J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 07 No. 02 (2023) pp. 170-176
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN: 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

SECURITY NUMBER PADA CORONA PRODUK DARI GRAF

WINDA ADE FITRIYA B[1*]

[1] Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Cenderawasih

*Corresponding email: windaafb97@gmail.com

ABSTRAK

Diberikan G adalah graf dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). Himpunan tak kosong S⊆V dianggap aman bila setiap serangan atas S dapat dipertahankan. Himpunan aman pada G = (V, E) dan A = $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ menjadi serangan terhadap S serta D = $\{D_1, D_2, .., D_k\}$ menjadi pertahanan untuk melawan serangan terhadap S. Security number dari graf G disimbolkan s(G), adalah kardinalitas terkecil dari set aman S ⊆V. Pada artikel ini akan didiskusikan security number corona produk. Didapatkan hasil security number dari corona produk $s(G\odot C_n) = 3$ dan $s(G\odot P_n) = 2$ dengan C_n dan P_n masing-masing sikel dan lintasan pada n titik.

Kata Kunci: Security number**,** Corona produk, Graf, Sikel, Lintasan.

ABSTRACT

Given G *as a graph with a set of vertices* V(G) *and a set of edges* E(G). *A non-empty set* S⊆V *is considered secure if any attack on* S *can be defended. A secure set in* G = (V, E), *denoted as* A = $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, *constitutes attacks on* S, *while* D = $\{D_1, D_2, .., D_k\}$ *represents defenses against attacks on* S. *The security number of graph* G, *symbolized as* s(G), *is the smallest cardinality of a secure set* S ⊆V. *This article will discuss the security number of the corona product. The obtained results show the security number of the corona product as* $s(G\odot C_n) = 3$ *and* $s(G\odot P_n) = 2$, *where* C_n *and* P_n *are cycles and paths on* n *vertices, respectively.*

Keywords: *Security number, Corona product, Graph, Cycle, Path.*

1 Pendahuluan

Pada perkembangan Ilmu Pengetahuan dan Teknologi sekarang ini security sangat penting. Seperti di era teknologi saat ini, pada jaringan komputer yang berfungsi untuk mengatasi kesalahan dalam pemakaian kapasitas jaringan komputer yang tidak efektif dan mengawasi akses jaringan yang dapat menggangu aktivitas jaringan komputer. Jaringan komputer bisa digambarkan sebagai graf, yang terdiri dari titik dan sisi. Komputer dapat dimisalkan dengan titik dan komunikasi antara satu komputer dengan komputer lainnya

2020 *Mathematics Subject Classification*: 05C38
Tanggal dikirim: 06-03-23; direvisi: 20-10-23; diterima: 04-11-23

dimisalkan dengan sisi.

Pada teori security number ada istilah *neighborhood*. Dimisalkan graf G dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G) yang dapat dinotasikan dengan G=(V,E). Penelitian sebelumnya mengenai security number [1-3, 6-9] jika x∈S dan S⊂V maka N(x) = {y ∈ V ; xy ∈ E}, N[x] = N(x)∪{x}. N(S) menunjukkan *neighbor* terbuka S yang diperoleh dari $\bigcup_{v\in S} N_v$ dan N[S] menunjukkan tetangga tertutup S yang diperoleh dari N(S) ∪ S, sedangkan ∂ (S) menunjukkan batas S yang diperoleh dari N[S] – S.

Bila V=$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V(G)$, maka serangan atas S=$\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ adalahsebuah pasangan tak berurut A={A_1, A_2, ... , A_k} dimana A_i⊆N[s_i]–S, 1≤i≤k dan $A_i \cap A_j \neq 0$ untuk i≠j. Sebuah *defense* atas S adalah sebuah pasangan tak berurut, D={D_1, D_2, ... , D_k} dimana D_i⊆N[s_i]∩S, 1≤i≤k dan $D_i \cap D_j \neq 0$ untuk i≠j. Sebuah serangan atas S dapat dipertahankan bila ada *defense* D pada S sehingga $|D_i| \geq |A_i|$ ∀i={1, 2, ..., k}. Set S dikatakan secure bila setiap serangan A pada S dapat dipertahankan.

Beberapa hasil penelitian mengenai security number pada graf komposit menggunakan operasi perkalian seperti s($C_m \times C_n$) $\leq$ min{$2m, 2n, 12$} yang di lakukan Kozawa et al [10], s($P_m \times P_n$) min{$m, n, 3$} yang dilakukan Yero et al [12], dan s($C_m \times P_n$) $\leq$ min{$m, 2n, 6$} yang dilakukan Dutton dan Ho [5].

Hasil penelitian Brigham et al [1] terdahulu pada *single* graf seperti s(G)=1 jika dan hanya jika δ (G)≤1, s(G)=2 jika dan hanya jika δ(G)≥2 dan G memiliki himpunan S={u,v} dimana u dan v berdekatan dan |∂(G)≤2|, s(G)=3 jika dan hanya jika s(G)∉{1,2} dan G memiliki himpunan bagian S={u,v,w} dimana |∂|(S)≤3, s(K_n)= $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, s(C_n)=2, dan s(P_n)=1. Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf dengan $|(V(G_1)| = n_1$ dan $|(V(G_2)| = n_2$. Misalkan $(V(G_1)$ $=\{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$. Corona produk dari G_1 dan G_2, dilambangkan dengan $G_1 \odot G_2$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil satu buah salinan G_1 dan n_1 buah salinan dari G_2 katakan $G_{2,1}, G_{2,2}, \dots, G_{2,n_1}$ sehingga,

V($G_1 \odot G_2$) = V(G_1) ∪ V($G_{2,1}$)∪ $V(G_{2,2})$, ... , ∪ V(G_{2,n_1})

E($G_1 \odot G_2$) = E(G_1) ∪ E($G_{2,1}$)∪ $E(G_{2,2})$, ... , ∪ E(G_{2,n_1}) ∪ $E(F)$

dengan E(F) adalah himpunan semua sisi yang menghubungkan titik v_1 ke semua titik-titik di $V(G_{2,i})$, i={1, 2, …, n_1}.

Pada penelitian ini akan ditentukan security number pada corona produk dari graf G dengan graf P_n yang memiliki n titik yang dilambangkan dengan s($G \odot P_n$), dan menentukan security number pada corona produk dari graf G dengan graf C_n yang dilambangkan dengan s($G \odot C_n$).

2 Tinjauan Pustaka

Dalam menentukan security number pada graf diperkenalkan istilah security, notasi security dan security graf, dan security number pada graf.

2.1 Security

Menurut Winda [11] security number pada graf yang dinotasikan dengan s(G) adalah nilai terkecil dari sebuah set aman (*secure set*) dalam graf G.

2.2 Notasi Security

Menurut Kozawa, et al [10] dimisalkan G adalah graf dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G), dan misalkan S menjadi himpunan bagian dari V(G). N(S) menunjukkan tetangga terbuka S; yaitu himpunan {v| dengan sisi {u, v} untuk beberapa u ∈ S}. N[S] menunjukkan tetangga tertutup S; yaitu, N(S) ∪ S. ∂(S) menunjukkan batas S; yaitu ∂ (S) = {v∉ S | v adalah tetangga untuk beberapa u ∈ S}. Jika S menginduksi subgraf terhubung pada G, dapat dikatakan bahwa S terhubung. Jelas himpunan keamanan minimal terhubung. Simbol

C merupakan sikel (*cycle*) dan P merupakan lintasan (*path*). Hasil dua dimensi dari graf $P_m \times P_n$ adalah pasangan terurut dari dua lintasan P_m dan P_n. Sebuah silinder dua dimensi P_m x C_n adalah produkCartesian dari jalur P_m dan siklus C_n . Sebuah torus dua dimensi C_m x C_n adalah produk Cartesian dari dua siklus C_m dan C_n. Jika n ≥ 2, jalur P_n merupakan graf yang himpunan titiknya adalah {0, …, n-1} dan himpunan sisinya {{i, i+1}|0 = i = {n-2}}. Untuk n=3, siklus C_n merupakan graf yang himpunan titiknya adalah {0, …, n-1} dimana himpunan sisinya {{i, i+1}|0 = i = {n-2}}

2.3 Security Graf

2.3.1 Sifat dasar set aman

Menurut pengamatan Brigham et al, [3] berikut merangkum beberapa properti set aman yang diperoleh dari beberapa defenisi berikut.

Pengamatan 2.3.1.1 Diberikan G = (V,E) dan X ⊆ S ⊆ V.

1. Jika ada serangan pada X yang anggotanya merupakan himpunan bagian dari $N[x] - S$ maka itu tidak bisa dipertahankan, dan jika ada serangan pada X yang menggunakan semua penyerang di $N[x] - S$ itu tidak bisa dipertahankan.
2. Serangan yang dapat dipertahankan pada himpunan bagian dari X adalah serangan yang dapat bertahan pada serangan di X.
3. Jika X adalah S-aman, maka $|N[x] \cap S \geq N[x] - S|$.
4. Himpunan S adalah aman jika dan hanya jika X adalah S-aman untuk setiap X ⊆ S.
5. Set aman minimum adalah terhubung.

Proposisi 2.3.1.2 Jika S_1dan S_2 merupakan titik yang tidak saling terhubung pada set aman di graph yang sama maka $S_1 \cup S_2$ adalah set aman.

Berikut ini beberapa hasil Dutton [4] untuk security number dari graf.

Proposisi 2.3.1.3 G adalah sebuah graf

1. a) s(G) = 1 jika dan hanya jika ∂(G) ≤ 1

   b) s(G) = 2 jika dan hanya jika ∂(G) ≥ 2 dan G memiliki himpunan S = {u,v} dimana u dan v berdekatan dan $|\delta$(G) ≤ 2|

   c) s(G) = 3 jika dan hanya jika s(G) ∉{1,2} dan G memiliki himpunan bagian S = {u,v,w} dimana | ∂(G) | ≤ 3 dan $<$ S $>$ adalah satu dari K_3 atau $P_3 =<$ u, v, w $>$ dan pada kasus terakhir $|N(u) \cap \partial$ S | ⩽ 2 dan $|N(w) \cap \partial$ S | ⩽ 2.

   2. s(K_n) = [n/2]
   3. s(C_n) = 2
   4. a) s(P_mx P_n) = min{m,n,3}

   b) s(C_mx P_n) ≤ min {m,2n,6}

   c) s(C_3x C_3) = 4 dan s (C_mx C_n) ≤ min {2m,2n,12}

5. Diberikan G menjadi graf dengan derajat tiga maksimum. Jika G bukan merupakan graf hutan, maka g menjadi panjang sikel terpendeknya. Defenisikan k menjadi g jika graf G memiliki paling sebanyak satu simpul berderajat 2, dan merupakan jumlah simpul pada lintasan terpendek antara simpul berderajat dan sebaliknya. Maka

   a) s(G) = 1 jika ∂(G) ≤ 1

   b) s(G) = 2 jika k=2 atau G mengandung salah satu sebuah K_4 – e atau sebuah K_3 dengan simpul berderajat 2

   c) s(G) = max {3, min {k, g-1}} jika G terdapat pada $K_{2,3}$ atau sebuah C_g dengan simpul berderajat 2

d) s(G) = min {k,g} sebaliknya.

2.3.2 Karakteristik set aman

Teorema-teorema pada karakteristik set aman yang digunakan dalam artikel ini bersumber dari Brigham, et al [3]. Subgraf yang diinduksi oleh S dilambangkan dengan <S>. Digunakan fakta bahwa untuk setiap X ⊆ S, S – N[X] = ∅ jika dan hanya jika ∂(X) ∩ S adalah sebuah set yang tidak terhubung pada <S>.

Teorema 2.3.2.1 Diberikan G = (V,E). Sebuah set S ⊆ V aman jika dan hanya jika |S|⩾|N[S]–S| dan setiap X ⊆ S adalah S-aman bilamana |X|⩽|N[X] – S| – 1 – k (<S>).

Teorema 2.3.2.2 Set S ⊆ V adalah S aman jika dan hanya jika |N[X] ∩ S |⩾|N[X]–S| untuk semua X ⊆ S.

Teorema 2.3.2.3 Set S ⊆ V aman jika dan hanya jika |N[X] ∩ S| ⩾ |N[X]–S| untuk semua X ⊆S.

Teorema 2.3.2.4 Sebuah set S ⊆ V aman jika dan hanya jika |S|⩾|N[S] – S| dan S – { S_i} adalah S-aman untuk setiap S_i ∈ S.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Security number pada corona produk graf G dengan P_n

Teorema 3.1.1 akan membuktikan Graf G ⊙ Pn dikatakan aman jika S={$v_1, v_2, \dots, v_n$}.

Teorema 3.1.1 Jika diberikan graf G dan lintasan P_n maka s(G ⊙ P_n)=2

Bukti. diberikan P_n dengan lintasan { v_1, v_2, ... , v_n}. Diberikan sebuah titik {u} di graf G. Dimana {u}~{v_1} di G ⊙ P_n. Dianggap set S={v_1, v_2} pada G ⊙ P_n. Dibuktikan S adalah set aman. Sehingga,

$N_{G \odot P_n}[v_1] = \{u, v_1, v_2\}$; $N_{G \odot P_n}[v_1] \cap S = \{v_1, v_2\}$; $N_{G \odot P_n}[v_1] - S = \{u\}$

$N_{G \odot P_n}[v_2] = \{u, v_1, v_2, v_3\}$; $N_{G \odot P_n}[v_2] \cap S = \{v_1, v_2\}$; $N_{G \odot P_n}[v_2] - S = \{v_3, u\}$

Serangan pada S merupakan set A=(A_1, A_2) untuk A=(v_3, u). Pada serangan A terdapat pertahanan set D=(D_1, D_2) untuk D=(v_1, v_2) maka $|D_i| \geq |A_i|$ dimana i={1, 2}. Maka diperolehS adalah set aman. Sehingga s(G ⊙ P_n) ≤ 2.

Berikutnya akan dibuktikan s(G ⊙ Pn) ≥ 2. Telah terbukti bahwa setiap *singleton* di V(G ⊙ P_n) tidak aman. Diberikan {a} ⊆V(G ⊙ P_n). Untuk $\partial(P_n)$ = 1 sehingga $d_{G \odot P_n}$ (a) ≥ 2. Dimisalkan S = {a} sehingga

$N_{G \odot P_n}[a]$ = N{a} ∪ {a} ; $N_{G \odot P_n}[a] \cap S = \{a\}$; $N_{G \odot P_n}[a] - S =$ N[a] – {a} = N(a) Ketika $d_{G \odot P_n}$(a) ≥ 2 sehingga |N(a)| ≥ 2. Karena hanya satu pertahanan pada set D={a} pada serangan A = N{a} bahwa tidak ada pertahanan D karena |N(a)| ≥ |a|. Saat S = {a} tidak merupakan set aman maka s(G ⊙ P_n) ≥ 2.Sehingga diperoleh s(G ⊙ P_n) = 2.

3.2 Security number pada corona produk graf G dengan C_n

Teorema 3.2.1 Jika diberikan graf G dan sikel C_n maka s(G $\odot$ C_n)=3.
Bukti. Diberikan Cn dengan siklus $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n-1}\}$. Diberikan sebuah titik {u} di graf G dan dimisalkan S = $\{v_{i-1}, A_i, v_{i+1}\}$ untuk i = {1, 2, …, n} pada G $\odot$ Cn. Akan dibuktikan S adalah set aman. Sehingga,

$N_{G \odot C_n}[v_{i-1}] = \{u, v_i, v_{i-1}, v_{i-2}\}$; $N_{G \odot C_n}[v_{i-1}] \cap S = \{v_i, v_{i-1}\}$; $N_{G \odot C_n}[v_{i-1}] - S = \{u, v_{i-2}\}$

$N_{G \odot C_n}[v_i] = \{u, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}\}$; $N_{G \odot C_n}[v_i] \cap S = \{v_i, v_{i-1}, v_{i+1}\}$; $N_{G \odot C_n}[v_i] - S = \{u\}$

$N_{G \odot C_n}[v_{i+1}] = \{u, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$; $N_{G \odot C_n}[v_{i+1}] \cap S = \{v_i, v_{i+1}\}$; $N_{G \odot C_n}[v_{i+1}] - S = \{u, v_{i+2}\}$

Serangan di S merupakan set A=(A_1, A_2, A_3) untuk A=(u, v_{i+2}, v_{i-2}). Pada serangan A terdapat pertahanan set D=(D_1, D_2, D_3) dimana D=$(v_{1-1}, v_i, v_{i+!})$ sehingga $|D_i| \geq |A_i|$ dimana i={1, 2, 3}. Sehingga terbukti S adalah set aman. Karena itu s(G $\odot$ Cn) ≤ 3.

Berikutnya akan dibuktikan s(G $\odot$ Cn) ≥ 3. Sudah terbukti bahwa setiap *singleton* di G $\odot$ Pn tidak aman.

Kasus 1. diberikan graf G dimana V(G)={g}. Dimisalkan {x,y}∈S dan S⊆Cn dan {x}~ {y}. Sehingga,

$N_{G \odot C_n}[x] = \{u, g, x, y\}$; $N_{G \odot C_n}[x] \cap S$ = {x, y} ; $N_{G \odot C_n}[x] - S = \{u, g\}$

$N_{G \odot C'_n}[y] = \{g, w, x, y\}$; $N_{G \odot C'_n}[y] \cap S = \{x, y\}$; $N_{G \odot C'_n}[y] - S$ = {g, w}

Pertahanan di D=(D_1, D_2) dimana D_1={x} dan D_2={y} atau sebaliknya D_1={y} dan D_2={x} tidak memenuhi $|D_1| \geq |A_1|$ karena serangan A=(A_1, A_2) untuk A_1= {u, g} dan A_2= {w} tidak bisa dipertahankan.

Diambil graf G dimana V(G)={g}. Dimisalkan {x,y}∈S dan S⊆Cn untuk {x} dan {y} tidak bertetangga
Sehingga,

$N_{G \odot C_n}[x] = \{x, g, x_1, x_2\}$; $N_{G \odot C_n}[x] \cap S$ = {x} ; $N_{G \odot C_n}[x] - S = \{x_1, x_2, g\}$

$N_{G \odot C'_n}[y] = \{y, g, y_1, y_2\}$; $N_{G \odot C'_n}[y] \cap S = \{y\}$; $N_{G \odot C'_n}[y] - S = \{y_1, y_2, g\}$

Pertahanan di D=(D_1, D_2) dimana D_1={x} dan D_2={y} tidak memenuhi $|D_1| \geq |A_1|$ karena serangan A=(A_1, A_2) dimana $A_1 = \{x_1, x_2, g\}$ dan $A_2 = \{y_1, y_2\}$ tidak bisa dipertahankan.

Kasus 2. diberikan graf G dimana V(G)={g,g'} dimana {g}~ {g'}.. Dimisalkan S={x,y} dan {x}∈ Cn dan {y}∈C'n. Sehingga,

$N_{G \odot C_n}[x] = \{u, g, v, x\}$; $N_{G \odot C_n}[x] \cap S$ = {x,} ; $N_{G \odot C_n}[x] - S = \{u, g, v\}$

$N_{G \odot C'_n}[y] = \{g', w, x, y\}$; $N_{G \odot C'_n}[y] \cap S = \{y\}$; $N_{G \odot C'_n}[y] - S$ = {g', w,z}

Pertahanan di D=(D_1, D_2) dimana D_1={x} dan D_2={y} tidak memenuhi $|D_1| \geq |A_1|$ karena serangan A=(A_1, A_2) untuk A_1= {u, g, v} dan A_2= {g', w, z} tidak bisa dipertahankan.

Kasus 3. diberikan graf G untuk V(G)={y}. Dimisalkan S={x,y} untuk {x}∈ C_n dan {y}∈G dimana {x}∼{y}
Maka diperoleh:
$N_{G\odot C_n}[x]$ ={ y, u, x, v} ; $N_{G\odot C_n}[x]$ ∩ S = {x, y} ; $N_{G\odot C_n}[x] -$ S = { u, v}

$N_{G\odot C_n}[y]$ = $N_{G\odot C_n}\{y\}\cup\{y\}$; $N_{G\odot C_n}[y]$ ∩ S = $\{x, y\}$; $N_{G\odot C_n}[y] -$ S = $N_{G\odot C_n}$\{y\}−{x}

Pertahanan di D=(D_1, D_2) dimana D_1={x} dan D_2={y} dan kebalikannya D_1={y} dan D_2={x} tidak memenuhi $|D_1| \geq |A_1|$ karena serangan A=(A_1, A_2) dimana A_1= {u, v } dan A_2= $N_{G\odot C_n}(y) - \{x\}$ tidak bisa dipertahankan.
Diambil graf G untuk V(G)={g,y} dimana {g}∼{y}. Dimisalkan S={x,y} untuk {x} ∈ C_n ∈V(G ⊙ C_n) dan {y}∈ V(G ⊙ C'$_n$).Maka diperoleh:
$N_{G\odot C_n}[x]$ ={ g, u, x, v} ; $N_{G\odot C_n}[x]$ ∩ S = {x} ; $N_{G\odot C_n}[x] -$ S = { g, u, v}
$N_{G\odot C_n}[y]$ = $N_{G\odot C_n}\{y\}\cup\{y\}$; $N_{G\odot C_n}[y]$ ∩ S = $\{y\}$; $N_{G\odot C_n}[y] -$ S = $N_{G\odot C_n}$\{y\}

Pertahanan di D=(D_1, D_2) dimana D_1={x} dan D_2={y} tidak memenuhi $|D_1| \geq |A_1|$ karena serangan A=(A_1, A_2) untuk A_1= {u, g, v} dan A_2= $N_{G\odot C'_n}\{y\}$ tidak bisa dipertahankan.

Kasus 4. diberikan graf G untuk V(G)={x,y} dimana {x}∼ {y}. Dimisalkan S={x,y} untuk {x}∈V(G ⊙ C_n) dan {y}∈V(G ⊙ C'$_n$).

Maka diperoleh:
$N_{G\odot C_n}[x]$ = $N_{G\odot C_n}\{x\}\cup\{x\}$; $N_{G\odot C_n}[x]$ ∩ S = {x, y} ; $N_{G\odot C_n}[x] -$ S = $N_{G\odot C_n}\{x\} - \{y\}$
$N_{G\odot C'_n}[y]$ = $N_{G\odot C'_n}\{y\}\cup\{y\}$; $N_{G\odot C'_n}[y]$ ∩ S = {x, y} ; $N_{G\odot C'_n}[y] -$ S = $N_{G\odot C'_n}\{y\}-\{x\}$.

Pertahanan pada D=(D_1, D_2) dimana D_1={x} dan D_2={y} atau sebaliknya D_1={y} dan D_2={x} tidak memenuhi $|D_1| \geq |A_1|$ karena serangan A=(A_1, A_2) dimana A_1= $N_{G\odot C_n}$\{x\} −{y} dan A_2= $N_{G\odot C_n}$\{y\} −{x} tidak bisa dipertahankan.
Diambil graf G untuk V(G)={x,y}. Dimisalkan S={x,y} dimana {x} tidak bertetangga dengan {y} untuk {x} ∈ V(G ⊙ C_n) dan {y}∈ V(G ⊙ C'$_n$). Maka diperoleh:
$N_{G\odot C_n}[x]$ = {$N_{G\odot C_n}\{x\}\cup\{x\}$; $N_{G\odot C_n}[x]$ ∩ S = {x} ; $N_{G\odot C_n}[x] -$ S = {$N_{G\odot C_n}\{x\}$

$N_{G\odot C'_n}[y]$ = {$N_{G\odot C'_n}\{y\}\cup\{y\}$; $N_{G\odot C'_n}[y]$ ∩ S = {$N_{G\odot C'_n}\{y\}$; $N_{G\odot C'_n}[y] -$ S = {y}

Pertahanan pada D=(D_1, D_2) dimana D_1={x} dan D_2={y} tidak memenuhi $|D_1| \geq |A_1|$ karena serangan A=(A_1, A_2) dimana A_1= $N_{G\odot C_n}$\{x\} −{y} dan A_2= $N_{G\odot C_n}$\{y\} −{x} tidak bisa dipertahankan. Maka untuk 2-set di G ⊙ C_n tidak aman. Begitupun dengan s(G ⊙ P_n) yang membuktikan pada masing-masing *singleton* di G ⊙ C_n tidak aman. Sehingga didapatkan s(G⊙ C_n) ≥3. Jadi dari hasil diatas, maka diperoleh untuk s(G ⊙ C_n)=3.

4 Kesimpulan

Kesimpulan dari hasil pembahasan diatas diperoleh security number pada corona produk dari graf G dan graf P_n adalah 2 yang dinotasikan dengan s(G⊙P_n)=2 dan securitynumber pada corona produk dari graf G dan graf C_n adalah 3 yang dinotasikan dengan s(G⊙C_n)=3.

Untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat menentukan security number pada bentuk graf lainnya.

5 Ucapan Terimakasih

Ucapan terima kasih kepada Prof Dr. Saib Suwilo, M.Sc. dan Dr. Sawaluddin, M.IT. dari Departeman Matematika USU yang telah membimbing penulis dalam melaksanakan penelitian ini. Serta terimakasih kepada pihak-pihak yang membantu dalam memberikan dukungan semangat sehingga penulis penelitian ini dapat terselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] R. C. Brigham, R. D. Dutton, S. T. Hedetniemi, "A sharp lower bound on the powerful alliance number of $C_m x C_n$" *Congr. Numer*., 167, pp. 57-63, 2004.

[2] R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, "Powerful alliances in graphs", 2004, Submitted for publication.

[3] R. C. Brigham, R. D. Dutton, S. T. Hedetniemi, "Security in graphs", *DiscreteApplied Mathematics*, 2007. https://doi.org/10.1016/j.dam.2007.03.009

[4] R. D. Dutton, "On a graph's security number", *Discrete Math*., 309, pp. 4443-4447, 2009.

[5] R. Dutton, Y. Y. Ho, "Global secure sets of grid-like graphs", *Discrete Appl. Math.*, 159, pp. 490-496, 2011.

[6] O. Favaron, G. H. Fricke, W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, P. Kristiansen, R. D. Skaggs, "Offensive alliances in graphs", *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2004. https://doi.org/10.7151/dmgt.1230

[7] G. H. Fricke, L. M. Lawson, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, "A note on defensive alliances in graphs", *Bull. ICA* 38, pp. 37-41, 2003.

[8] T. W. Haynes, S. T. Hadetniemi, M. A. Henning, "Global defensive alliances in graphs", *Electron. J. Combin.*, 10(1), R47, 2003.

[9] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, P. Kristiansen, "Alliances in graphs", *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 2004, pp. 157-177, 2004.

[10] K. Kozawa, Y. Otachi, K. Yamazaki, "Security number of grid-like graph". *Discrete Applied Mathematics*., 2009. https://doi.org/10.1016/j.dam.2009.00.020

[11] A. F. B. Winda, *Security number in Graphs*. Tesis. Medan. Universitas Sumatera Utara, 2021.

[12] I. G. Yero, M. Jakovas, D. Kuziak, "The security number of strong grid-likegraphs", *Theoretical Computer Science*, 653, pp. 1-14, 2016.