J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 07 No. 02 (2023) pp. 138-147
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN: 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

INDEKS HYPER-WIENER DAN INDEKS PADMAKAR-IVAN DARI GRAF KOPRIMA DARI GRUP DIHEDRAL

BELA ZAINUN YATIN[1], MARENA RAHAYU GAYATRI[1], I GEDE ADHITYA WISNU WARDHANA[1*], BAIQ DESY ANISKA PRAYANTI[2]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Mataram, Jl Majapahit no 62, Mataram, Indonesia ,
[2]Program Studi Matematika, Fakultas Teknik, Universitas Bangka Belitung, Jl Kampus Terpadu Balunijuk, Kab Bangka, Indonesia.

*Corresponding email: adhitya.wardhana@unram.ac.id

ABSTRAK

Indeks Padmakar-Ivan dan indeks Hyper-Wiener memiliki aplikasi penting dalam kimia, membantu dalam pemahaman ikatan kimia, kerapatan elektron, stabilitas senyawa, dan potensi reaktivitasnya, membuka pintu untuk analisis yang lebih canggih dan relevan dalam penelitian kimia. Graf Koprima didefinisikan ketetanggan simpul yang bergantung pada orde dari masing-masing simpul. Tujuan studi ini adalah mendapatkan rumus umum untuk perhitungan indeks topologi dari graf koprima untuk grup dihedral, hal ini diharapkan bisa menjadi pandangan baru dalam mengkaitkan antara ikatan kimia dan aspek teoritisnya. Hasil yang didapatkan pada studi ini diantaranya adalah rumus umum indeks Hyper-Wiener dan indeks Padmakar-Ivan.
Kata Kunci: Graf Koprima, Grup Dihedral, Indeks Hyper Wiener, Indeks Padmakar-Ivan.

ABSTRACT

The Padmakar-Ivan index and the Hyper-Wiener index have significant applications in chemistry, aiding in the understanding of chemical bonds, electron density, compound stability, and reactivity potential, opening doors for more advanced and relevant chemical research analysis. Coprime graphs are defined by the adjacency of vertices depending on the order of each vertice. In this study, formulas for calculating the Hyper-Wiener index and the Padmakar-Ivan index of co-prime graphs for dihedral groups were obtained, with the hope that this could provide new insights into linking chemical bonding with theoretical aspects.
Keywords: *Coprime Graph; Dihedral Group; Hyper Wiener Index, Padmakar-Ivan Index*

1 Pendahuluan

Dalam beberapa tahun terakhir, studi terkait teori graf dalam menggambarkan struktur aljabar seperti grup telah menjadi fokus penelitian yang semakin intensif [1]. Penelitian-penelitian ini berkaitan dengan konstruksi dan sifat-sifat graf yang mendasari struktur grup matematika. Salah satu area penelitian yang menarik adalah studi tentang graf koprima dan graf non-koprima [2]. Graf koprima adalah graf yang memiliki sifat unik terkait dengan bilangan prima, sementara graf non-koprima adalah graf yang kontrastnya menarik untuk dijelajahi [3].

2020 *Mathematics Subject Classification*: 05C09
Tanggal dikirim: 14-09-23; direvisi: 11-10-23; diterima: 16-10-23

Selain itu, para peneliti juga telah menginvestigasi konsep graf pangkat, yang melibatkan penggandaan atau pemangkatan graf dalam beberapa iterasi [4]–[6]. Graf pangkat ini memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, termasuk jaringan sosial dan analisis data. Selain itu, graf irisan juga menjadi topik penelitian yang populer. Graf irisan melibatkan identifikasi simpul-simpul yang sama di antara dua atau lebih graf, dan pemahaman lebih lanjut tentang konsep ini dapat memberikan wawasan berharga dalam pemodelan berbagai fenomena [7]. Selain representasi graf pada grup, banyak studi terkait representasi graf pada gelanggang, diantaranya adalah graf pembagi nol, praf prima dan graf nilpoten [8]–[10].

Terakhir, para peneliti juga telah mengeksplorasi indeks topologi dari graf-graf tersebut. Indeks topologi adalah metrik yang digunakan untuk mengukur karakteristik graf, seperti jarak, kerapatan, atau sifat-sifat khusus lainnya. Penelitian ini bertujuan untuk mengungkapkan hubungan antara struktur matematika dalam graf dengan indeks topologinya. Beberapa indeks topologi yang popular adalah indeks Gutman, indeks Harmonic [11], indeks Zagreb, dan indeks Wiener [12].

Aplikasi indeks Padmakar-Ivan dan Hyper-Winner dalam kimia telah membuka pintu untuk analisis yang lebih canggih dan relevan dalam bidang ilmu ini. Indeks Padmakar-Ivan digunakan untuk mengukur kerapatan elektron dalam molekul dan struktur kimia kompleks, membantu dalam pemahaman ikatan kimia dan sifat elektronik suatu senyawa. Di sisi lain, indeks Hyper-Winner digunakan untuk memahami stabilitas senyawa kimia dan dapat memberikan wawasan tentang potensi reaktivitasnya. Dengan menerapkan kedua indeks ini, peneliti kimia dapat mengoptimalkan rancangan molekul baru, menganalisis sifat-sifat reaktif, dan bahkan memprediksi perilaku senyawa dalam berbagai kondisi. Dengan demikian, indeks Padmakar-Ivan dan Hyper-Winner menjadi alat yang sangat berharga dalam upaya pemahaman lebih mendalam tentang struktur dan sifat kimia [13]. Hal ini yang mendasari penulis dalam mencari rumus umum untuk Indeks Padmakar-Ivan dan Hyper-Winner dari graf koprima untuk grup dihedral. Hasil ini diharapkan dapat memberikan pandangan baru dalam menghubungkan antara ikatan kimia dan aspek teoretisnya.

2 Metode

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah bukti deduktif yang membuat dugaan berdasarkan sifat dan kemudian membuktikan mereka dengan bukti yang kuat. Langkah pertama adalah mempelajari definisi dan teori tentang graf koprima, grup dihedral, serta indeks topologi yang digunakan yaitu indeks Hyper-Wiener, dan indeks Padmakar-Ivan, kemudian mencari pola dari indeks yang akan diteliti.

3 Hasil dan Pembahasan

Grup Dihedral adalah kelompok simetri yang terdiri dari rotasi dan refleksi dalam matematika, digunakan dalam berbagai konteks seperti geometri, fisika, dan kriptografi. Definisi dari Grup Dihedral diberikan sebagai kelompok simetri yang terdiri dari semua transformasi isometri yang mempertahankan bentuk dan ukuran suatu poligon.

Definisi 3.1 [14] Grup G,, disebut grup dihedral dengan orde $2n, n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$ adalah grup yang dibangun oleh $a, b \in G$dengan :

$$G = \langle a,\, b | a^n = e,\, b^2 = e,\, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

Grup dihedral dengan orde grup dihedral dengan orde $2n$ dinotasikan dengan D_{2n}. Graf koprima dari suatu grup sebarang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.2 [15] Graf koprima adalah graf berhingga yang dinotasikan dengan Γ_G adalah graf dengan simpul adalah elemen G dan dua simpul yang berbeda x dan y bertetangga jika dan hanya jika $(ord(x), ord(y)) = 1$.

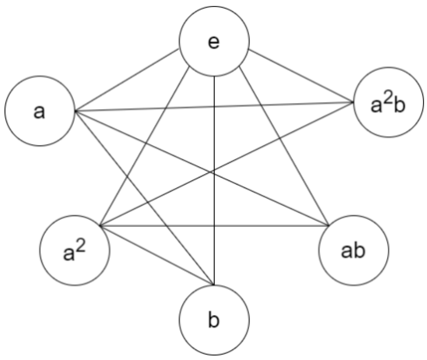
Contohnya apabila diberikan grup $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$, maka didapatkan orde masing-masing anggota grup adalah $ord(0) = 1, ord(1) = 6, ord(2) = 3, ord(3) = 2, ord(4) = 3$ dan $ord(5) = 6$. Sehingga simpul 0 akan bertetangga denga semua simpul lain karena orde yang saling relatif prima. Selain itu terdapat dua sisi lain, yakni yang menghubungkan 2 dan 3 dan 3 dan 4.

Graf koprima dari Grup Dihedral diformulasikan dengan mempertimbangkan simpul-simpul yang memiliki derajat relatif prima satu sama lain. Konsep derajat dan simpul adalah kunci dalam pemahaman struktur ini, derajat dan simpul dari graf koprima atas grup dihedral dirumuskan pada teorema berikut:

Teorema 3.1 [16] Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral dimana $n \geq 3$. jika n adalah bilangan prima ganjil, maka derajat simpul dari graf koprima dari D_{2n} adalah :

a. $\deg_{D_{2n}}(a^i) = n + 1, \forall\, i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n$
b. $\deg_{D_{2n}}(a^i b) = n, \forall\, i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n$
c. $\deg_{D_{2n}}(e) = 2n - 1$

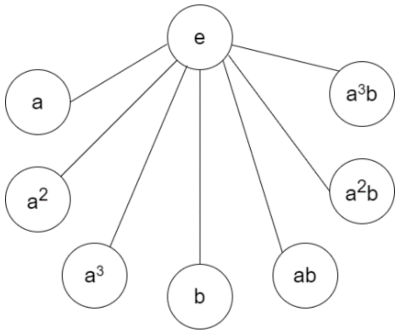
Sebagai contoh dari graf koprima untuk grup dihedral D_{2n} dengan $n = 3$ ini adalah graf tripartit lengkap, yakni graf yang simpulnya dapat dipartisi menjadi tiga subhimpunan partisi dan setiap dua unsrur dari partisi berbeda pasti bertetangga dan tidak ada dua unsur dari satu partisi sama yang bertetangga.



Gambar 1. graf koprima dari grup dihedral dengan n=3

Untuk kasus yang lebih umum, dimana n merupakan perpangkatan dua, didapatkan hasil sebagai berikut.

Teorema 3.2 [17] Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral dengan $n \geq 3$. jika $n = 2^k$, $k \in N$, maka graf koprima yang terbentuk dari grup dihedral D_{2n} ini adalah graf bipartit lengkap.



Gambar 2. graf koprima dari grup dihedral dengan n= 2^2

Penelitian ini difokuskan pada penelitian yang membahas indeks Hyper-WIener dan indeks Padmakar Ivan. Berikut diberikan definisi – definisinya :

Definisi 3.3 [18] Indeks *Hyper-Wiener* dari graf G yang dinotasikan dengan $WW(G)$, didefinisikan sebagai berikut

$$WW(G) = \frac{1}{2}\left(\sum_{u,v\in V(G)} d(u,v) + d^2(u,v)\right)$$

dengan $d(u,v)$ jarak dari simpul u ke v. [4]

Contoh 1 Misalkan Γ_{D_6} dengan n = 3 merupakan graf koprima dari D_6 dengan $D_6 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. Berdasarkan Teorema 1, graf yang terbentuk adalah graf tripartit lengkap. Akibatnya, derajat simpul e adalah 5. Selanjutnya, jika diperhatikan, derajat simpul dari unsur rotasi dan refleksi secara berturut–turut adalah 4 dan 3. Oleh karena itu, indeks Hyper-wiener dari Γ_{D_6} adalah sebagai berikut.

$$WW(G) = \frac{1}{2}\left(\sum_{u,v\in V(G)} d(u,v) + d^2(u,v)\right)$$

$$\begin{aligned} WW(G) = \frac{1}{2}\ (& [d(e,a) + d^2(e,a)] + [d(e,a^2) + d^2(e,a^2)] + [d(e,b) + d^2(e,b)] \\ & + [d(e,ab) + d^2(e,ab)] + [d(e,a^2b) + d^2(e,a^2b)] + [d(a,a^2) \\ & + d^2(a,a^2)] + [d(a,b) + d^2(a,b)] + [d(a,ab) + d^2(a,ab) + [d(a,a^2b) \\ & + d^2(a,a^2b)] + [d(a^2,b) + d^2(a^2,b)] + [d(a^2,ab) + d^2(a^2,ab)] \\ & + [d(a^2,a^2b) + d^2(a^2,a^2b)] + [d(b,ab) + d^2(b,ab)] + [d(b,a^2b) \\ & + d^2(b,a^2b)] + [d(ab,a^2b) + d^2(ab,a^2b)] +) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}([1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [2+2^2] + [1+1^2] \\ &\qquad + [1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [2+2^2] \\ &\qquad + [2+2^2] + [2+2^2]) \\ &= \frac{1}{2}(2+2+2+2+2+6+2+2+2+2+2+2+6+6+6) \\ &= \frac{1}{2}(46) \\ &= 23 \end{aligned}$$

Contoh di atas menginspirasi untuk memperoleh sifat yang lebih umum, hasil ini dituangkan pada Teorema 3 sebagai berikut.

Teorema 3.3 Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p$ dengan p adalah bilangan prima ganjil, maka indeks *Hyper-Wiener* dari graf koprima dari grup dihedral adalah

$$WW(G) = n^2 - 5n + 2$$

BUKTI. Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Ambil $n = p$ dengan p adalah bilangan prima ganjil. Diperoleh graf koprima dengan 3 partisi yakni $v_1 = \{e\}$, $v_2 = \{a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, dan $v_3 = \{b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$. Berdasarkan Teorema 1, diperoleh $\deg(v_1) = 2n - 1$, $\deg(v_2) = n + 1$, dan $\deg(v_3) = n$, sehingga indeks *Hyper-Wiener* dari graf koprima dari grup dihedral untuk $n = p$ sebagai berikut

$$WW(G) = \frac{1}{2}\left(\sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) + d^2(u,v)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg[\left(\sum_{v_1,v_2 \in V(G)} d(v_1,v_2) + d^2(v_1,v_2)\right) + \left(\sum_{v_1,v_3 \in V(G)} d(v_1,v_3) + d^2(v_1,v_3)\right) + \left(\sum_{v_2,v_3 \in V(G)} d(v_2,v_3) + d^2(v_2,v_3)\right) + \left(\sum_{v_2,v_2 \in V(G)} d(v_2,v_2) + d^2(v_2,v_2)\right) + \left(\sum_{v_3,v_3 \in V(G)} d(v_3,v_3) + d^2(v_3,v_3)\right)\Bigg]$$

Karena berdasarkan definisi grup dihedral dan Teorema 1, maka diperoleh:
jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_2) = n - 1$,
jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_3) = n$,
jumlah pasangan simpul pada $V(v_2, v_3) = n(n - 1)$,
jumlah pasangan simpul pada $V(v_2, v_2) = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$
jumlah pasangan simpul pada $V(v_3, v_3) = \frac{1}{2}n(n - 1)$,
sehingga,

$$\begin{aligned} WW(\Gamma_{D_{2n}}) &= \frac{1}{2}[(2(n-1)) + (2(n)) + ((n^2 - n)2) \\ &\quad + ([(n^2 - 2n) - (2 + 3 + \dots + (n-1)]6) \\ &\quad + ([(n^2 - n) - (1 + 2 + \dots + (n-1)]6] \\ &= \frac{1}{2}[(2n^2 - 2n - 2) + (\tfrac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)6) + (\tfrac{1}{2}n(n-1)6)] \\ &= \frac{1}{2}[(2n^2 - 2n - 2) + (3n^2 - 6n + 6) + (3n^2 - 3n)] \\ &= \frac{1}{2}(8n^2 - 10n + 4) \\ &= n^2 - 5n + 2 \end{aligned}$$

Contoh 2 Misalkan Γ_{D_6} dengan n = 4 merupakan graf koprima dari D_8 dengan $D_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Berdasarkan Teorema 2, graf yang terbentuk adalah graf bipartit lengkap. Akibatnya, derajat simpul e adalah 7. Selanjutnya, jika diperhatikan, derajat simpul dari unsur rotasi dan refleksi sama yaitu 1. Oleh karena itu, indeks Hyper-wiener dari Γ_{D_8} adalah sebagai berikut.

$$WW(G) = \frac{1}{2}\left(\sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) + d^2(u,v)\right)$$

$$\begin{aligned} WW(G) = \frac{1}{2}\ (&[d(e,a) + d^2(e,a)] + [d(e,a^2) + d^2(e,a^2)] + [d(e,a^3) + d^2(e,a^3)] \\ &+ [d(e,b) + d^2(e,b)] + [d(e,ab) + d^2(e,ab)] + [d(e,a^2b) + d^2(e,a^3b)] \\ &+ [d(e,a^3b) + d^2(e,a^3b)] + [d(a,a^2) + d^2(a,a^2)] + [d(a,a^3) \\ &+ d^2(a,a^3)] + [d(a,b) + d^2(a,b)] + [d(a,ab) + d^2(a,ab)] + [d(a,a^2b) \\ &+ d^2(a,a^2b)] + [d(a,a^3b) + d^2(a,a^3b)] + [d(a^2,a^3) + d^2(a^2,a^3)] \\ &+ [d(a^2,b) + d^2(a^2,b)] + [d(a^2,ab) + d^2(a^2,ab)] + [d(a^2,a^2b) \\ &+ d^2(a^2,a^2b)] + [d(a^2,a^3b) + d^2(a^2,a^3b)] + [d(a^3,b) + d^2(a^3,b)] \\ &+ [d(a^3,ab) + d^2(a^3,ab)] + [d(a^3,a^2b) + d^2(a^3,a^2b)] + [d(a^3,a^3b) \\ &+ d^2(a^3,a^3b)] + [d(b,ab) + d^2(b,ab)] + [d(b,a^2b) + d^2(b,a^2b)] \\ &+ [d(b,a^3b) + d^2(b,a^3b)] + [d(ab,a^2b) + d^2(ab,a^2b)] + [d(ab,a^3b) \\ &+ d^2(ab,a^3b)] + [d(a^2b,a^3b) + d^2(a^2b,a^3b)]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2}(&[1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [1+1^2] + [2 \\ &+ 2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] \\ &+ [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2 \\ &+ 2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] + [2+2^2] \\ &+ [2+2^2]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(2+2+2+2+2+2+2+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6 \\ &\qquad +6+6+6+6+6+6+6+6+6) \\ &= \frac{1}{2}(140) \\ &= 70 \end{aligned}$$

Contoh di atas menginspirasi untuk memperoleh sifat yang lebih umum, hasil ini dituangkan pada Teorema 4 sebagai berikut.

Teorema 3.4 Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks *Hyper-Wiener* dari graf koprima dari grup dihedral adalah

$$WW(G) = 6n^2 - 7n + 2$$

BUKTI. Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika 2^k untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Diperoleh graf koprima dengan 2 partisi yakni $v_1 = \{e\}$, $v_2 = \{a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$. Berdasarkan Teorema 2, diperoleh $\deg(v_1) = 2n - 1$, $\deg(v_2) = 1$, sehingga indeks *Hyper-Wiener* dari graf koprima dari grup dihedral untuk $n = 2^k$ sebagai berikut

$$WW(G) = \frac{1}{2}\left(\sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) + d^2(u,v)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{v_1,v_2 \in V(G)} d(v_1,v_2) + d^2(v_1,v_2)\right) + \left(\sum_{v_2,v_2 \in V(G)} d(v_2,v_2) + d^2(v_2,v_2)\right)\right]$$

Karena berdasarkan definisi grup dihedral, maka diperoleh:
jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_2) = 2n - 1$,
jumlah pasangan simpul pada $V(v_2, v_2)$ =$2n^2 - 3n + 1$,
sehingga,

$$\begin{aligned} WW(\Gamma_{D_{2n}}) &= \frac{1}{2}[(2(n-1))2) + ([(2n^2 - 2n) - (2+3+\ldots+(2n-1)]6)] \\ &= \frac{1}{2}[(2(n-1)2 + (2n^2 - 3n + 1)6] \\ &= \frac{1}{2}[(4n-2) + (12n^2 - 18n + 6)] \\ &= \frac{1}{2}(12n^2 - 14n + 4) \\ &= 6n^2 - 7n + 2 \end{aligned}$$

Definisi 3.4 [19] Indeks Padmakar-Ivan yang dinotasikan dengan $PI(G)$ merupakan graf didefinisikan sebagai berikut

$$PI(G) = \sum_{e=u,v\in E(G)} ((n_u(e) + n_v(e))$$

Dengan $n_u(e)$ adalah semua simpul yang jaraknya dengan simpul u kurang dari simpul v dan Dengan $n_v(e)$ merupakan semua simpul yang jaraknya dengan simpul v kurang dari simpul u.

Contoh 3 Misalkan Γ_{D_6} dengan n = 3 merupakan graf koprima dari D_6 dengan $D_6 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$. Berdasarkan Teorema 1, graf yang terbentuk adalah graf tripartit lengkap. Akibatnya, derajat simpul e adalah 5. Selanjutnya, jika diperhatikan, derajat simpul dari unsur rotasi dan refleksi secara berturut–turut adalah 4 dan 3. Oleh karena itu, indeks Padmakar-Ivan dari Γ_{D_6} adalah sebagai berikut.

$$PI(G) = \sum_{e=u,v\in E(G)} ((n_u(e) + n_v(e))$$

$$\begin{aligned} PI(G) = [&(n_e(e) + n_a(e)) + (n_e(e) + n_{a^2}(e)) + (n_e(e) + n_b(e)) + (n_e(e) + n_{ab}(e)) \\ &+ (n_e(e) + n_{a^2b}(e)) + (n_a(e) + n_b(e)) + (n_a(e) + n_{ab}(e)) + (n_{a^2}(e) \\ &+ n_b(e)) + (n_{a^2}(e) + n_{ab}(e)) + (n_{a^2}(e) + n_{a^2b}(e))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [(1+0) + (1+0) + (2+0) + (2+0) + (2+0) + (1+2) + (1+2) + (1 \\ &\quad + 2) + (1+2) + (1+2) + (1+2)] \end{aligned}$$

$$= (1+1+2+2+2+3+3+3+3+3+3)$$

$$= 26$$

Contoh di atas menginspirasi untuk memperoleh sifat yang lebih umum, hasil ini dituangkan pada Teorema 5 sebagai berikut.

Teorema 3.5 Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika $n = p$, dengan p adalah bilangan prima ganjil, maka indeks Padmakar-Ivan dari graf koprima dari grup dihedral adalah

$$PI(G) = 2n^3 - 3n^2 - n + 2$$

BUKTI. Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika $= p$, dengan p adalah bilangan prima ganjil. Diperoleh graf koprima dengan 3 partisi yakni $v_1 = \{e\}, v_2 = \{a, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$ dan $v_3 == \{b, ab, a^2b, \ldots, a^{n-1}b\}$. Berdasarkan Teorema 1, diperoleh $\deg(v_1) = 2n - 1$, $\deg(v_2) = n + 1$, dan $\deg(v_3) = n$, sehingga indeks Padmakar – Ivan dari graf koprima dari grup dihedral untuk $n = p$ dengan p adalah bilangan prima, $p \neq 2$ sebagai berikut

$$PI(G) = \sum_{e=u,v\in E(G)} ((n_u(e) + n_v(e))$$

$$PI(G) = \left(\sum_{e=v_1,v_2\in E(G)} ((n_{v_1}(e) + n_{v_2}(e)) \right) + \left(\sum_{e=v_1,v_3\in E(G)} ((n_{v_1}(e) + n_{v_3}(e)) \right) + \left(\sum_{e=v_2,v_3\in E(G)} ((n_{v_2}(e) + n_{v_3}(e)) \right)$$

Karena berdasarkan definisi grup dihedral dan Teorema 1, maka diperoleh:
jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_2) = n - 1$,
jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_3) = n$,
jumlah pasangan simpul pada $V(v_2, v_3) = n(n - 1)$,
sehingga,

$$PI(G) = [(n-2)(n-1)] + [n(n-1)] + ((n-1) + (n-2))n(n-1)]$$
$$PI(G) = (n^2 - 3n + 2) + (n^2 - n) + [(2n-3)(n^2 - n)]$$
$$PI(G) = (n^2 - 3n + 2) + (n^2 - n) + (2n^3 - 5n^2 + 3n)$$
$$PI(G) = (n^2 - 3n + 2) + (n^2 - n) + (2n^3 - 5n^2 + 3n)$$
$$PI(G) = 2n^3 - 3n^2 - n + 2$$

Contoh 4 Misalkan Γ_{D_6} dengan n = 4 merupakan graf koprima dari D_8 dengan $D_8 = \{e, a, a^2, a^3,\ b, ab, a^2b, a^3b\}$. Berdasarkan Teorema 2, graf yang terbentuk adalah graf bipartit lengkap. Akibatnya, derajat simpul e adalah 7. Selanjutnya, jika diperhatikan, derajat simpul dari unsur rotasi dan refleksi sama yaitu 1. Oleh karena itu, indeks Padmakar-Ivan dari Γ_{D_8} adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} PI(G) = PI(G) &= [(n_e(e) + n_a(e)) + (n_e(e) + n_{a^2}(e)) + (n_e(e) + n_{a^3}(e)) + \\ &\quad (n_e + (n_e(e) + n_b(e)) + (n_e(e) + n_{ab}(e)) + (n_e(e) + n_{a^2b}(e)) + \\ &\quad (n_e(e) + n_{a^3b}(e))] \\ &= [(6+0) + (6+0) + (6+0) + (6+0) + (6+0) + (6+0) + (6+0)] \\ &= (6+6+6+6+6+6+6) \\ &= 42 \end{aligned}$$

Contoh di atas memberikan inspirasi untuk mendapatkan sifat yang lebih umum, yang kemudian diwujudkan dalam hasil berikut.

Teorema 3.6 Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika 2^k untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks Padmakar-Ivan dari graf koprima dari grup dihedral adalah

$$PI(G) = 4n^2 - 6n + 2$$

BUKTI. Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf koprima dari grup dihedral. Jika 2^k untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Diperoleh graf koprima dengan 2 partisi yakni $v_1 = \{e\},\ v_2 = \{a, a^2, a^3,\ b, ab, a^2b, a^3b\}$. Berdasarkan Teorema 2, diperoleh $\deg(v_1) = 2n - 1$, $\deg(v_2) = 1$, sehingga indeks Padmakar - Ivan dari graf koprima dari grup dihedral untuk $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ sebagai berikut

$$PI(G) = \sum_{e=u,v\in E(G)} ((n_u(e) + n_v(e))$$

$$PI(G) = \left(\sum_{e=v_1,v_2 \in E(G)} ((n_{v_1}(e) + n_{v_2}(e)) \right)$$

Karena berdasarkan definisi grup dihedral, maka diperoleh:
jumlah pasangan simpul pada $V(v_1, v_2) = 2n - 1$,
sehingga,

$$PI(G) = (((2n-2)+0))(2n-1)$$
$$PI(G) = (2n-2)(2n-1)$$
$$PI(G) = (\ 4n^2 - \ 6n\ + 2)$$

4 Kesimpulan

Graf koprima dari grup dihedral memiliki beberapa indeks topologi. Penelitian mengkaji Indeks Hyper-Wiener dan indeks Padmakar-Ivan dari graf koprima dari grup dihedral dengan kasus n suatu bilangan prima dan $n = 2^k$, k adalah bilangan asli. Nilai indeks Indeks Hyper-Wiener dari grup dihedral berorde prima ganjil dan berorde perpangkatan dua secara berturut turut adalah $\boldsymbol{n^2 - 5n + 2}$ dan $\boldsymbol{6n^2 - 7n + 2}$. Lalu . Nilai indeks Indeks Padmakar-Ivan dari grup dihedral berorde prima ganjil dan berorde perpangkatan dua secara berturut turut adalah $\boldsymbol{2n^3 - 3n^2 - n + 2}$ dan $\boldsymbol{4n^2 - 6n + 2}$.

Daftar Pustaka

[1] U. Devandra and L. C. Anjali, “Mendeskripsikan Grup Menggunakan Berbagai Graf,” *Jurnal UJMC*, vol. 8, no. 1, pp. 27–34, 2022.

[2] X. Ma, H. Wei, and L. Yang, “The Coprime graph of a group,” *International Journal of Group Theory*, vol. 3, no. 3, pp. 13–23, 2014, doi: 10.22108/ijgt.2014.4363.

[3] Nurhabibah, D. P. Malik, H. Syafitri, and I. G. A. W. Wardhana, “Some results of the non-coprime graph of a generalized quaternion group for some n,” *AIP Conf Proc*, vol. 2641, no. December 2022, p. 020001, 2022, doi: 10.1063/5.0114975.

[4] E. Y. Asmarani, A. G. Syarifudin, I. G. A. W. Wardhana, and N. W. Switrayni, “The Power Graph of a Dihedral Group,” *Eigen Mathematics Journal*, vol. 4, no. 2, pp. 80–85, 2021, doi: 10.29303/emj.v4i2.117.

[5] L. R. W. Putra, Z. Y. Awanis, S. Salwa, Q. Aini, and I. G. A. W. Wardhana, “THE POWER GRAPH REPRESENTATION FOR INTEGER MODULO GROUP WITH POWER PRIME ORDER,” *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 17, no. 3, pp. 1393–1400, Sep. 2023, doi: 10.30598/barekengvol17iss3pp1393-1400.

[6] B. N. Syechah, E. Y. Asmarani, A. G. Syarifudin, D. P. Anggraeni, and I. G. A. W. W. Wardhana, “Representasi Graf Pangkat Pada Grup Bilangan Bulat Modulo Berorde BilanganPrima,” *Evolusi: Journal of Mathematics and Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 99–104, 2022.

[7] R. G. Godsil C., *Algebraic graph theory*. Springer, 2001.

[8] D. P. Malik *et al.*, “Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima (A Note on Nilpotent Graph of Ring Integer Modulo with Order Prime Power),” *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 8, no. 1, pp. 28–33, 2023, doi: 10.26594/jmpm.v8i1.2920.

[9] M. J. Nikmehr and S. Khojasteh, “On the nilpotent graph of a ring,” *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 37, no. 4, pp. 553–559, 2013, doi: 10.3906/mat-1112-35.
[10] D. A. Fatahillah and N. W. Switrayni, “Sifat-Sifat Graf Pembagi Nol pada Gelanggang Polinom Kuosien (Z_p [x])/⟨x^(n+1) ⟩ ×(Z_q [x])/⟨x^(n+1) ⟩,” *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, pp. 29–34, Jun. 2020, doi: 10.29303/emj.v3i1.51.
[11] M. N. Husni, H. Syafitri, A. M. Siboro, A. G. Syarifudin, Q. Aini, and I. G. A. W. Wardhana, “THE HARMONIC INDEX AND THE GUTMAN INDEX OF COPRIME GRAPH OF INTEGER GROUP MODULO WITH ORDER OF PRIME POWER,” *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, vol. 16, no. 3, pp. 961–966, Sep. 2022, doi: 10.30598/barekengvol16iss3pp961-966.
[12] E. Y. Asmarani, S. T. Lestari, D. Purnamasari, A. G. Syarifudin, S. Salwa, and I. G. A. W. Wardhana, “The First Zagreb Index, The Wiener Index, and The Gutman Index of The Power of Dihedral Group,” *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 7, no. 4, pp. 513–520, May 2023, doi: 10.18860/ca.v7i4.16991.
[13] R. García-Domenech, J. Gálvez, J. V. de Julián-Ortiz, and L. Pogliani, “Some new trends in chemical graph theory,” *Chemical Reviews*, vol. 108, no. 3. pp. 1127–1169, Mar. 2008. doi: 10.1021/cr0780006.
[14] A. Gazir and I. G. A. W. Wardhana, “Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral,” *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, vol. 1, no. 2, p. 73, Dec. 2019, doi: 10.29303/emj.v1i2.26.
[15] A. G. Syarifudin, Nurhabibah, D. P. Malik, and I. G. A. W. dan Wardhana, “Some characterizatsion of coprime graph of dihedral group D2n,” *J Phys Conf Ser*, vol. 1722, no. 1, 2021, doi: 10.1088/1742-6596/1722/1/012051.
[16] N. Nurhabibah, I. G. A. W. Wardhana, and N. W. Switrayni, “NUMERICAL INVARIANTS OF COPRIME GRAPH OF A GENERALIZED QUATERNION GROUP,” *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, vol. 29, no. 01, pp. 36–44, 2023.
[17] A. Gazir S, I. G. A. W. Wardhana, N. W. Switrayni, and Q. Aini, “Some Properties of Coprime Graph of Dihedral Group D_2n When n is a Prime Power,” *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 3, no. 1, pp. 34–38, 2020, doi: 10.14710/jfma.v3i1.7413.
[18] L. Feng, W. Liu, G. Yu, and S. Li, “The hyper-Wiener index of graphs with given bipartition,” *Utilitas Mathematica*, vol. 96, no. 1, pp. 99–108, 2014, [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/279652481
[19] K. Pattabiraman and P. Paulraja, “Vertex and edge Padmakar-Ivan indices of the generalized hierarchical product of graphs,” *Discrete Appl Math (1979)*, vol. 160, no. 9, pp. 1376–1384, Jun. 2012, doi: 10.1016/j.dam.2012.01.021.