J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 08 No. 01 (2024) pp. 1-5
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN: 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

EKSPLORASI SIFAT-SIFAT KEORTOGONALAN BIRKHOFF-JAMES DALAM KONTEKS RUANG HASIL KALI DALAM

DINA NABILA[1], SISILIA SYLVIANI[2*], ANITA TRISKA[3]

Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran

*penulis korespondensi: sisilia.sylviani@unpad.ac.id

ABSTRAK

Dalam teori ruang hasil kali dalam, dua buah vector dikatakan orthogonal jika hasil kali dalam keduanya sama dengan nol. Dalam perjalananya, konsep keortogonalan yang biasa diketahui tersebut mengalami perkembangan, salah satunya adalah yang disebut dengan Keortogonalan Birkhoff-James. Ide dasar dari konsep keortogonalan Birkhoff-James adalah untuk mendefinisikan konsep ortogonalitas antara dua elemen dalam ruang norma. Penelitian ini mengangkat sifat-sifat keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasil kali dalam dan karakterisasi pemetaan linear yang mempertahankan keortogonalan tersebut. Hasil yang diperoleh sifat-sifat keortogonalan Birkhoff_James seperti non-degenerasi, simplifikasi, homogenitas, simetri, aditivitas kanan, dan aditivitas kiri.

Kata Kunci: ruang hasilkali dalam, ruang bernorma, keortogonalan Birkhoff-James

ABSTRACT

In inner product space theory, two vectors are said to be orthogonal if their inner product is equal to zero. Along the way, the commonly known concept of orthogonality has developed, one of which is called the Birkhoff-James orthogonality. The basic idea of the Birkhoff-James orthogonality concept is to define the concept of orthogonality between two elements in a norm space. This research explores the properties of Birkhoff-James orthogonality in inner product spaces and characterizes linear mapping that maintains this orthogonality. The results obtained are Birkhoff-James orthogonality properties such as non-degeneracy, simplification, homogeneity, symmetry, right additivity and left additivity.
Keywords:* *inner product space, normed space, Birkhoff-James orthogonality

1 Pendahuluan

Dalam ruang hasilkali dalam dimungkinkan untuk mengetahui besarnya sudut yang dibentuk oleh dua vektor. Dalam ruang ini, dua buah vektor dikatakan tegak lurus atau ortogonal ketika hasilkali dalamnya nol. Di sisi lain agar konsep keortogonalan dapat digunakan di ruang bernorma dan tidak hanya di ruang hasilkali dalam, beberapa peneliti telah mengembangkan beberapa jenis keortogonalan lainnya. Jenis-jenis keortogonalan yang merupakan hasil dari pengembangan tersebut di antaranya ialah keortogonalan Pythagoras ([1]), keortogonalan sama kaki ([1]), keortogonalan Birkhoff-James ([2]), keortogonalan Roberts ([3]), dan keortogonalan Bisectrix ([4]).

2020 *Mathematics Subject Classification*: 46C99
Diterima: 10-11-23; diterima: 24-04-24

Dua buah vektor pada ruang hasilkali dalam dikatakan ortogonal jika sudut yang terbentuk antara kedua vektor tersebut adalah 90° atau jika perkalian titik antara kedua vektor tersebut sama dengan nol ([5]). Adapun yang dimaksud sebagai keortogonalan Birkhoff-James adalah ketika norma dari sebuah vektor tidak pernah lebih besar dari norma penjumlahan antara vektor tersebut dengan hasil perkalian skalar vektor yang ortogonal dengan vektor yang bersangkutan ([2]). Sama seperti jenis keortogonalan yang lain, keortogonalan Birkhoff-James diperkenalkan dengan tujuan melemahkan definisi keortogonalan standar pada ruang hasilkali dalam agar kemudian dapat diterapkan pada ruang yang lebih umum seperti ruang bernorma. Selain itu, keortogonalan Birkhoff-James juga memainkan peran penting dalam geometri dari pemetaan di ruang Hilbert ([6]).

Setiap ruang hasilkali dalam merupakan ruang bernorma ([7]). Oleh sebab itu, meskipun secara khusus diperkenalkan untuk ruang bernorma, keortogonalan Birkhoff-James tetap berlaku pada ruang hasilkali dalam karena ekuivalen dengan keortogonalan pada ruang tersebut. Berdasarkan paparan di atas, pembahasan dalam artikel ini berfokus pada eksplorasi konsep keortogonalan Birkhoff-James dan sifat-sifat yang berlakudi dalamnya, dalam lingkup ruang hasilkali dalam.

2 Tinjauan Pustaka

Untuk melakukan tinjauan terkait sifat-sifat keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasilkali dalam diperlukan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan. Berikut adalah beberapa definisi dan teorema yang terkait.

Definisi 1 ([5]). *Misalkan K adalah suatu ruang hasilkali dalam, $\boldsymbol{p}$ dan $\boldsymbol{q}$ adalah vektor-vektor di K. Maka $\boldsymbol{p}$ dikatakan ortogonal terhadap $\boldsymbol{q}$ (dituliskan dengan $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{q}$) jika $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \rangle = 0$.*

Definisi 2 ([8]) *Misalkan K adalah suatu ruang hasilkali dalam, norma atau panjang $\mathbf{p} \in K$ didefinisikan dengan $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}$.*

Identitas Polarisasi ([9]) *Pada ruang hasilkali dalam real K, berlaku identitas polarisasi sebagai berikut:*

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2) \tag{1}$$

untuk setiap $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K$.

Definisi 3 ([2]). *Misalkan K adalah suatu ruang hasilkali dalam, $\mathbf{p}$ dan $\mathbf{q}$ adalah vektor-vektor di K. Vektor $\mathbf{p}$ dikatakan ortogonal Birkhoff-James dengan vektor $\mathbf{q}$ (dituliskan dengan $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$) jika $\|\mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{p} + h\mathbf{q}\|$ untuk setiap bilangan skalar real h.*

Teorema 1 ([10]). *Misalkan K adalah ruang hasilkali dalam. Untuk setiap $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K$, pernyataan $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$ ekuivalen dengan pernyataan $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$.*

BUKTI. Akan dibuktikan $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$ ekuivalen dengan pernyataan $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$. Untuk membuktikannya, harus ditunjukkan bahwa pembuktian dari kanan ke kiri dan kiri ke kanan berlaku untuk dua pernyataan tersebut. Untuk pembuktian dari kiri ke kanan, dengan menggunakan sifat-sifat ruang hasilkali dalam identitas polarisasi seperti pada persamaan (1), untuk setiap $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K \ni \mathbf{p} \perp \mathbf{q}$, $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$ terpenuhi jika dipunyai asumsi $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$. Selanjutnya untuk pembuktian dari kanan ke kiri, jika dipunyai asumsi $\mathbf{p}$ tidak ortogonal dengan $\mathbf{q}$ dan $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$, maka implikasi $\mathbf{p} \perp \mathbf{q} \Rightarrow$

$\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$ terpenuhi berdasarkan metode pembuktian kontradiksi, karena $\exists \mathbf{p} = (1,1), \mathbf{q} = (0,1) \in \mathbb{R}^2$, dan $h = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ yang menyebabkan asumsi tersebut tidak terpenuhi. □

3 Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan Teorema 1, keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasilkali dalam ekuivalen dengan keortogonalan seperti pada Definisi 1. Oleh sebab itu, sifat-sifat yang berlaku pada keortogonalan standar juga berlaku untuk keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasilkali dalam. Adapun beberapa sifat yang berlaku di antaranya ialah non-degenerasi, simplifikasi, homogen, simetri, aditif-kanan, dan aditif-kiri seperti yang diberikan pada Sifat 1 sampai Sifat 6 berikut:

Sifat 1. *Misalkan K adalah ruang hasilkali dalam atas lapangan real. Untuk setiap $\mathbf{p} \in K$ dan bilangan skalar real η, ζ berlaku sifat non-degenerasi dari keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasilkali dalam, yaitu $\eta\mathbf{p} \perp_B \zeta\mathbf{p}$ jika dan hanya jika $\|\eta\zeta\mathbf{p}\| = 0$.*

BUKTI. Misalkan K ruang hasilkali dalam. Misalkan pula $\mathbf{p} \in K$. Akan dibuktikan $\eta\mathbf{p} \perp_B \zeta\mathbf{p}$ jika dan hanya jika $\|\eta\zeta\mathbf{p}\| = 0, \forall \mathbf{p} \in K$ dan $\eta, \zeta \in \mathbb{R}$.
[⇒] Asumsikan berlaku $\eta\mathbf{p} \perp_B \zeta\mathbf{p}$, yang artinya berdasarkan Definisi 3 dapat ditulis $\|\eta\mathbf{p}\| \leq \|\eta\mathbf{p} + h\zeta\mathbf{p}\| \ \forall h, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$, tetapi $\|\eta\zeta\mathbf{p}\| \neq 0$. Akan diperiksa asumsi terpenuhi. Pilih $\mathbf{p} = (0,1) \in \mathbb{R}^2, h = -\frac{1}{2} \ni \ \|\eta\zeta\mathbf{p}\| = 1 \neq 0$. Tetapi di sisi lain dipunyai $\|\eta\mathbf{p}\| = \sqrt{1} > \sqrt{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \|\eta\mathbf{p} + h\zeta\mathbf{p}\|$, sehingga terjadi kontradiksi. Akibatnya implikasi jika $\eta\mathbf{p} \perp_B \zeta\mathbf{p}$, maka $\|\eta\zeta\mathbf{p}\| = 0, \forall \mathbf{p} \in K$ dan $\eta, \zeta \in \mathbb{R}$ harus benar.

[⇐] Asumsikan berlaku $\|\eta\zeta\mathbf{p}\| = 0$, tetapi $\eta\mathbf{p} \perp_B \zeta\mathbf{p}$ tidak berlaku, yang artinya berdasarkan Definisi 3 dapat ditulis $\exists \boldsymbol{p} \in K$ dan $h, \eta, \zeta \in \mathbb{R} \ni \|\eta\mathbf{p}\| > \|\eta\mathbf{p} + h\zeta\mathbf{p}\|$. Akan diperiksa asumsi terpenuhi. Pilih $\mathbf{p} = (0,1) \in \mathbb{R}^2, h = -\frac{1}{2} \ni \|\eta\mathbf{p}\| = \sqrt{1} > \sqrt{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \|\eta\mathbf{p} + h\zeta\mathbf{p}\|$. Tetapi di sisi lain dipunyai $\|\eta\zeta\mathbf{p}\| = 1 \neq 0$, sehingga terjadi kontradiksi. Akibatnya implikasi jika $\|\eta\zeta\mathbf{p}\| = 0$, maka $\eta\mathbf{p} \perp_B \zeta\mathbf{p}, \forall \mathbf{p} \in K$ dan $\eta, \zeta \in \mathbb{R}$ harus benar. □

Sifat 2. *Misalkan K adalah ruang hasilkali dalam atas lapangan real. Untuk setiap vektor $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K$ dan bilangan skalar real η berlaku sifat simplifikasi dari keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasilkali dalam, yaitu jika $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$, maka $\eta\mathbf{p} \perp_B \eta\mathbf{q}$.*

BUKTI. Misalkan K ruang hasilkali dalam. Misalkan pula $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K$ dan berlaku $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$, yang artinya berdasarkan Definisi 3 dapat ditulis $\|\mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{p} + h\mathbf{q}\|, \forall h \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan $\eta\mathbf{p} \perp_B \eta\mathbf{q}$, artinya akan ditunjukkan $\forall h, \eta \in \mathbb{R}$ berlaku $\|\eta\mathbf{p}\| \leq \|\eta\mathbf{p} + \eta h\mathbf{q}\|$. Ambil sembarang $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathrm{K} \ni \mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$, sehingga dipunyai $\|\eta\mathbf{p}\| = |\eta|\|\mathbf{p}\| \leq |\eta|\|\mathbf{p} + h\mathbf{q}\| = \|\eta\mathbf{p} + \eta h\mathbf{q}\|$. □

Sifat 3. *Misalkan K adalah ruang hasilkali dalam atas lapangan real. Untuk setiap vektor $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K$ dan bilangan skalar real η, ζ berlaku sifat homogen dari keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasilkali dalam, yaitu jika $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$, maka $\eta\mathbf{p} \perp_B \zeta\mathbf{q}$.*

BUKTI. Misalkan K ruang hasilkali dalam. Misalkan pula $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K$ dan berlaku $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$, yang artinya berdasarkan Definisi 3 dapat ditulis $\|\mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{p} + h\mathbf{q}\|, \forall h \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan $\eta\mathbf{p} \perp_B \zeta\mathbf{q}$, artinya akan ditunjukkan $\forall h, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$ berlaku $\|\eta\mathbf{p}\| \leq \|\eta\mathbf{p} + h\zeta\mathbf{q}\|$. Ambil sembarang $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathrm{K} \ni \mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$, sehingga dipunyai $\|\eta\mathbf{p}\| = |\eta|\|\mathbf{p}\| \leq |\eta|\|\mathbf{p} + h\mathbf{q}\| = \|\eta\mathbf{p} + \eta h\mathbf{q}\| = \|\eta\mathbf{p} + h\eta\zeta\zeta^{-1}\mathbf{q}\| = \|\eta\mathbf{p} + h\eta\zeta^{-1}\zeta\mathbf{q}\| = \|\eta\mathbf{p} + h\zeta\mathbf{q}\|$. □

Sifat 4. *Misalkan K adalah ruang hasilkali dalam atas lapangan real. Untuk setiap vektor $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K$ berlaku sifat simetri dari keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasilkali dalam, yaitu jika $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$, maka $\mathbf{q} \perp_B \mathbf{p}$.*

BUKTI. Misalkan K ruang hasilkali dalam. Misalkan pula $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in K$. Asumsikan berlaku $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$, yang artinya berdasarkan Definisi 3 dapat ditulis $\|\mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{p} + h\mathbf{q}\|, \forall h \in \mathbb{R}$ tetapi $\mathbf{q} \perp_B \mathbf{p}$ tidak berlaku, yang artinya $\exists \mathbf{p}, \boldsymbol{q} \in K, h \in \mathbb{R} \ni \|\mathbf{q}\| > \|\mathbf{q} + h\mathbf{p}\|$. Akan diperiksa asumsi terpenuhi. Pilih $\mathbf{p} = (0,1), \mathbf{q} = (1,1) \in \mathbb{R}^2, h = -\frac{1}{2} \ni \|\mathbf{q}\| = \sqrt{2} > \sqrt{2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \|\mathbf{q} + h\mathbf{p}\|$. Tetapi di sisi lain dipunyai $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{1} > \sqrt{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \|\mathbf{p} + h\mathbf{q}\|$, sehingga terjadi kontradiksi. Akibatnya Sifat 4 harus benar. □

Sifat 5. *Misalkan K adalah ruang hasilkali dalam atas lapangan real. Untuk setiap vektor $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in K$ berlaku sifat aditif-kanan dari keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasilkali dalam, yaitu jika $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$* dan *$\mathbf{p} \perp_B \mathbf{r}$, maka $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q} + \mathbf{r}$.*

BUKTI. Misalkan K ruang hasilkali dalam. Misalkan pula $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in K$. Asumsikan berlaku $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q}$ dan $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{r}$, yang artinya berdasarkan Definisi 3 dapat ditulis $\|\mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{p} + h\mathbf{q}\|$ dan $\|\mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{p} + h\mathbf{r}\|$, $\forall h \in \mathbb{R}$ tetapi $\mathbf{p} \perp_B \mathbf{q} + \mathbf{r}$ tidak berlaku, yang artinya $\exists \mathbf{p}, \boldsymbol{q}, \mathbf{r} \in K, h \in \mathbb{R} \ni \|\mathbf{p}\| > \|\mathbf{p} + h(\mathbf{q} + \mathbf{r})\|$. Akan diperiksa asumsi terpenuhi. Pilih $\mathbf{p} = (1,0), \mathbf{q} = (1,1), \mathbf{r} = (0,1) \in \mathbb{R}^2, h = -\frac{1}{5} \ni \|\mathbf{p}\| = \sqrt{1} > \sqrt{1 + 2\left(-\frac{1}{5}\right) + 5\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \|\mathbf{p} + h(\mathbf{q} + \mathbf{r})\|$. Tetapi di sisi lain dipunyai $\|\mathbf{p}\| = \sqrt{1} > \sqrt{1 + 2\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \|\mathbf{p} + h\mathbf{q}\|$, sehingga terjadi kontradiksi. Akibatnya Sifat 5 harus benar. □

Sifat 6. *Misalkan K adalah ruang hasilkali dalam atas lapangan real. Untuk setiap vektor $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in K$, berlaku sifat aditif-kiri dari keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasilkali dalam, yaitu jika $\mathbf{q} \perp_B \mathbf{p}$* dan *$\mathbf{r} \perp_B \mathbf{p}$,* maka *$\mathbf{q} + \mathbf{r} \perp_B \mathbf{p}$.*

BUKTI. Misalkan K ruang hasilkali dalam. Misalkan pula $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in K$. Asumsikan berlaku $\mathbf{q} \perp_B \mathbf{p}$ dan $\mathbf{r} \perp_B \mathbf{p}$, yang artinya berdasarkan Definisi 3 dapat ditulis $\|\mathbf{q}\| \leq \|\mathbf{q} + h\mathbf{p}\|$ dan $\|\mathbf{r}\| \leq \|\mathbf{r} + h\mathbf{p}\|$, $\forall h \in \mathbb{R}$ tetapi $\mathbf{q} + \mathbf{r} \perp_B \mathbf{p}$ tidak berlaku, yang artinya $\exists \mathbf{p}, \boldsymbol{q}, \mathbf{r} \in K, h \in \mathbb{R} \ni \|\mathbf{q} + \mathbf{r}\| > \|\mathbf{q} + \mathbf{r} + h\mathbf{p}\|$. Akan diperiksa asumsi terpenuhi. Pilih $\mathbf{p} = (1,0), \mathbf{q} = (1,1), \mathbf{r} = (0,1) \in \mathbb{R}^2, h = -\frac{1}{5} \ni \|\mathbf{q} + \mathbf{r}\| = \sqrt{5} > \sqrt{5 + 2\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \|\mathbf{q} + \mathbf{r} + h\mathbf{p}\|$. Tetapi di sisi lain dipunyai $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{2} > \sqrt{2 + 2\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \|\mathbf{q} + h\mathbf{p}\|$, sehingga terjadi kontradiksi. Akibatnya Sifat 6 harus benar. □

4 Kesimpulan

Telah diuraikan bahwa sifat-sifat yang berlaku pada keortogonalan standar, seperti non-degenerasi, simplifikasi, homogen, simetri, aditif-kanan, dan aditif-kiri, semuanya berlaku untuk keortogonalan Birkhoff-James di ruang hasil kali dalam. Namun demikian, keberlakuan sifat-sifat tersebut untuk ruang selain hasil kali dalam masih perlu dilakukan investigas lebih lanjut.

5 Ucapan Terima Kasih

Artikel ini ditulis berdasarkan hasil penelitian dalam skema Hibah Riset Unpad Riset Persepatan Lektor Kepala dengan Nomor Kontrak “1549/UN6.3.1/PT.00/2023 Tanggal 27 Maret 2023.

Daftar Pustaka

[1] Ojha, B.P., dan Bajrayacharya, P.M. (2019) ‘Relation of Pythagorean and Isosceles Orthogonality with Best approximations in Normed Linear Space’, *Mathematics Education Forum Chitwan 4*, pp. 72–78. https://doi.org/10.3126/mefc.v4i4.26360

[2] Grover, P., dan Singla, S. (2021). Birkhoff–James orthogonality and applications: a survey. Operator Theory, Functional Analysis and Applications: 293-315. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51945-2_15

[3] Arambašic, L., Rajic, R. (2018) ‘On Birkhoff - James and Roberts orthogonality’, *Special Matrices 6*, pp. 229–236. https://doi.org/10.1515/spma-2018-0018.

[4] Zamani, A. (2015) ‘Approximately bisectrix-Orthogonality preserving mappings’, Ferdowsi University of Mashhad. https://doi.org/10.14708/cm.v54i2.699

[5] Anton, H., Rorres, C., dan Kaul, A. (2019) Elementary Linear Algebra, 12th ed. New York: Wiley.

[6] Bhattacharyya, T., dan Grover, P. "*Characterization of Birkhoff–James orthogonality*." Journal of Mathematical Analysis and Applications 407.2 (2013): 350-358.

[7] Mikusinski, P., Debnath, L. (2005). Hilbert spaces with applications. Boston: Elsevier Science.

[8] Roman, S. (2007) *Advanced Linear Algebra*, *Graduate Texts in Mathematics*. New York: Springer.

[9] Kreyszig, E. (1991). Introductory functional analysis with applications (Vol. 17). John Wiley & Sons.

[10] Paul, K., Sain, D., dan Mal, A. (2018). Approximate Birkhoff–James orthogonality in the space of bounded linear operators. Linear Algebra and its Applications, 537, 348-357. https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.10.008

[11] Alonso, J., Martini, H., & Wu, S. (2012). On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces. *Aequationes mathematicae*, *83*(1-2), 153-189. https://doi.org/10.1007/s00010-011-0092-z

[12] Barile, M. "Characterization." From MathWorld--A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. Tersedia di https://mathworld.wolfram.com/Characterization.html (Diakses 14 Juli 2023).

[13] Pugh, C.C. (2015) *Real Mathematical Analysis*. Cham: Springer International Publishing.

[14] Syafnuri, R.A., Netriwati, Pratiwi, D.D. (2019) *Modul Transformasi Linear dengan Model Pembelajaean Knisley*. Bandar Lampung.