p −adic, ring bilangan bulat p −adic, bilangan bulat

ABSTRACT

A p −adic integer is a formal series of $a = \sum_{i=o}^{\infty} a_i\, p^i$ *where* $0 \leq a_i \leq p - 1$ *where the set of all* p *−adic numbers is denoted as* $\mathbb{Z}_p$*. One of particular property of* $\mathbb{Z}_p$ *is* $(\mathbb{Z}_p, +,\cdot)$ *is a commutative ring with identity element. In particular, in this research, we will prove that ring* $\mathbb{Z}_p$ *is an integral domain. Furthermore, we will investigate the form of unit element and also the form of all ideals in ring* $\mathbb{Z}_p$*.*
Keywords: *p −adic integers, ring of p −adic integers, integers*

1 Pendahuluan

Struktur aljabar merupakan salah satu kajian dalam bidang aljabar yang melibatkan suatu himpunan tak kosong, operasi biner, dan sifat yang berlaku di dalamnya. Salah struktur aljabar yang sering dikaji adalah ring yang mencakup himpunan tak kosong serta dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$. Dalam penelitian ini, secara khusus akan dibahas ring bilangan bulat p-adic yang termotivasi dari sifat suatu bilangan bulat. Konsep bilangan p-adic diperkenalkan oleh Kurt Hensel pada tahun 1897 [1].

Diketahui bahwa setiap bilangan bulat positif dapat dinyatakan sebagai bilangan basis 10 yaitu $a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + \cdots + a_n 10^n$. Sebagai contoh, $2134 = 4 + 3.10 + 1.10^2 + 2.10^3$. Secara umum, setiap bilangan bulat positif dapat dinyatakan sebagai deret $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, 10^i$ dengan $0 \leq a_i \leq 10 - 1$ [2]. Hal ini memotivasi suatu bilangan dengan basis p untuk suatu bilangan prima p yang disebut bilangan bulat p-adic (p*-adic integers*) [3]. (Suatu bilangan bulat p-adic merupakan deret yang berbentuk $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, p^i$ dengan $0 \leq a_i \leq p - 1$. Himpunan semua bilangan bulat p-adic selanjutnya dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_p$.

2020 *Mathematics Subject Classification*: 11E95
Diterima: 11-04-24; direvisi: 25-04-24; diterima: 26-04-24

Selanjutnya pada himpunan $\mathbb{Z}_p$, didefinisikan operasi biner penjumlahan dan perkalian, yaitu $a + b = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, p^i \in \mathbb{Z}_p$ dan $a \cdot b = \sum_{i=o}^{\infty} d_i\, p^i \in \mathbb{Z}_p$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_p$. Himpunan $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ merupakan ring yang disebut dengan ring bilangan bulat p-adic (*ring of p-adic integers*) [3]. Secara khusus, ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan merupakan ring komutatif dengan elemen kesatuan $1 = 1 + 0p + 0p^2 + 0p^3 + \cdots$.

Dalam teori ring, dikenal beberapa ring komutatif dengan elemen kesatuan yang lebih khusus di antaranya lapangan. Dalam struktur himpunan $\mathbb{Z}_p$, diketahui bahwa $p = 0 + 1p + 0p^2 + 0p^3 + \cdots$ bukan unit yang berarti ring $\mathbb{Z}_p$ tidak memenuhi syarat sebagai lapangan. Hal ini kemudian memunculkan dua pertanyaan, yaitu (1) struktur ring khusus apa yang dipenuhi oleh ring $\mathbb{Z}_p$? (2) bagaimana bentuk elemen unit di dalam ring $\mathbb{Z}_p$?.

Dalam penelitian akan dibahas sifat-sifat ring bilangan bulat p −adic $\mathbb{Z}_p$. Selanjutnya, akan diselidiki struktur ring khusus yang dipenuhi oleh ring $\mathbb{Z}_p$. Lebih lanjut, dalam penelitian ini juga akan diselidiki sifat-sifat khusus dalam ring $\mathbb{Z}_p$ di antaranya mencakup elemen unit dan bentuk ideal di ring $\mathbb{Z}_p$.

Perlu dijelaskan dalam penelitian ini, notasi $\mathbb{Z}_p$ tidak merujuk pada ring bilangan bulat modulo p.

2 Tinjauan Pustaka

Pada bagian ini akan diberikan beberapa dasar teori yang menunjang penelitian ini yang meliputi daerah integral, daerah ideal utama, beserta sifat-sifat dasar di dalamnya.

Definisi 2.1.[4] Ring komutatif dengan elemen kesatuan R disebut daerah integral apabila R tidak memuat pembagi nol, yaitu untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $ab = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ atau $b = 0$.

Definisi 2.2.[4] Daerah integral R disebut daerah ideal utama jika setiap ideal I di R merupakan ideal utama, yakni dibangun oleh satu elemen, yaitu $I = \langle a \rangle$ untuk suatu $a \in R$.

Definisi.2.3.[4] Diberikan ring komutatif dengan elemen kesatuan R dengan $a, b \in R$.

a. Elemen a dikatakan membagi b, dinotasikan dengan $a|b$, jika $b = ca$ untuk suatu $c \in R$;
b. Elemen a disebut elemen prima jika untuk setiap $b, c \in R$ dengan sifat $a|bc$ maka berakibat $a|b$ atau $a|c$.

Definisi 2.4.[4] Ideal sejati P di ring R disebut ideal prima jika untuk setiap dua ideal A dan B di R dengan $AB \subseteq P$ berakibat $A \subseteq P$ atau $B \subseteq P$.

Definisi 2.5.[4]~~.~~ Ideal sejati M di ring R disebut ideal maksimal jika tidak ada ideal I di R sedemikian sehingga $M \subset I \subset R$.

Teorema. 2.6.[4] Misalkan R daerah integral. Elemen $a \in R$ dengan $a \neq 0$ disebut elemen prima jika dan hanya jika $\langle a \rangle$ merupakan ideal prima di R.

Teorema 2.7 [4] Jika R merupakan daerah ideal utama dan I merupakan ideal tak nol di R, maka berlaku I merupakan ideal prima jika dan hanya jika I merupakan ideal maksimal.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dijelaskan ring bilangan bulat p-adic namun sebelumnya diberikan terlebih dahulu konsep bilangan bulat p-adic.

Definisi 3.1.[3] Diberikan bilangan prima p. Suatu bilangan bulat p −adic merupakan deret yang berbentuk

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, p^i$$

dengan $0 \le a_i \le p - 1$. Secara khusus, dua bilangan p −adic $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, p^i$ dan $b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, p^i$ dikatakan sama, yaitu $a = b$ jika $a_i = b_i$ untuk setiap $i = 0,1,2, \ldots.$

Contoh 3.2. Diberikan bilangan prima $p = 3$. Deret $x = 2 + 2.3 + 2.3^2 + \cdots$ dan $y = 1 + 0.3 + 0.3^2 + \cdots$ merupakan bilangan bulat 3 −adic.

Himpunan semua bilangan bulat p −adic dinotasikan sebagai $\mathbb{Z}_p$ yaitu

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, p^i | 0 \le a_i \le p - 1 \right\}.$$

Selanjutnya didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_p$ sebagai

$$+ : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$$

dan

$$\cdot : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$$

yaitu $a + b = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, p^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, p^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, p^i$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_p$ yakni

$$c_i = \begin{cases} a_i + b_i \, mod\, p, & 0 \le a_{i-1} + b_{i-1} \le p - 1 \\ (1 + (a_i + b_i \, mod\, p)) mod\, p, & a_{i-1} + b_{i-1} \ge p \end{cases}$$

dengan $c_0 = a_0 + b_0 \, mod\, p$. Untuk $a \cdot b = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, p^i \sum_{i=0}^{\infty} b_i\, p^i$ yaitu

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\, p^i.$$

Selanjutnya, diberikan contoh penjumlahan dan perkalian dua bilangan p-adic sebagai berikut.

Contoh 3.3. Diberikan $p = 3$ dengan $x = 2 + 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + \cdots$ dan $y = 2 + 1.3 + 1.3^2 + 1.3^3 + \cdots$. Diperoleh

$$\begin{aligned} x + y &= (2 + 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + \cdots) + (2 + 1.3 + 1.3^2 + 1.3^3 + \cdots) \\ &= 4 + 3.3 + 3.3^2 + 3.3^3 + \cdots \\ &= 1 + (1 + 0\, mod\, 3).3 + (1 + 0\, mod\, 3).3^2 + (1 + 0\, mod\, 3).3^3 + \cdots \\ &= 1 + 1.3 + 1.3^2 + 1.3^3 + 1.3^4 + \cdots \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (2 + 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + \cdots) \cdot (2 + 1.3 + 1.3^2 + 1.3^3 + \cdots) \\ &= (2.2) + (2.1 + 2.2).3 + (2.1 + 2.1 + 2.2).3^2 + (2.1 + 2.1 + 2.1 + 2.2).3^3 + \cdots \\ &= 4 + 6.3 + 8.3^2 + 10.3^3 + \cdots \\ &= 1 + 1.3 + 1.3^2 + 1.3^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ merupakan ring.

Teorema 3.4. [3] Himpunan $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen kesatuan.
BUKTI. Dengan menggunakan sifat penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{Z}$, didapatkan

1. $(\mathbb{Z}_p, +)$ asosiatif dan komutatif serta memiliki elemen netral, yaitu $0 = 0 + 0p + 0p^2 + 0p^3 + \cdots$
2. $(\mathbb{Z}_p, \cdot)$ asosiatif dan komutatif dan memiliki elemen kesatuan, yaitu $1 = 1 + 0p + 0p^2 + 0p^3 + \cdots$
3. $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ distributif kanan dan kiri.

Oleh karena itu, hanya perlu ditunjukkan setiap elemen pada $\mathbb{Z}_p$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan.
Diambil sebarang $a = a_0 + a_1 p + a_2\, p^2 + a_3 p^3 + \cdots \in \mathbb{Z}_p$. Selanjutnya dibentuk suatu bilangan p-adic yaitu $b = \sum_{i=o}^{\infty} (p - 1 - a_i)\, p^i$ dan $1 = 1 + 0.p + 0.p^2 + 0.p^3 + \cdots$. Diperoleh,

$$\begin{aligned} a + b + 1 &= (a_0 + a_1 p + a_2\, p^2 + a_3 p^3 + \cdots) + ((p - 1 - a_0) + (p - 1 - a_1)p + \\ &\quad ((p - 1 - a_2)\, p^2 + (p - 1 - a_3)p^3 + \cdots) + 1 + 0.p + 0.p^2 + 0.p^3 + \cdots \\ &= 0 + 0.p + 0.p^2 + 0.p^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Artinya, $b + 1$ merupakan invers dari a terhadap operasi penjumlahan. Dengan demikian, didapatkan $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ merupakan ring komutatif dengan elemen kesatuan.

Diketahui bahwa setiap bilangan bulat positif $a \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan berhingga $a = a_0 + a_1 p + a_2\, p^2 + \cdots + a_n p^n$. Dengan kata lain, setiap bilangan bulat positif merupakan bilangan bulat p −adic. Selanjutnya akan diberikan sifat terkait hubungan antara ring $\mathbb{Z}_p$ dan $\mathbb{Z}$ dalam Lema 3.5.

Lema 3.5.[3] Ring $\mathbb{Z}$ dapat disisipkan pada ring bilangan bulat p-adic $\mathbb{Z}_p$.
BUKTI. Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_p$. Dalam hal ini akan ditunjukkan bahwa terdapat monomorfisma ring dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}_p$. Diambil sebarang $a \in \mathbb{Z}$ dengan $a \geq 0$ dengan $a = a_0 + a_1 p + a_2\, p^2 a_2\, p^2 + \cdots + a_n p^n$. Dibentuk fungsi

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_p \\ a &\mapsto a = a_0 + a_1 p + a_2\, p^2 + \cdots + a_n p^n \\ -a &\mapsto 1 + \sum_{i=0}^{\infty} (p - 1 - a_i)\, p^i \end{aligned}$$

dengan $1 = 1 + 0.p + 0.p^2 + 0.p^3 + \cdots$. Jelas bahwa φ merupakan homomorfisma dengan menggunakan sifat penjumlahan dan perkalian pada ring $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_p$. Oleh karena itu hanya perlu ditunjukkan φ merupakan fungsi injektif. Diambil sebarang $x \in ker(\varphi)$, yaitu $\varphi(x) = 0 + 0.p + 0.p^2 + 0.p^3 + \cdots$. Jadi, $x = 0$ yang berarti $ker(\varphi) = 0$. Dengan menggunakan sifat homomorfisma ring, dapat disimpulkan bahwa φ merupakan monomorfisma.

Ring $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ kemudian disebut sebagai ring bilangan bulat p-adic. Selanjutnya akan diberikan contoh bentuk elemen di $\mathbb{Z}_p$ yang merupakan unit maupun bukan elemen unit.

Contoh 3.6. Diberikan ring bilangan bulat 3-adic $\mathbb{Z}_3$.

(1) Bilangan 3-adic $a = 2$ merupakan unit dengan $a^{-1} = (2 + 1.3 + 1.3^2 + 1.3^3 + \cdots)$ yaitu

$$\begin{aligned} 2(2 + 1.3 + 1.3^2 + 1.3^3 + \cdots) &= 4 + 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + \cdots \\ &= 1 + 1.3 + 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 + \cdots \\ &= 1 + 0.3 + 1.3^2 + 2.3^2 + 2.3^3 + \cdots \\ &= 1 + 0.3 + 0.3^2 + 1.3^3 + 2.3^3 + \cdots \\ &= 1 + 0.3 + 0.3^2 + 0.3^3 + \cdots. \end{aligned}$$

(2) Bilangan 3-adic $3 = 0 + 1.3 + 0.3^2 + 0.3^3 + \cdots$ bukan elemen unit. Diambil sebarang bilangan 3-adic $d = d_0 + d_1.3 + d_2.3^2 + d_3.3^3 + \cdots \in \mathbb{Z}_3$, diperoleh $3d = d_0.3 + d_1.3^2 + d_2.3^3 + d_3.3^4 + \cdots$ sehingga $3d \neq 1$. Dengan kata lain, 3 bukan unit di $\mathbb{Z}_p$.

Berdasarkan contoh di atas, diketahui bahwa tidak semua elemen tak nol di $\mathbb{Z}_p$ merupakan unit. Selanjutnya, akan diberikan sifat terkait bentuk elemen unit dalam ring $\mathbb{Z}_p$ pada Lema 3.7.

Lema 3.7.[5] Suatu bilangan p-adic $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ merupakan unit jika dan hanya jika $a_0 \neq 0$.
BUKTI. Diberikan bilangan p-adic $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$.
($\Rightarrow$) Diketahui a merupakan unit di $\mathbb{Z}_p$. Akan ditunjukkan bahwa $a_0 \neq 0$. Dibentuk suatu fungsi

$$\varphi: \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

dengan $\varphi(a) = a_0 \, mod \, p$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_p$. Perhatikan bahwa

$$\varphi(a+b) = (a_0 + b_0) \, mod \, p$$

dan

$$\varphi(ab) = a_0 b_0 \, mod \, p$$

sehingga berlaku φ merupakan homomorfisma ring. Perhatikan juga bahwa $\varphi(1) = \varphi(1 + 0p + 0p^2 + 0p^3 + \cdots) = 1 \, mod \, p$. Akibatnya berlaku $\varphi(a) = a_0 \, mod \, p$ merupakan unit di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dengan kata lain, $a_0 \neq 0$.
($\Leftarrow$) Diketahui $a_0 \neq 0$. Akan dibuktikan bahwa $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ merupakan unit. Diperhatikan bahwa $a_0 \neq 0$ sehingga terdapat b_0 sedemikan sehingga $a_0 b_0 \equiv 1 \, mod \, p$ yang berarti $a_0 b_0 = 1 + np$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Dengan kata lain, $a_0 = {b_0}^{-1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Perhatikan juga bahwa

$$a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots = a_0 + p\delta$$

dengan $\delta = a_1 + a_2 p + a_3 p^2 + \cdots$. Jadi,

$$ab_0 = (a_0 + p\delta) b_0 = a_0 b_0 + b_0 \delta p = 1 + np + b_0 \delta p = 1 + tp$$

Untuk suatu $t = n + b_0 \delta \in \mathbb{Z}_p$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $1 + tp$ merupakan unit di $\mathbb{Z}_p$. Dibentuk bilangan p-adic $\eta = 1 - tp + (tp)^2 - (tp)^3 + (tp)^4 - \cdots)$ sehingga diperoleh

$$(1 + tp)\eta = 1.$$

Hal ini berarti $1 + tp$ merupakan unit di $\mathbb{Z}_p$. Akibanya, $ab_0(1 + tp)^{-1} = 1$ sehingga $a^{-1} = b_0(1 + tp)^{-1}$. Dengan kata lain, $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ merupakan unit.

Teorema 3.8. Diberikan ring $\mathbb{Z}_p$. Bilangan p-adic $p = 0 + 1p + 0p^2 + 0p^3 + \cdots$ merupakan elemen prima di $\mathbb{Z}_p$.
BUKTI. Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}_p$ dengan $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots$ dan $b = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \cdots$ dan sedemikian sehingga $p|ab$. Diperhatikan bahwa $ab = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)p + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) p^2 + \cdots$ yang berarti $p|a_0 b_0$. Karena $0 \leq a_0 \leq p - 1$ dan $0 \leq b_0 \leq p - 1$, diperoleh $a_0 = 0$ atau $b_0 = 0$. Jadi, $a = a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots$ atau $b = b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \cdots$. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $p|a$ atau $p|b$. Dengan kata lain, p merupakan elemen prima di $\mathbb{Z}_p$.

Teorema 3.9 [6] Setiap bilangan bulat p-adic $0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_p$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $\alpha = p^n \gamma$ untuk suatu $n \in \{0,1,2, \ldots\}$ dan γ suatu unit di $\mathbb{Z}_p$.
BUKTI. Diambil sebarang $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ dengan $\alpha = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \cdots$. Misalkan n merupakan indeks terkecil sedemikian sehingga $a_n \neq 0$. Jadi, $\alpha = a_n p^n + a_{n+1} p^{n+1} + a_{n+2} p^{n+2} \ldots = p^n (a_n + a_{n+1} p + a_{n+2} p^2 + \cdots)$. Diperhatikan bahwa $a_n \neq 0$, sehingga berdasarkan **Lema 3.7.**, diperoleh $\gamma = a_n + a_{n+1} p + a_{n+2} p^2 + \cdots$ merupakan unit.

Selanjutnya akan ditunjukkan ketunggalan $\alpha = p^n \gamma$. Misalkan

$$\alpha = p^n(a_n + a_{n+1}p + a_{n+2}p^2 + \cdots)$$

dan

$$\alpha = p^m(a'_m + a'_{m+1}p + a'_{m+2}p^2 + \cdots)$$

Berdasarkan definisi kesamaan dua bilangan bulat p-adic, didapatkan $m = n$ dan $a_i = a'_i$ untuk setiap i.

Akibat 3.10. Ring bilangan bulat p-adic $\mathbb{Z}_p$ merupakan daerah integral.
BUKTI. Diketahui bahwa $\mathbb{Z}_p$ merupakan ring komutatif dengan elemen kesatuan. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_p$ merupakan daerah integral, yaitu untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ dengan $\alpha \neq 0$ dan $\beta \neq 0$ berlaku $\alpha\beta \neq 0$. Berdasarkan **Teorema 3.9.**, diperoleh $\alpha = p^n(a_n + a_{n+1}p + a_{n+2}p^2 + \cdots)$ dan $\beta = p^m(a'_m + a'_{m+1}p + a'_{m+2}p^2 + \cdots)$ dengan $a_n, a'_m \neq 0$. Oleh karena itu, didapatkan $\alpha\beta = p^{m+n}(c_{m+n} + c_{m+n+1}p + \cdots)$ dengan $c_{m+n} = a_n a'_m \neq 0$. Hal ini mengakibatkan, $\alpha\beta \neq 0$. Terbukti, $\mathbb{Z}_p$ merupakan daerah integral.

Diketahui bahwa setiap bilangan bulat p-adic $0 \neq \alpha = a_n + a_{n+1}p + a_{n+2}p^2 + \cdots \in \mathbb{Z}_p$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $\alpha = p^n\gamma$ dengan n merupakan indeks terkecil sedemikian sehingga $a_n \neq 0$. Hal ini kemudian memunculkan pendefinisian suatu fungsi, yaitu

$$\vartheta_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}$$

dengan

$$\vartheta_p(\alpha) = \begin{cases} n, & \text{jika } \alpha = p^n\gamma \\ \infty, & \text{jika } \alpha = 0 \end{cases}$$

Fungsi tersebut kemudian memotivasi definisi order p-adic dari suatu $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ yang diberikan pada definisi di bawah ini.

Definisi 3.11. Diberikan suatu bilangan bulat p-adic $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Order p-adic dari α merupakan $\vartheta_p(\alpha) = n$ dengan $\alpha = p^n\gamma$.

Contoh 3.12. Untuk bilangan 5-adic $7 = 1 + 2.5 + 0.5^2 + \cdots$, didapatkan $\vartheta_5(7) = 0$.

Selanjutnya akan beberapa sifat yang berlaku pada order p-adic dari suatu $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ disajikan pada Lema berikut.

Lema 3.13.[7] Diberikan bilangan bulat p-adic $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$. Berlaku

(1) $\vartheta_p(\alpha\beta) = \vartheta_p(\alpha) + \vartheta_p(\beta)$;
(2) $\vartheta_p(\alpha + \beta) \geq \min\{\vartheta_p(\alpha), \vartheta_p(\beta)\}$.

Bukti. Diketahui p prima. Diambil sebarang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Misalkan $\vartheta_p(\alpha) = m, \vartheta_p(\beta) = n$ dan $\vartheta_p(\alpha\beta) = q$. Artinya, $\alpha = p^m\gamma$ dan $\beta = p^n\delta$ untuk suatu unit $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_p$.

(1) Diperhatikan bahwa $\alpha = p^m\gamma = p^m(a_m + a_{m+1}p + a_{m+2}p^2 + \cdots)$ dan $\beta = p^n(a'_n + a'_{n+1}p + a'_{n+2}p^2 + \cdots)$ dengan $a_m, a'_n \neq 0$. Oleh karena itu, didapatkan $\alpha\beta = p^{m+n}(c_{m+n} + c_{m+n+1}p + \cdots)$ yang berarti $c_{m+n} = a_m a'_n$ dengan $c_{m+n} \neq 0$. Akibatnya, menurut **Lema 3.7**., berlaku $c_{m+n} + c_{m+n+1}p + \cdots$ merupakan unit di $\mathbb{Z}_p$. Berdasarkan **Teorema 3.9.**, diperoleh ketunggalan $\alpha\beta = p^{m+n}(c_{m+n} + c_{m+n+1}p + \cdots)$ sehingga berlaku $\vartheta_p(\alpha\beta) = m + n = \vartheta_p(\alpha) + \vartheta_p(\beta)$.

(2) Misalkan $\min\{\vartheta_p(\alpha), \vartheta_p(\beta)\} = \vartheta_p(\alpha) = m$ yang berarti $n = m + r$ untuk suatu $r \geq 0$. Jadi,
$$\alpha + \beta = p^m\gamma + p^n\delta = p^m(\gamma + p^r\delta).$$
Akibatnya, $\vartheta_p(\alpha + \beta) \geq m = \min\{\vartheta_p(\alpha), \vartheta_p(\beta)\}$.

Proposisi 3.14. [5] Diberikan bilangan bulat p-adic $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$. $\alpha|\beta$ jika dan hanya jika $\vartheta_p(\alpha) \leq \vartheta_p(\beta)$.
BUKTI. Diketahui $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$. Misalkan $\vartheta_p(\alpha) = m$ dan $\vartheta_p(\beta) = n$.
($\Rightarrow$) Diketahui $\alpha|\beta$ yang berarti $\beta = \alpha\gamma$. Berdasarkan **Lema 3.13.**, diperoleh $\vartheta_p(\beta) = \vartheta_p(\alpha\gamma) = \vartheta_p(\alpha) + \vartheta_p(\gamma)$. Oleh karena itu, didapatkan $\vartheta_p(\alpha) \leq \vartheta_p(\beta)$.
($\Leftarrow$) Misalkan $\vartheta_p(\alpha) \leq \vartheta_p(\beta)$, yaitu $m \leq n$. Artinya, $\alpha = p^m\gamma$ dan $\beta = p^n\delta$ untuk suatu unit $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_p$. Jadi, $\beta = p^m\gamma p^{n-m}\delta\gamma^{-1} = \alpha\eta$ dengan $\eta = p^{n-m}\delta\gamma^{-1}$. Dengan kata lain, $\alpha|\beta$.

Proposisi 3.15. Ring bilangan bulat p-adic $\mathbb{Z}_p$ merupakan daerah ideal utama.
BUKTI. Diketahui ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan daerah integral. Akan ditunjukkan ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan daerah ideal utama. Diambil sebarang ideal I di ring $\mathbb{Z}_p$. Misalkan $n = \min\{\vartheta_p(\alpha) | \alpha \in I\}$. Akan ditunjukkan bahwa $I = \langle p^n \rangle$.
Pertama-tama, akan dibuktikan terlebih dahulu $\langle p^n \rangle \subseteq I$. Diperhatikan bahwa $n = \min\{\vartheta_p(\alpha) | \alpha \in I\}$ sehingga terdapat $\alpha \in I$ sedemikian sehingga $\vartheta_p(\alpha) = n$ yang berarti $\alpha = p^n\gamma$ untuk suatu unit $\gamma \in \mathbb{Z}_p$. Didapatkan, $p^n = \alpha\gamma^{-1} \in I$. Akibatnya $\langle p^n \rangle \subseteq I$.
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $I \subseteq \langle p^n \rangle$. Diambil sebarang $\beta \in I$ dengan $\vartheta_p(\beta) = s$ sehingga berlaku $s \geq n$. Jadi, $\beta = p^n(p^{s-n}\gamma) \in \langle p^n \rangle$. Dapat disimpulkan bahwa $I = \langle p^n \rangle$. Dengan kata lain, ring $\mathbb{Z}_p$ merupakan ideal utama.

Akibat 3.16. Diberikan ring bilangan bulat p-adic $\mathbb{Z}_p$ dengan $I \subseteq \mathbb{Z}_p$. Jika I merupakan ideal maksimal di $\mathbb{Z}_p$, maka $I = \langle p \rangle$.
BUKTI. Diketahui bahwa $\mathbb{Z}_p$ merupakan daerah ideal utama. Diambil sebarang I ideal di $\mathbb{Z}_p$. Berdasarkan **Proposisi 3.15**, diketahui bahwa untuk $I = \langle p^n \rangle$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$.

i. Untuk $n = 1$. Dengan memanfaatkan **Teorema 2.6**, **Teorema 2.7**, dan **Teorema 3.8**, didapatkan $I = \langle p \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{Z}_p$.
ii. Untuk $n \neq 1$. Ideal $I = \langle p^n \rangle$ bukan merupakan ideal maksimal karena terdapat ideal sejati $\langle p \rangle$ sedemikan sehingga $\langle p^n \rangle \subset \langle p \rangle \subset \mathbb{Z}_p$.

Dari (i) dan (ii) diperoleh ideal maksimal di $\mathbb{Z}_p$ adalah $I = \langle p \rangle$.

Kesimpulan

Adapun kesimpulan dalam penelitian ini meliputi:

1. Ring bilangan bulat p −adic $\mathbb{Z}_p$ merupakan daerah integral.
2. Suatu bilangan bulat p −adic $a = \sum_{i=o}^{\infty} a_i\, p^i$ merupakan unit jika dan hanya jika $a_0 \neq 0$.
3. Setiap ideal dalam ring $\mathbb{Z}_p$ berbentuk $I =< p^n >$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$.
4. Ring $\mathbb{Z}_p$ memiliki satu ideal maksimal yaitu $I =< p >$.

Daftar Pustaka

[1] K. Hensel, “Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen,” *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, vol. 6, pp. 83–88, 1897.

[2] F. Q. Gouvêa, *p-adic Numbers: An Introduction*, 3rd ed. Springer Nature, 2020.

[3] A. M. Robert, *A course in p-adic analysis*, vol. 198. Springer Science and Business Media, 2013.

[4] S. Wahyuni, I. E. Wijayanti, D. A. Yuwaningsih, and A. D. Hartanto, *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press, 2016.

[5] Y. Bilu, G. Chicas Reyes, P. Gatti, R. Gualdi, and J. Ibrahim Villanueva Gutiérrez, “p-adic numbers and Diophantine equations,” 2013. [Online]. Available: https://cadadr.org/

[6] L. Nguyen, “The p-Adic Numbers,” 2014.

[7] A. Pomerantz, “An introduction to the p-adic number.” [Online]. Available: http://math.uchicago.edu/ ˜may/REU2020/REUPapers/Pomerantz.pdf.