



# MODEL VOLATILITAS STOKASTIK DENGAN METODE MARKOV CHAIN MONTE CARLO

(Studi Kasus Pada Data Return Harga Penutupan Saham Bank Negara Indonesia)

Alfian<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Program Studi Pendidikan Matematika IAIN Ternate

alfianmath03@gmail.com

## ABSTRAK

Volatilitas merupakan salah satu indikator pengukuran risiko dalam manajemen risiko yang didefinisikan sebagai variansi bersyarat dari suatu data relatif terhadap waktu. Salah satu pendekatan alternatif untuk menjelaskan perubahan volatilitas dalam runtun waktu finansial adalah model volatilitas stokastik. Dalam estimasi parameter model volatilitas stokastik, bentuk eksplisit sangat susah ditentukan sehingga fungsi likelihood distribusi return ditentukan secara implisit menggunakan variabel bantu atau laten yang melakukan parameterisasi varians yang bersifat stokastik. Untuk itu, metode Bayesian diperlukan dalam estimasi parameter model. Karena metode Bayesian sulit diselesaikan secara analitik maka dikembangkan teknik simulasi. Teknik simulasi yang biasa digunakan dalam metode Bayesian adalah metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Metode MCMC merupakan metode simulasi untuk mendapatkan data sampel suatu variabel random dengan teknik sampling berdasarkan sifat rantai markov. Salah satu teknik dalam metode MCMC yang terkenal adalah Gibbs Sampling. Dari hasil studi kasus data return harga penutupan saham Bank Negara Indonesia (BBNI.JK) diperoleh model volatilitas stokastik yakni  $Y_t = \varepsilon_t \exp(h_t/2), \varepsilon_t \sim N(0,1), h_t = -7.5849 + 0.90690(h_{t-1} + 7.5849) + \eta_t, \eta_t \sim N(0, 0.37703)$

**Kata Kunci:** Model volatilitas stokastik, Metode Markov Chain Monte Carlo, Gibbs Sampling, Diagnostik Heidelberger dan Welch

## 1. Pendahuluan

Volatilitas merupakan salah satu indikator pengukuran risiko penting dalam manajemen risiko, khususnya analisis keuangan. Volatilitas dapat didefinisikan sebagai variansi bersyarat dari suatu data relatif terhadap waktu. Volatilitas menggambarkan seberapa besar penyimpangan yang terjadi antara nilai yang diharapkan dengan nilai realisasi atau nilai sesungguhnya [22].

Tsay (2005) menyebutkan beberapa karakter khusus dari volatilitas (khususnya data runtun waktu keuangan) yakni pertama, seringnya ditemukan adanya pengklusteran volatilitas (volatility clustering) dalam data yakni volatilitas bernilai besar selama periode waktu tertentu dan bernilai kecil untuk selama periode waktu yang lain. Kedua, volatilitas seringkali bersifat asimetris, yakni pergerakan volatilitas berbeda terhadap kenaikan atau penurunan harga suatu aset.

Model yang populer untuk menggambarkan sifat volatilitas diantaranya yakni model ARCH (Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity) yang pertama kali dikemukakan oleh Engle (1982) dan kemudian dikembangkan menjadi model GARCH (Generalized

Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity) yang dikemukakan oleh Bollerslev (1986). Adapun pada penelitian ini, model volatilitas yang dibahas adalah model volatilitas stokastik.

Shephard (1996) menyebutkan bahwa dalam estimasi parameter model stokastik volatilitas, tidak mungkin untuk mendapatkan ekspresi eksplisit untuk fungsi likelihood karena sangat susah mendapatkan bentuk eksplisit dari tiap parameter model. Untuk itu, pendekatan Bayesian diperlukan dalam pemodelan untuk memberi dugaan awal atau distribusi prior tiap parameter model volatilitas stokastik. Untuk itu, metode Bayesian diperlukan dalam estimasi parameter model. Karena metode Bayesian sulit diselesaikan secara analitik maka dikembangkan teknik simulasi. Teknik simulasi yang digunakan dalam metode Bayesian adalah metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Metode MCMC merupakan metode simulasi untuk mendapatkan data sampel suatu variabel random dengan teknik sampling berdasarkan sifat rantai markov. Salah satu teknik dalam metode MCMC yang terkenal adalah Gibbs Sampling.

## 2.1. Metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

Tujuan dari MCMC adalah untuk membentuk Rantai Markov yang merupakan suatu barisan dari variabel random (Vektor yang mungkin),  $\{\theta_t, t = 1, 2, \dots, k\}$  yang merupakan variable vektor berdimensi- $k$ . Variabel-variabel ini dibangkitkan mengikuti model dimana sebagai state berikutnya,  $\theta_{t+1}$ , yang disampling dari suatu distribusi bersyarat satu langkah kedepan,  $p\{\theta_{t+1}|\theta_t\}$  yang hanya tergantung pada rantai untuk state pada waktu  $t$ . Sebagai suatu Rantai Markov, di bawah suatu regularitas, akan mempunyai suatu distribusi yang *stationer* atau *equilibrium*.

Metode MCMC akan menjadi metode inferensi utama yang akan dibahas dalam tulisan ini. Seperti yang digambarkan oleh Bernardo dan Smith (1994), prosedur dasar dari Bayesian MCMC adalah sebagai berikut :

Mengkontruksikan suatu rantai Markov dalam suatu ruang parameter,  $\Theta$ , lalu dilakukan sampling, dengan distribusi equilibrium  $p(\theta|y)$ .

Lakukan proses sampling rantai Markov untuk beberapa waktu.

Nilai yang diharapkan yang berkenaan dengan  $p(\theta|y)$  dari fungsi  $b(\theta)$  yang menjadi perhatian, diestimasi dengan menggunakan nilai simulasi dari rantai tersebut. Ini mengacu pada pengintegrasian *Monte Carlo*, yakni

$$E_{\theta|y}[b(\theta)] = \int b(\theta) p(\theta|y) d\theta \quad (1)$$

Ekspektasi  $E_{\theta|y}[b(\theta)]$  diaproksimasi dengan menarik sampel  $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(n)}\}$  dari distribusi untuk suatu nilai  $N$  yang besar dan mengambil rata-ratanya, yakni :

$$E_{\theta|y}[b(\theta)] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N b(\theta^{(i)}) \quad (2)$$

Untuk mengimplementasikan cara ini, digunakan algoritma untuk mengkonstruksi rantai Markov dengan distribusi equilibrium spesifik yang dibutuhkan. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah Metode *Gibbs Sampling* yang dikenalkan oleh Geman dan Geman (1984).

## 2.2. Gibbs Sampling

Algoritma *Gibbs Sampling* merupakan salah satu algoritma dalam menerapkan metode MCMC. Dalam algoritma ini dibutuhkan distribusi posterior yang lengkap untuk semua parameter. Anggap bahwa vector parameter  $\theta$  dapat dipartisi menjadi  $q$  komponen  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$  dan dinotasikan distribusi posterior bersyarat (distribusi besyarat penuh) dengan

$$\begin{aligned} p_1(\theta_1|\theta_2, \dots, \theta_q, \text{data}) \\ p_2(\theta_2|\theta_1, \dots, \theta_q, \text{data}) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$p_q(\theta_q|\theta_1, \dots, \theta_{q-1}, \text{data})$$

Dalam kasus sederhana  $q = 2$ , peluang densitas  $p_1$  mewakili densitas posterior dari komponen vector  $\theta_1$  bersyarat pada komponen  $\theta_2$ . Sama halnya,  $p_2$  adalah densitas posterior  $\theta_2$  diberikan  $\theta_1$ .

Secara sederhana ide Gibbs sampling diilustrasikan dengan menggunakan tiga parameter. Misalkan tiga parameter yakni  $\theta_1, \theta_2$  dan  $\theta_3$ ,  $\mathbf{X}$  adalah koleksi data yang tersedia dan  $\mathbf{M}$  model. Selanjutnya dilakukan estimasi parameter sehingga diperoleh model yang cocok yang dapat digunakan untuk melakukan inferensi. Jika fungsi *likelihood* model tersebut sulit diperoleh, tetapi distribusi bersyarat dari tiga parameter bersyarat parameter lainnya tersedia, yakni:

$$\begin{aligned} f_1(\theta_1|\theta_2, \theta_3, \mathbf{X}, \mathbf{M}) \\ f_2(\theta_2|\theta_3, \theta_1, \mathbf{X}, \mathbf{M}) \\ f_3(\theta_3|\theta_1, \theta_2, \mathbf{X}, \mathbf{M}) \end{aligned} \quad (3)$$

di mana  $f_i(\theta_i|\theta_{i \neq j}, \mathbf{X}, \mathbf{M})$  menunjukkan distribusi bersyarat dari parameter  $\theta_i$  setelah diberikan data, model, dan dua parameter lainnya. Dalam aplikasi, tidak perlu diketahui bentuk-bentuk yang tepat dari distribusi bersyarat. Yang dibutuhkan adalah kemampuan menggambar angka acak dari masing-masing ketiga distribusi bersyarat tersebut.

Misalkan  $\theta_{2,0}$  dan  $\theta_{3,0}$  menjadi dua nilai awal sembarang dari  $\theta_2$  dan  $\theta_3$ . Gibbs sampling mulai bekerja sebagai berikut :

Bangkitkan  $\theta_{1,1}$  dari sampel acak pada  $f_1(\theta_1|\theta_{2,0}, \theta_{3,0}, \mathbf{X}, \mathbf{M})$ .

Bangkitkan  $\theta_{2,1}$  dari sampel acak pada  $f_2(\theta_2|\theta_{3,0}, \theta_{1,1}, \mathbf{X}, \mathbf{M})$ .

Bangkitkan  $\theta_{3,1}$  dari sampel acak pada  $f_3(\theta_3|\theta_1, \theta_2, \mathbf{X}, \mathbf{M})$ .

Dari hasil iterasi Gibbs ini diperoleh parameter baru yakni  $\theta_{1,1}, \theta_{2,1}$  dan  $\theta_{3,1}$ .

Selanjutnya, dengan menggunakan parameter baru sebagai nilai awal, ulangi iterasi untuk mengambil nilai yang acak selanjutnya, sampai diperoleh parameter baru  $\theta_{1,2}, \theta_{2,2}$  dan  $\theta_{3,2}$ . Lanjutkan iterasi sebanyak  $m$  kali untuk sehingga diperoleh barisan bilangan acak:

$$(\theta_{1,1}, \theta_{2,1}, \theta_{3,1}), \dots, (\theta_{1,m}, \theta_{2,m}, \theta_{3,m}) \quad (4)$$

Dibawah kondisi keteraturan tertentu, dapat ditunjukkan bahwa, untuk  $m$  yang cukup besar,  $(\theta_{1,m}, \theta_{2,m}, \theta_{3,m})$  adalah kurang lebih sama dengan pengambilan acak distribusi gabungan  $f(\theta_1, \theta_2, \theta_3|\mathbf{X}, \mathbf{M})$  dari ketiga parameter tersebut.

### 2.3. Diagnostik Kekonvergenan Heidelberger dan Welch

Diagnostik Heidelberger dan Welch (Heidelberger dan Welch, 1983) terdiri dari dua bagian, yakni uji stasioneritas barisan dan uji setengah-lebar (half-width). Uji stasioneritas yakni menilai stasioneritas dari rantai Markov dengan menguji hipotesis bahwa rantai berasal dari proses stasioner lemah. Adapun, uji setengah lebar yakni untuk mengecek apakah ukuran sampel rantai Markov cukup untuk mengestimasi nilai rata-rata secara akurat.

Diberikan  $\{\theta_t\}$ , misalkan  $S_0 = 0$ ,  $S_n = \sum_{t=1}^n \theta_t$ , dan  $\bar{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \theta_t$ . Berdasarkan proporsi 2.9.2.8, dari barisan  $\{\theta_t, 0 \leq t \leq n\}$  dapat dikonstruksi suatu barisan  $\{B_s^n, 0 \leq s \leq 1\}$ , dengan nilai-nilai  $s = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$ . Diperoleh,

$$B_s^n = \frac{S_{[ns]} - [ns]\bar{\theta}}{(n\hat{p}(0))^{1/2}}, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (5)$$

dengan  $[a]$  menunjukkan bilangan bulat terbesar kurang atau sama dengan  $a$  dan  $\hat{p}(0)$  adalah suatu estimasi densitas spektral output barisan yang dievaluasi pada frekuensi nol yang diperoleh dari paruh kedua barisan tersebut. Untuk suatu  $n \rightarrow \infty$  yang besar,  $B^n = \{B_s^n, 0 \leq s \leq 1\}$  konvergen dalam distribusi ke Jembatan Brown,  $B = \{B_s, 0 \leq s \leq 1\}$ . Untuk mengujinya, dikonstruksi suatu uji statistik dengan menggunakan  $B^n$ . Statistik yang digunakan

dalam prosedur ini adalah statistik Cramer Von Mises(CVM). Yakni,  $\int_0^1 (B_s^n)^2 ds = CVM(B^n)$ . Untuk  $n \rightarrow \infty$ , statistik akan konvergen dalam distribusi ke distribusi CVM standar,  $\int_0^1 (B_s)^2 ds = CVM(B)$ . Jika nilai  $CVM(B^n) > CVM(B)$  maka tolak hipotesis bahwa  $B^n$  memiliki distribusi yang sama dengan jembatan brown yang berarti tolak hipotesis bahwa rantai berasal dari proses stasioner lemah. Jika telah melewati pengujian, maka dapat disimpulkan bahwa seluruh rantai adalah stasioner. Namun jika uji ini gagal, maka hapus 10% awal dari rantai dan ulang pengujian dengan menggunakan 90% sisanya. Proses ini diulang sampai diperoleh suatu waktu  $t$  yang cocok atau telah mencapai titik dimana data yang tersisa tidak cukup untuk membangun sebuah interval kepercayaan (pemotongan proporsi ditetapkan hanya sampai 50%).

Bagian dari rantai yang dianggap stasioner disimpan dan selanjutnya dilakukan uji setengah lebar. Statistik yang dihitung di sini adalah setengah lebar relatif (SLR) atau Relative Half-Width (RHW) dari interval kepercayaan. SLR untuk interval kepercayaan dengan level  $1 - \alpha$  adalah

$$SLR = \frac{z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot (\hat{s}_n/n)^{1/2}}{\hat{\theta}} \tag{6}$$

Dimana  $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$  adalah nilai  $z$  dari persentil ke-100  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ ,  $\hat{s}_n$  adalah variansi dari rantai yang diestimasi dengan menggunakan metode densitas spektral,  $n$  adalah panjang rantai dan  $\hat{\theta}$  adalah rata-rata yang diestimasi. SLR mengkuantifikasikan keakuratan interval kepercayaan pada level  $1 - \alpha$  dari hasil estimasi rata-rata dengan mengukur rasio antara standar error rata-rata sampel dan rata-rata itu sendiri. Uji stasioneritas dilakukan satu sisi, penolakan terjadi ketika  $p$ -value lebih besar dari  $1 - \alpha$ . Untuk melakukan Uji setengah lebar, diperlukan penentuan nilai  $\alpha$  dan nilai toleransi  $\epsilon$  (biasanya nilai default  $\alpha = 5\%$  dan  $\epsilon = 0,1$ ). Jika  $SLR > \epsilon$ , maka disimpulkan bahwa data tidak cukup untuk secara akurat mengestimasi nilai mean dengan  $1 - \alpha$  keyakinan di bawah toleransi  $\epsilon$ .

### 3. Model Volatilitas Stokastik

Model Volatilitas stokastik mulai dikenal di kalangan ahli ekonometri dan peneliti di bidang keuangan kuantitatif sejak awal 1970-an. Model ini hanya berkaitan dengan pemodelan volatilitas melalui observasi sebelumnya untuk varians dengan waktu yang bervariasi (*time varying variance*) seperti pada model ARCH, tetapi juga memungkinkan varians untuk memiliki struktur stokastik laten.

#### 3.1. Model Volatilitas Stokastik

Dalam Shepard (2005), model SV waktu diskrit paling sederhana yang di definisikan :

$$Y_t = \varepsilon_t \sigma_t \tag{7}$$

dimana  $Y_t$  adalah return rata-rata terkoreksi dari harga asset pada waktu  $t$ . ( $t = 1, \dots, n$ , untuk  $n \geq 1$ ),  $\sigma_t^2$  mengikuti proses Autoregresif orde pertama AR(1),  $\varepsilon_t$  diasumsikan sebagai barisan variable random yang saling independen dan berdistribusi identik dimana  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ . Anggap parameter  $\{h_t\}$  dimana

$$Y_t = \varepsilon_t \exp(h_t/2) \tag{8}$$

$$h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \eta_t \tag{9}$$

$\varepsilon_t$  dan  $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$  merupakan proses random yang bersifat normal white noise. Parameter  $\{h_t\}$  adalah parameter log volatilitas, dimana

$$h_t = \log \sigma_t^2 \tag{10}$$

yang merupakan variansi kondisional pada waktu  $t$  dan

$$h_t | h_{t-1} \sim N(\mu + \phi(h_{t-1} - \mu), \sigma_\eta^2) \quad (11)$$

Dari model di atas, ada tiga parameter model yakni scaling factor  $\mu$ , persisten parameter  $\phi$ , variansi kondisional  $\sigma_\eta^2$

### 3.2. Beberapa sifat Model Volatilitas Stokastik

Pada Shephard (1996) dan Ghysels (1996) dalam Wantanee (2007) memberikan gambaran bahwa dari sifat dan prosedur mengestimasi yang sering digunakan untuk model Volatilitas Stokastik. Biasanya pada model Volatilitas Stokastik diasumsikan bahwa  $|\phi| < 1$  karena hal ini berarti moment orde kedua stasioner. Hal ini memberikan bentuk marjinal tersirat dimana:

$$\begin{aligned} \mu_{h_t} &= E[h_t] = \frac{\mu}{1 - \phi} \\ \text{dan} \\ \sigma_{h_t}^2 &= Var[h_t] = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Ketika  $h_1$  diambil dari distribusi stasioner, maka  $\{h_t\}$  adalah proses yang stasioner, dan  $\{Y_t\}$  juga stasioner karena  $\{\varepsilon_t\}$  selalu stasioner. Dari Shephard (1996), mengingat sifat-sifat distribusi log-normal, jika  $\{h_t\}$  stasioner dan  $r$  genap, terdapat semua momen dari  $Y_t$ , yaitu :

$$E[Y_t^r] = E[\varepsilon_t^r] E \left[ \exp \left( \frac{r h_t}{2} \right) \right] = \frac{r! \exp \left( \frac{r \mu_{h_t}}{2} + \frac{r^2 \sigma_{h_t}^2}{8} \right)}{2^{\frac{r}{2}} \left( \frac{r}{2} \right)!} \quad (13)$$

dan jika  $r$  ganji, maka semua momentnya adalah nol.

#### Bukti :

Diketahui fungsi pembangkit moment  $m(t)$ , dimana :

$$\begin{aligned} m(t) &= E(e^{tx}) = E \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \right) \\ &= 1 + tE(x) + \frac{t^2}{2!} E(x^2) + \frac{t^3}{3!} E(x^3) + \dots + \frac{t^n}{n!} E(x^n) + \dots + \frac{t^{2n}}{2n!} E(x^{2n}) + \dots \end{aligned}$$

Jika  $X \sim N(0,1)$ , maka

$$\begin{aligned} m_X(t) &= e^{\frac{1}{2}t^2} = E \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{1}{2}t^2 \right)^n}{n!} \right) = 1 + \frac{\left( \frac{1}{2}t^2 \right)^1}{1!} + \frac{\left( \frac{1}{2}t^2 \right)^2}{2!} + \frac{\left( \frac{1}{2}t^2 \right)^3}{3!} + \dots + \frac{\left( \frac{1}{2}t^2 \right)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + \frac{t^2}{2^1 1!} + \frac{t^4}{2^2 2!} + \frac{t^6}{2^3 3!} + \dots + \frac{t^{2n}}{2^n n!} + \dots \end{aligned}$$

Dari dua persamaan di atas, tampak bahwa  $E(X^r) = 0$ , untuk  $r$  yang ganjil, Selanjutnya diperoleh :

$$\frac{t^{2n}}{2n!} E(x^{2n}) = \frac{t^{2n}}{2^n n!} \Leftrightarrow E(x^{2n}) = \frac{2n!}{2^n n!}$$

Jadi  $E(x^r) = \frac{r!}{2^{\frac{r}{2}} \left( \frac{r}{2} \right)!}$ , untuk  $r$  genap.

$h_t \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right)$  diperoleh  $m_{h_t}(t) = E[e^{th_t}] = e^{\left(t\mu_{h_t} + \frac{1}{2}t^2\sigma_{h_t}^2\right)}$

$$E \left[ \exp \left( \frac{r h_t}{2} \right) \right] = m_{h_t} \left( \frac{r}{2} \right) = \exp \left( \left( \frac{r}{2} \right) \mu_{h_t} + \frac{1}{2} \left( \frac{r}{2} \right)^2 \sigma_{h_t}^2 \right) = \exp \left( \frac{r \mu_{h_t}}{2} + \frac{r^2 \sigma_{h_t}^2}{8} \right)$$

$$\text{Jadi, } E[Y_t^r] = E[\varepsilon_t^r] E \left[ \exp \left( \frac{r h_t}{2} \right) \right] = \frac{r! \exp \left( \frac{r \mu_{h_t}}{2} + \frac{r^2 \sigma_{h_t}^2}{8} \right)}{2^{\frac{r}{2}} \left( \frac{r}{2} \right)!} \quad \blacksquare$$

Sehingga diperoleh Kurtosis untuk model volatilitas stokastik diskrit, yakni:

$$\kappa = \frac{E[Y_t^4]}{(E[Y_t^2])^2} = \frac{3 \exp(2\mu_{h_t} + 2\sigma_{h_t}^2)}{\left\{ \exp\left(\mu_{h_t} + \left(\frac{\sigma_{h_t}^2}{2}\right)\right) \right\}^2} = 3 \exp(\sigma_{h_t}^2) \quad (14)$$

Dimana  $\kappa \geq 3$ , yang kurtosis menunjukkan bahwa model memiliki ekor yang lebih tebal daripada proses Gaussian yang memiliki korelasi yang setara.

Model ini dapat menggambarkan korelasi antara varians berurutan. ACF antara observasi kuadrat didefinisikan :

$$\rho_{y_t^2}(s) = \frac{\text{Cov}[Y_t^2 Y_{t-s}^2]}{\text{Var}[Y_t^2]} = \frac{\exp(\sigma_{h_t}^2 \phi_1^s) - 1}{3 \exp(\sigma_{h_t}^2) - 1} \approx \frac{\exp(\sigma_{h_t}^2) - 1}{3 \exp(\sigma_{h_t}^2) - 1} \phi^s = \frac{(\kappa/3) - 1}{\kappa - 1} \phi^s \quad (15)$$

Untuk  $s \geq 1$ . Autokorelasi dari observasi kuadrat menurun jika  $|\phi| < 1$ .

### 3.3. Fungsi Likelihood untuk Model Volatilitas Stokastik

Dalam Wantanee (2007), fungsi Likelihood untuk model SV AR(1) diskrit dari 3.1 diperoleh:

$$f(y, h|\mu, \phi, \sigma^2) = f(y|h, \mu, \phi, \sigma^2) f(h|\mu, \phi, \sigma^2) \quad (16)$$

$$f(y|h, \mu, \phi, \sigma^2) = \prod_{t=1}^n \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-h_t}{2}\right) \exp\left(-\frac{y_t^2}{2 \exp(h_t)}\right) \quad (17)$$

$$f(h|\mu, \phi, \sigma^2) = \left(\frac{(1-\phi^2)}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)}{2\sigma^2}(h_1 - \mu)^2\right\} \times \prod_{t=1}^n \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-h_t}{2}\right) \exp\left(-\frac{y_t^2}{2 \exp(h_t)}\right) \quad (18)$$

Kim (1998) mencatat bahwa *maximum likelihood* untuk model volatilitas hanya dapat diperoleh dengan menggunakan metode komputasi yang paling intensif.

### 3.4. Inferensi Bayesian untuk Model Volatilitas Stokastik

Dalam Wantanee (2007), model volatilitas stokastik AR(1) yang diperkenalkan diatas, distribusi posterior dapat ditulis sebagai berikut :

$$p(\mu, \phi, \sigma^2, h|y) = \frac{p(y|\mu, \phi, \sigma^2, h)p(\mu, \phi, \sigma^2, h)}{\iiint \int p(y|\mu, \phi, \sigma^2, h)p(\mu, \phi, \sigma^2, h)d\mu d\phi d\sigma^2 dh} \quad (19)$$

Dimana  $h = (h_1, \dots, h_n)$  dan  $y = (y_1, \dots, y_n)$

Distribusi prior bersama dapat ditulis sebagai

$$p(\mu, \phi, \sigma^2) = p(\mu) p(\phi)p(\sigma^2) \quad (20)$$

dengan

$$\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2),$$

$$p(\mu) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma_\mu^2}\right\}$$

$$\sigma^2 \sim \text{Gamma}(\omega_{\sigma^2}, \zeta_{\sigma^2})$$

$$p(\sigma^2) = \left(\frac{\zeta_{\sigma^2}}{\Gamma(\omega_{\sigma^2})}\right) \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\omega_{\sigma^2}+1} \exp\left\{-\frac{\zeta_{\sigma^2}}{\sigma^2}\right\}$$

$$\frac{\phi+1}{2} \sim \text{Beta}(\omega_\phi, \zeta_\phi)$$

$$p(\phi) = \frac{2\Gamma(\omega_\phi + \zeta_\phi)}{\Gamma(\omega_\phi)\Gamma(\zeta_\phi)} (1 + \phi)^{\omega_\phi-1} (1 - \phi)^{\zeta_\phi-1}$$

### 3.5. Metode Markov Chain Monte Carlo untuk Model Volatilitas Stokastik

Ada 3 parameter dalam model SV. Seperti yang diberikan oleh (Kim (1998)). Syarat-syarat untuk  $\mu$  dan  $h_t$  adalah indetnik pada tiap parameterisasi. Misalkan didefinikan:

$$\begin{aligned} m_t &= h_t - \mu \\ d_t &= h_t - \phi h_{t-1} \\ \bar{d} &= \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n d_t \\ &\text{dan} \\ M_1 &= \sum_{t=2}^n m_{t-1}^2 \\ M_2 &= \frac{\sum_{t=2}^n m_t m_{t-1}}{\sum_{t=2}^n m_{t-1}^2} \end{aligned} \quad (21)$$

Distribusi posterior bersyarat diperlukan untuk implementasi pendekatan MCMC , yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$h_{(t)} = (h_1, \dots, h_{t-1}, h_{t+1}, \dots, h_n),$$

Maka:

(i) Untuk  $\mu$  :

$p(\mu | \phi, \sigma^2, h, y) \sim N(m_\mu, v_\mu)$  dimana

$$\begin{aligned} m_\mu &= \frac{(1 + \phi)h_1 + (n-1)\bar{d}}{(1 + \phi) + (1 - \phi)(n-1)} \\ v_\mu &= \left( \frac{(n-1)(1 - \phi)^2 + (1 - \phi)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

(ii) Untuk  $h_1$

$$p(h_1 | h_{(1)}, \mu, \phi, \sigma^2, y) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ h_1 + y_1^2 \exp(-h_1) + \frac{(h_1 - \mu - \phi(h_2 - \mu))^2}{\sigma^2} \right] \right\}$$

(iii) Untuk  $h_t$

$$p(h_t | h_{(t)}, \mu, \phi, \sigma^2, y) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ h_t + y_t^2 \exp(-h_t) + \frac{(1 + \phi^2)(h_t - a_t)^2}{\sigma^2} \right] \right\}$$

Dimana

$$a_t = \frac{(1 - \phi^2)\mu + \phi(h_{t-1} - h_{t+1})}{(1 + \phi^2)}$$

(iv) Untuk  $h_n$

$$p(h_n | h_{(n)}, \mu, \phi, \sigma^2, y) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ h_n + y_n^2 \exp(-h_n) + \frac{(h_n - \mu - \phi(h_{n-1} - \mu))^2}{\sigma^2} \right] \right\}$$

Dan akhirnya pada (v) dan (vi) dimana  $(\phi, \sigma^2)$  dilakukan sampling secara langsung, atau dibentuk seperti fungsi dari parameter yang disampling.

(v) Untuk  $\sigma^2$

$$p(\sigma^2 | \mu, \phi, h, y) \sim \text{IGamma} \left( \frac{n}{2} + h_\sigma, \frac{(1 - \phi^2)}{2} m_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{t=2}^n (m_t - \phi m_{t-1})^2 + \zeta_\sigma \right)$$

(vi). Untuk  $\phi$

$$p(\sigma^2 | \mu, \sigma^2, h, y) \propto (1 + \phi)^{\frac{\omega_\phi + 1}{2} - 1} (1 - \phi)^{\frac{\zeta_\phi + 1}{2} - 1} \exp \left\{ -\frac{S(\phi)}{2\sigma^2} \right\}$$

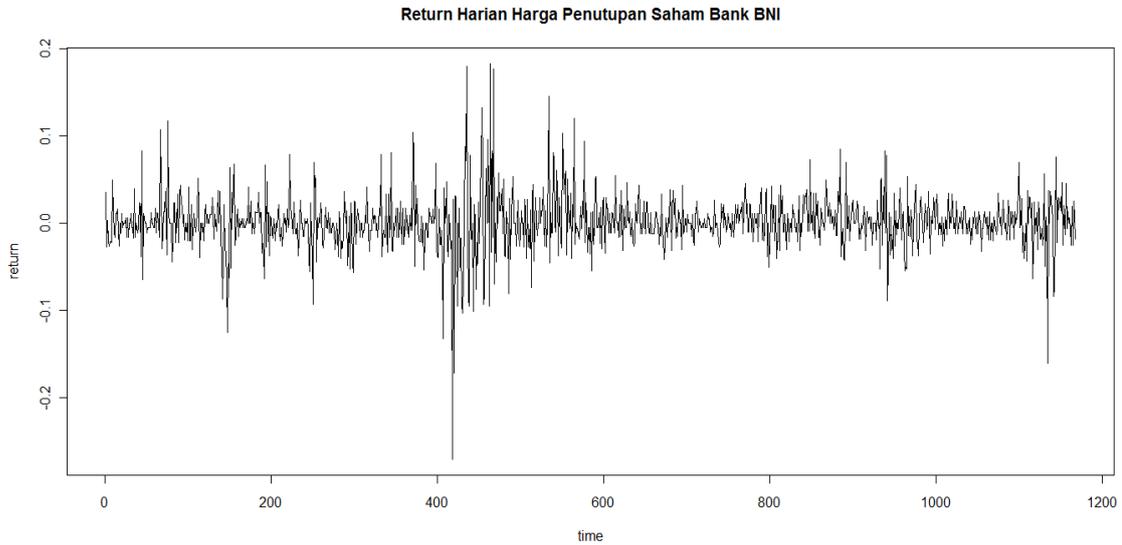
Dimana

$$S(\phi) = m_1^2(1 - \phi)^2 + M_1(\phi - M_2)^2$$

Catatan bahwa densitas kondisional untuk  $\phi$  dan  $h_{(t)}$  tidak ada yang berbentuk closed form, sehingga untuk melakukan sampling digunakan pendekatan *Gibbs Sampling*.

#### 4. Deskripsi Data

Data yang digunakan dalam studi kasus adalah data return harga penutupan saham Bank Negara Indonesia (BBNLIJK), dari tanggal 2 Januari 2007 sampai tanggal 8 November 2011, ringkasan dari data disajikan dalam grafik berikut :



**Gambar 4.1** Grafik return harga penutupan saham Bank Negara Indonesia

#### 5. Estimasi Parameter Model Volatilitas Stokastik

MCMC membantu mempermudah metode Bayesian dalam mengestimasi parameter untuk posterior. Algoritma MCMC yang digunakan adalah Gibbs Sampling. Dengan menggunakan *package "coda"* pada program R diperoleh *output* parameter  $\mu, \phi, \sigma_{\eta}^2$  untuk posterior model volatilitas stokastik, dimana  $\beta = \exp(\mu/2)$ , beserta kuantil posterior sebagai berikut :

**Tabel 4.1** Output estimasi parameter  $\mu, \phi, \sigma_{\eta}^2$

Parameter Model	Mean	Standar Deviasi
$\beta$	0.02254	0.001881
$\phi$	0.90690	0.022297
$\sigma_{\eta}^2$	0.48034	0.056265

Dengan penyebaran nilai parameter berdasarkan *quantile* adalah sebagai berikut :

**Tabel 4.2** *quantile* penyebaran nilai estimasi parameter  $\mu, \phi, \sigma_{\eta}^2$

Parameter Model	Quantile				
	2.5%	25%	50%	75%	97.5%
$\beta$	0.01922	0.02127	0.02242	0.02367	0.02656
$\phi$	0.85820	0.89273	0.90855	0.92265	0.94564
$\sigma_{\eta}^2$	0.37703	0.44083	0.47824	0.51743	0.59490

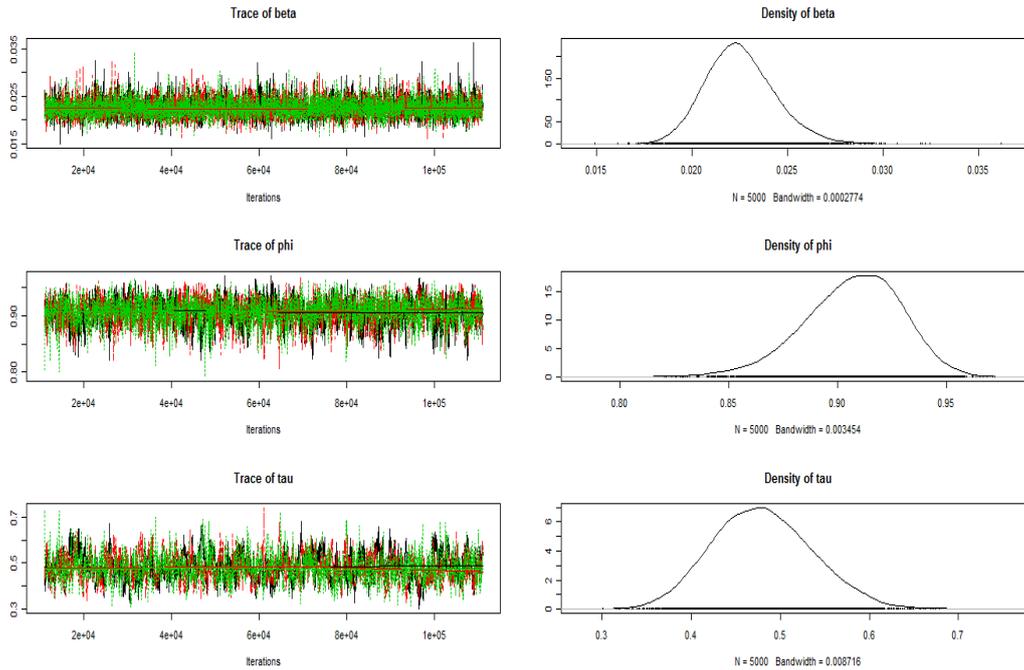
Sehingga jika disubstitusi dalam persamaan (7) dan (8) diperoleh persamaan model volatilitas stokastik yaitu :

$$Y_t = \varepsilon_t \exp(h_t/2)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,1)$$

$$h_t = -7.5849 + 0.90690(h_{t-1} + 7.5849) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, 0.37703)$$

Selanjutnya diperoleh plot *trace* dan *histogram* dari ketiga parameter model yakni sebagai berikut :



**Gambar 4.2** Plot trace dan Grafik Densitas estimasi parameter  $\mu, \phi, \sigma_{\eta}^2$

Dari gambar *plot trace* diatas menunjukkan bahwa telah terjadi *mixing* yang baik yang mengindikasikan bahwa parameter telah konvergen.

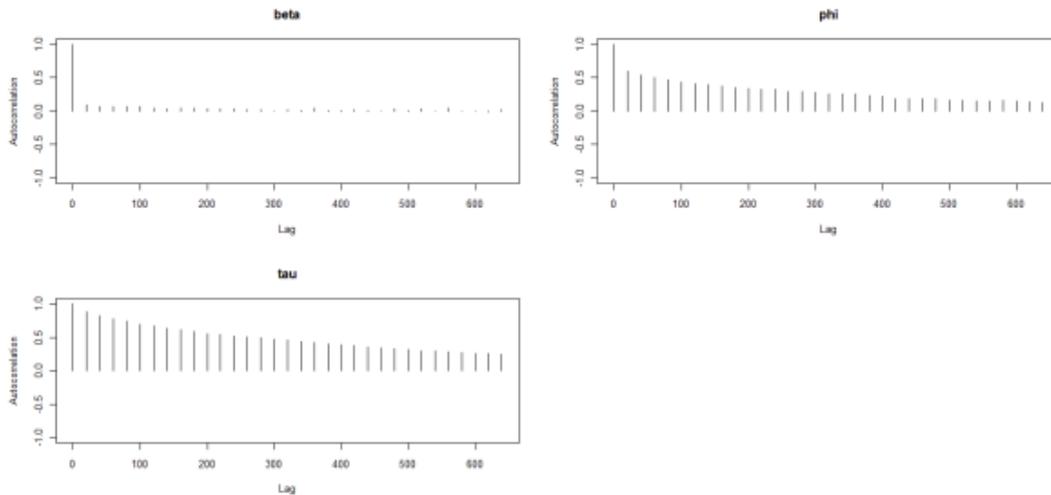
## 6. Diagnostik Kekonvergenan

### 6.1. Fungsi Autokorelasi (*autocorrelation*)

Secara statistik dan visual Fungsi Autokorelasi dari ketiga parameter dapat dilihat sebagai berikut :

**Tabel 4.3** Fungsi Autokorelasi nilai estimasi parameter  $\mu, \phi, \sigma_{\eta}^2$

	$\beta$	$\phi$	$\sigma_{\eta}^2$
Lag 0	1.00000	1.00000	1.00000
Lag 20	0.07315	0.54789	0.83067
Lag 100	0.04507	0.32066	0.51763
Lag 200	0.01365	0.18806	0.31930
Lag 1000	0.00777	0.01529	0.04562



**Gambar 4.3** Grafik fungsi Autokorelasi nilai estimasi parameter  $\mu, \phi, \sigma_{\eta}^2$

Dari fungsi autokorelasi di atas, parameter beta meluruh menuju nol dengan cepat yang mengindikasikan bahwa distribusi stationer dengan cepat, sedangkan dua parameter lainnya yang tampak lambat dalam menemukan distribusi stationernya.

### 6.2. Heidelberger dan Welchdiagnostic

**Tabel 4.4** Output Uji diagnostik *Heidelberger* dan *Welch* bagian pertama

	Stationarity test	Start iteration	p-value
$\beta$	Passed	1	0.165
$\phi$	Passed	1	0.638
$\sigma_{\eta}^2$	Passed	1	0.877

**Tabel 4.5** Output Uji diagnostik *Heidelberger* dan *Welch* bagian kedua

	Halfwidth test	Mean	Halfwidth
$\beta$	Passed	0.0225	0.165
$\phi$	Passed	0.9060	0.638
$\sigma_{\eta}^2$	Passed	0.4842	0.877

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa tiap parameter telah melewati diagnostik bagian pertama dengan nilai *p-value* diatas 5% sehingga hipotesis bahwa rantai berdistribusi stationer diterima. Selanjutnya untuk tabel berikutnya tampak bahwa tiap parameter telah melewati diagnostic bagian kedua, dengan mean seperti pada tabel.

### 7. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan yang telah dikemukakan sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Model volatilitas stokastik melibatkan dua proses random yakni  $\varepsilon_t$  untuk observasi dan  $h_t$  untuk volatilitas laten, serta memiliki tiga parameter model yakni faktor

*scaling*  $\mu$ , persisten parameter  $\phi$ , variansi kondisional  $\sigma_\eta^2$  atau secara lengkap dapat ditulis :

$$Y_t = \varepsilon_t \exp(h_t/2), \quad t = 1, \dots, T$$

$$h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \eta_t, \quad t = 1, \dots, T$$

$\varepsilon_t$  dan  $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$  merupakan proses random yang bersifat *normal white noise* dan  $Y_t$  adalah observasi pada waktu  $t$ .

2. Bentuk umum moment ke- $r$  dari model volatilitas stokastik, yaitu :

$$E[Y_t^r] = \begin{cases} \frac{r! \exp\left(\frac{r\mu h_t}{2} + \frac{r^2 \sigma_\eta^2 h_t}{8}\right)}{2^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r}{2}\right)!}, & \text{untuk } r \text{ genap} \\ 0 & \text{, untuk } r \text{ ganjil} \end{cases}$$

sehingga dari bentuk umum moment di atas diperoleh nilai kurtosis yang lebih besar dari tiga yang berarti distribusi probabilitasnya bersifat *fat tails* dibandingkan dengan distribusi Normal sehingga memungkinkan lebih banyak terjadinya kejadian-kejadian ekstrim dibandingkan yang dapat dimodelkan oleh distribusi Normal.

3. Dari hasil studi kasus Estimasi parameter model  $\mu, \phi, \sigma_\eta^2$  dengan menggunakan dengan menggunakan metode MCMC algoritma Gibbs Sampling dari data return harga penutupan saham Bank Negara Indonesia (BBNI.JK), dari tanggal 2 januari 2007 sampai tanggal 8 november 2011 diperoleh hasil estimasi  $\beta = \exp(\mu/2)$  dimana mean = 0.02254 dan standar deviasi = 0.001881,  $\phi$  dengan mean = 0.90690 dan standar deviasi = 0.022297 serta  $\sigma_\eta^2$  dengan mean = 0.48034 dan standar deviasi = 0.056265 atau dapat ditulis dalam bentuk persamaan :

$$Y_t = \varepsilon_t \exp(h_t/2), \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

$$h_t = -7.5849 + 0.90690(h_{t-1} + 7.5849) + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, 0.37703)$$

## 8. Saran

Dalam penelitian ini model volatilitas stokastik masih sangat sederhana yakni dimana variansinya mengikuti proses Autoregressive orde-1 (AR(1)). Oleh karena itu untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat mempertimbangkan orde yang lebih tinggi dan dapat memasukkan faktor-faktor yang dapat menggambarkan sifat asimetris dari volatilitas. Selain itu, model univariat pada penelitian ini dapat diperluas menjadi model multivariat untuk melihat pergerakan data beberapa aset serta hubungannya secara simultan.

## 9. Referensi

- [1] Albert, J., 2007, *Bayesian Computation with R*, Springer, New York
- [2] Bain, L. J and Engelhardt, M., 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistic*, Duxbury Press, California
- [3] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., 2000, *Introduction to Real Analysis, 3<sup>rd</sup> edition*, John Wiley and Sons, New York
- [4] Bernardo, J.M., Smith, A.F.M., 1994, *Bayesian Theory*, John Wiley and Sons, New York
- [5] Bierens, Herman J., 2005, *Introduction To The Mathematical and Statistical Foundations Of Econometrics*, Cambridge University Press, New York
- [6] Billingsley, P. 1968. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, New York

- [7] Clark, P. K. ,1973, *A Subordinated Stochastic Process Model With Fixed Variance For Speculative Prices*, *Econometrica*
- [8] Geman, S.,and Geman, D. (1984), *Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images*, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 6, pp.721-741
- [9] Geyer, C.J. 1992., *Practical Markov Chain Monte Carlo*, *The Statistical Science*, Vol. 7, pp. 473-511
- [10] Gilks, W.R., Wild, P., 1992, Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling. *Applied Statistics*, Vol. 41,pp. 337-348.
- [11] Jacquier, E., Polson, N. G., and Rossi, P. E., 1994, Bayesian analysis of stochastic volatility models (with discussion). *Journal of Business & Economic Statistics* **12**: 371–417
- [12] Kim, S., Shephard, N., and Chib, S., 1998, Stochastic Volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models, *Review of Economic Studies*, Vol. 65, pp. 361- 393
- [13] Meyer, R. and Yu J. ,2000, BUGS for a Bayesian analysis of stochastic volatility models. *Econometrics Journal* 3, 198–215
- [14] Rausand, M. , Hoyland, A. 2004. *System Reliability Theory, 2<sup>nd</sup> edition*. Springer Verlag, Berlin
- [15] Ross, Sheldon M , 1996, *Stochastic processesn 2<sup>nd</sup> edition*, John Wiley & Sons, Canada
- [16] SAS Development Core Team, 2009, *SAS/STAT® 9.2 User’s Guide, Second Edition*, SAS Institute Inc., Cary, NC, USA
- [17] Serfozo, R, 2009, *Basics of Applied Stochastic Processes*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg
- [18] Soejoeti Z, Subanar , 1988, *Inferensi Bayesian*, Penerbit Karunia Universitas Terbuka , Jakarta
- [19] Shephard, N., 1993, Fitting non-linear time series models, with applications to stochastic variance models, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.8, 135-152.
- [20] Shephard, N. 1996. *Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility, Time Series Models In econometrics, finance, and other fields*. Chapman and Hall, Chapter 1,1-55.
- [21] Shephard Neil, 2005. *Stochastic Volatility (Selected Readings)*. Oxford University Press Inc., New York
- [22] Tsay, R. S., 2005. *Analysis of Financial time Series 2<sup>nd</sup> edition*. John Wiley and Son, Inc., Hoboken, New Jersey
- [23] Wantanee, S., 2007, *Bayesian Markov chain Monte Carlo (MCMC) For stochastic Volatility Model Using FXData*  
[http://69.175.2.130/~finman/Barcelona/Papers/WS\\_FMASpain07.pdf](http://69.175.2.130/~finman/Barcelona/Papers/WS_FMASpain07.pdf)
- [24] Wei , W. S., 1994. *Time Series Analysis : Univariate and Multivariate Methods*. Addison Wesley