



PEMODELAN SEIQR PADA PENYEBARAN COVID-19 DENGAN PENGARUH KEEFEKTIFAN VAKSIN

SITI AISYATUR ROSIDAH^{1*}, AHMAD LUBAB², LUTFI HAKIM³

^{1,2,3}Universitas Islam Negeri Sunan Ampel, Surabaya

*sitiaisyaturrosidah@gmail.com

ABSTRAK

Penyebaran COVID-19 dan strategi pencegahan penularannya melalui karantina dan vaksinasi dapat diprediksi dengan pemodelan matematika epidemiologi model SEIQR. Pemodelan ini bertujuan untuk mengetahui model penyebaran COVID-19 beserta titik kestabilan dari model tersebut. Populasi dalam model yang digunakan dibagi menjadi lima sub-populasi, yaitu: *S-Suspected*, *E-Exposed*, *I-Infected*, *Q-Quarantined*, dan *R-Recovery*. Model yang telah dibentuk dicari kestabilan titik kesetimbangannya dengan kriteria *Routh-Hurwitz*, kemudian disimulasikan menggunakan metode numerik *Runge-Kutta* orde empat. Hasil analisis kestabilan menunjukkan bahwa apabila menggunakan vaksin dengan efektifitas lebih rendah, seperti Sinovac, AstraZeneca, atau Sinopharm, memperoleh $R_0 > 1$ yaitu 2.0554, 2.245, dan 1.302, dengan kata lain COVID-19 akan terus ada, sedangkan apabila menggunakan vaksin dengan efektifitas lebih tinggi, seperti Moderna atau Pfizer, menghasilkan $R_0 < 1$ yaitu 0.3495 dan 0.2666, artinya COVID-19 akan menghilang seiring waktu. Berdasarkan penelitian ini diperoleh bahwa COVID-19 dapat menghilang setelah hari ke-61 atau ke-73. Selain itu, semakin tinggi keefektifan vaksin, maka jumlah individu terinfeksi dan individu yang dikarantina semakin rendah, sedangkan jumlah individu yang sembuh semakin tinggi.

Kata kunci: Model Epidemik SEIQR, COVID-19, Efektifitas Vaksin, Kriteria *Routh-Hurwitz*

ABSTRACT

The spread of disease and strategies for preventing transmission through quarantine and vaccination of COVID-19 can be predicted using the SEIQR model which is an epidemic mathematical modeling. This modeling aims to determine the model of the spread of COVID-19 and the stability point of the model. The population in the SEIQR model is divided into five sub-populations, namely S-Suspected, E-Exposed, I-Infected, Q-Quarantined, and R-Recovery. Then from the model that has been formed, the stability of each equilibrium point will be sought using the Routh-Hurwitz criteria, then simulated using the fourth-order Runge-Kutta numerical method. The results of the stability analysis show that when using a vaccine with lower effectiveness, such as Sinovac, AstraZeneca, or Sinopharm, the values of R_0 are 2.0554, 2.245, and 1.302, which is $R_0 > 1$, in other words, the COVID-19 disease will continue to exist. If using a vaccine with higher effectiveness, such as Moderna or Pfizer, the value of R_0 is 0.3495

2020 Mathematics Subject Classification: 34L99

Tanggal masuk:20-09-22, direvisi: 19-10-22; diterima:30-10-22.

and 0.2666, which is $R_0 < 1$, meaning that COVID-19 will disappear over time. Based on this study, the result obtained is that COVID-19 can disappear after 61 to 73 days. In addition, the higher the vaccine effectiveness, the lower the number of infected and quarantined individuals, while the higher the number of recovered individuals.

Keywords: SEIQR Epidemic Model, COVID-19, Vaccine Effectiveness, Routh-Hurwitz Criteria

1 Pendahuluan

Beberapa negara dikejutkan dengan adanya penyakit pernapasan baru yang bahkan telah mewabah di seluruh dunia sejak sekitar akhir tahun 2019 dan awal tahun 2020. WHO menetapkan penyakit ini disebabkan oleh infeksi *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus-2* (SARS-CoV-2) sebagai COVID-19. Penyakit COVID-19 menyebar dengan sangat cepat sehingga penambahan kasus setiap harinya meningkat pesat. Menurut laporan, penyakit tersebut pertama kalinya muncul di Wuhan, China pada 18 sampai 29 Desember 2019 sebagai kasus pneumonia kemudian menyebar ke seluruh China dan beberapa negara terutama Asia hingga ke seluruh dunia [1, 2]. Dikarenakan oleh cepatnya penyebaran dan luasnya daerah penyebaran, maka WHO menyatakan COVID-19 dinyatakan sebagai penyakit pandemik.

Berdasarkan data WHO pada 29 Maret 2020, dari seluruh dunia sudah tercatat sebanyak 634.835 kasus yang dikonfirmasi dengan 33.106 kematian dari lebih dari 190 negara dan wilayah. Sedangkan konfirmasi COVID-19 di Indonesia hingga pada 28 Juli 2021 telah tercatat sejumlah 3.239.936 kasus positif dengan 86.835 kematian [2]. Besarnya jumlah kasus terkonfirmasi ini disebabkan oleh tingkat penularan virus yang tinggi. Virus SARS-CoV-2 dapat menular antar sesama manusia melalui droplet, kontak langsung, atau dari benda yang terkontaminasi virus [1].

COVID-19 merupakan penyakit jenis baru sehingga pengetahuan terkait penanganan khusus dan cara pencegahannya masih terbatas. Beberapa obat antivirus dan vaksin juga masih terus dikembangkan oleh banyak ahli di dunia untuk membentuk imunitas terhadap virus dan mencegah transmisi. Sehingga saat ini pencegahan yang direkomendasikan oleh WHO yaitu pemutusan rantai penularan dengan proteksi dasar, deteksi dini, dan juga isolasi atau karantina [2].

Pemodelan matematika di bidang epidemiologi dapat dilakukan untuk mengetahui tingkat karantina maupun tingkat keefektifan vaksin agar penyebaran berhenti sebagai upaya mengatasi penyebaran penyakit COVID-19. Model matematika yang sering digunakan dalam matematika epidemiologi adalah model epidemik SIR (*Suspected -Infected-Recovered*) dan (*Suspected-Exposed-Infected-Recovered*) yang juga dapat dikembangkan atau di-modifikasi dengan menambahkan berbagai macam faktor seperti vaksinasi, karantina, pengobatan, dan lainnya. Beberapa modifikasi dari model SIR dan SEIR pernah digunakan dalam memprediksi pola, penyebaran, maupun strategi menangani penyakit. Model-model tersebut pernah dilakukan untuk memodelkan berbagai penyakit seperti sifilis, demam berdarah, influenza, tuberculosis, malaria, hepatitis, HIV/AIDS dan lainnya [3–5].

Penelitian mengenai model SIR untuk memprediksi penyebaran COVID-19 tahap awal di Yogyakarta pernah dilakukan oleh Adi-Kusumo, dkk. (2020). Namun penelitian ini kurang akurat karena dalam COVID-19 terdapat juga kasus dimana seseorang dapat terpapar tetapi belum terinfeksi, sehingga model tersebut dapat ditambah kelas *E-Exposed* (individu yang terpapar) [6]. Model SIR dengan karantina dan vaksinasi sebagai pengaruhnya pernah dilakukan untuk memodelkan penyebaran difteri. Dengan model tersebut dihasilkan bahwa jika tingkat vaksinasi semakin tinggi dan semakin banyak individu yang dikarantina maka populasi akan semakin cepat

terbebas dari penyakit dan individu akan cepat sembuh [7].

Penelitian lain yang dilakukan oleh Ghostine, dkk. (2021) yang memodelkan penyebaran COVID-19 di Arab Saudi dengan menggunakan tujuh sub-populasi yaitu *Suspected* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), *Quarantined* (Q), *Recovered* (R), *Death* (D), dan *Vaccinated* (V). Analisis matematis dilakukan untuk menggambarkan ketidaknegatifan, keterbatasan, kesetimbangan endemik, keberadaan dan keunikan kesetimbangan endemik, dan bilangan reproduksi dasar dari model. Kemudian metode ensemble Kalman filter (EnKF) digunakan untuk membatasi model dan parameternya dengan data yang tersedia [8].

Penelitian ini menggunakan model SEIQR (*Suspected*, *Exposed*, *Infected*, *Quarantined*, *Recovery*) dan keefektifan vaksin (v) menjadi parameter yang mempengaruhi jumlah individu yang rentan menjadi terpapar. Data yang digunakan untuk nilai variabel dan beberapa parameter adalah data populasi penduduk, data total individu terinfeksi, total individu yang berkontak dengan penderita, data total individu dikarantina, data total individu yang sembuh, data total kematian populasi, data total kematian individu yang terinfeksi, data total kematian individu yang berkontak dengan penderita, data total kematian individu dikarantina, dan data total kematian individu yang sembuh dari COVID-19 di Jawa Timur mulai tanggal 1 Juli 2021 hingga 31 Juli 2021. Selain itu, pemodelan ini hanya menganalisis kejadian bulan Juli 2021 saja tanpa memperhatikan apabila terjadi lonjakan kasus setelahnya.

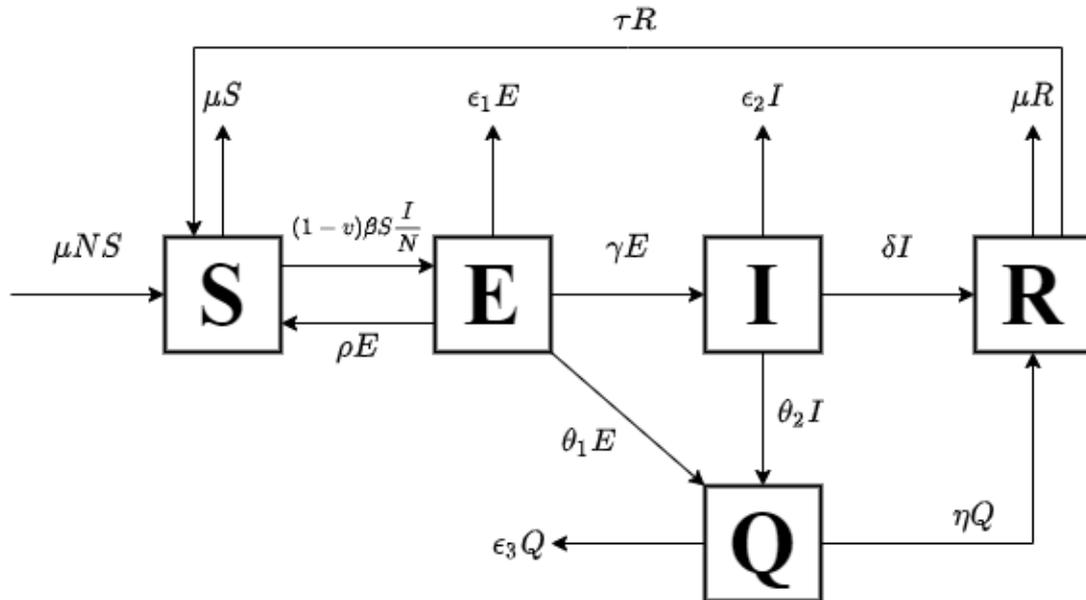
2 Tinjauan Pustaka

2.1 Model Matematika

Diagram kompartemen dapat dibentuk dari hubungan antar sub-populasi berdasarkan asumsi yang tersusun. Asumsi yang digunakan dalam model SEIQR dengan pengaruh keefektifan vaksin pada penyebaran COVID-19 diantaranya yaitu:

1. Total populasi diasumsikan selalu sama, jumlah populasi dianggap konstan atau tetap, atau dapat dikatakan laju kelahiran dan kematian adalah sama.
2. Semua individu dalam populasi dapat meninggal.
3. COVID-19 dapat menimbulkan kematian, sehingga kematian alami dan kematian akibat COVID-19 berbeda.
4. Semua individu dalam populasi diasumsikan memiliki peluang yang sama untuk tertular.
5. COVID-19 dapat menular dari individu yang terinfeksi melalui kontak secara langsung.
6. Individu yang terpapar menjadi terinfeksi jika hasil tes menyatakan positif dan kembali menjadi rentan jika hasil tes menyatakan negatif.
7. Individu yang terpapar dan terinfeksi dapat memasuki proses karantina baik mandiri maupun di rumah sakit.
8. Individu yang dikarantina dapat meliputi individu yang dikarantina akibat terpapar COVID-19, akibat terinfeksi COVID-19, maupun akibat melakukan perjalanan luar negeri.
9. Semua individu yang dikarantina dapat pulih.
10. Vaksinasi diberikan kepada semua individu yang rentan.
11. Individu yang sudah sembuh belum tentu memiliki kekebalan terhadap COVID-19 sehingga individu yang sudah sembuh dapat rentan kembali.

Model SEIQR lalu dimodifikasi dengan memasukkan pengaruh keefektifan vaksin yang disimbolkan v dan dapat bernilai 0 sampai dengan 1 dan individu yang sembuh dapat rentan kembali dengan menggunakan dasar model yang dibentuk oleh [9]. Adapun diagram kompartemen model SEIQR dengan pengaruh keefektifan vaksin disajikan pada Gambar (1).



Gambar 1: Diagram Kompartemen Model SEIQR dengan Pengaruh Keefektifan Vaksin pada Penyebaran COVID-19

Berdasarkan diagram kompartemen Gambar (1), modifikasi persamaan model SEIQR dengan memperhatikan asumsi-asumsi dan faktor tambahan yang mempengaruhi yaitu sebagai berikut:

1. Perubahan keadaan kompartemen (sub-populasi) *S-Susceptible* atau individu yang rentan. Faktor yang mempengaruhi perubahan keadaan baik penambahan maupun pengurangan individu dalam sub-populasi *S* yaitu.
 - (a) Penambahan individu dalam sub-populasi *S* dipengaruhi oleh laju kelahiran yang disimbolkan μ , laju individu yang sembuh menjadi rentan kembali yang disimbolkan τ , dan laju individu yang terpapar tapi tidak jadi terinfeksi ρ .
 - (b) Pengurangan individu dalam sub-populasi *S* dipengaruhi oleh laju penularan yang disimbolkan β dan laju kematian individu rentan yang disimbolkan dengan μ . Karena penularan dapat terjadi apabila individu yang sudah terinfeksi berkontak secara langsung dengan individu yang rentan sehingga parameter laju penularan dikalikan dengan $S\frac{I}{N}$.
Dan karena semua individu yang rentan divaksin, maka juga dikalikan vaksin yang tidak bereaksi. Ketidakefektifan vaksin dapat ditentukan melalui efektifitas vaksin yaitu $1 - v$.

Sehingga dapat dituliskan persamaan model untuk kompartemen *S* adalah.

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - (1 - v)\beta S \frac{I}{N} - \mu S + \rho E + \tau R. \quad (1)$$

2. Perubahan keadaan kompartemen (sub-populasi) *E-Exposed* atau individu yang terinfeksi kemudian dikarantina. Faktor yang mempengaruhi perubahan keadaan baik penambahan maupun pengurangan individu dalam sub-populasi *E* yaitu.

- (a) Penambahan individu dalam sub-populasi E dipengaruhi oleh laju penularan yang disimbolkan β .
- (b) Pengurangan individu dalam sub-populasi E dipengaruhi oleh laju individu yang terpapar menjadi terinfeksi yang disimbolkan γ , laju individu yang terpapar tapi tidak jadi terinfeksi ρ , laju individu terpapar yang dikarantina disimbolkan dengan θ_1 , dan laju kematian individu terpapar yang disimbolkan dengan ε_1 .

Sehingga dapat dituliskan persamaan model untuk kompartemen E adalah.

$$\frac{dE}{dt} = (1 - \nu)\beta S \frac{I}{N} - \rho E - \gamma E - \varepsilon_1 E - \theta_1 E. \tag{2}$$

3. Perubahan keadaan kompartemen (sub-populasi) I -*Infected* atau individu yang terinfeksi kemudian dikarantina.

Faktor yang mempengaruhi perubahan keadaan baik penambahan maupun pengurangan individu dalam sub-populasi I yaitu.

- (a) Penambahan individu dalam sub-populasi I dipengaruhi oleh laju individu yang terpapar menjadi terinfeksi yang disimbolkan γ .
- (b) Pengurangan individu dalam sub-populasi I dipengaruhi oleh laju individu yang terinfeksi menjadi sembuh disimbolkan dengan δ , laju individu rentan yang dikarantina disimbolkan dengan θ_2 dan laju kematian individu terinfeksi yang disimbolkan dengan ε_2 .

Sehingga dapat dituliskan persamaan model untuk kompartemen I adalah.

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - \delta I - \varepsilon_2 I - \theta_2 I. \tag{3}$$

4. Perubahan keadaan kompartemen (sub-populasi) Q -*Quarantined* atau individu yang terinfeksi kemudian dikarantina.

Faktor yang mempengaruhi perubahan keadaan baik penambahan maupun pengurangan individu dalam sub-populasi Q yaitu.

- (a) Penambahan individu dalam sub-populasi Q dipengaruhi oleh laju individu yang terpapar kemudian dikarantina disimbolkan dengan θ_1 , laju individu yang terinfeksi kemudian dikarantina disimbolkan dengan θ_2 .
- (b) Pengurangan individu dalam sub-populasi Q dipengaruhi oleh laju individu yang dikarantina menjadi sembuh disimbolkan dengan η dan laju kematian individu yang dikarantina disimbolkan dengan ε_3 .

Sehingga dapat dituliskan persamaan model untuk kompartemen Q adalah.

$$\frac{dQ}{dt} = \theta_1 E + \theta_2 I - \eta Q - \varepsilon_3 Q. \tag{4}$$

5. Perubahan keadaan kompartemen (sub-populasi) R -*Recovery* atau individu yang sudah sembuh setelah modifikasi.

Faktor yang mempengaruhi perubahan keadaan baik penambahan maupun pengurangan individu dalam sub-populasi R yaitu.

- (a) Penambahan individu dalam sub-populasi R dipengaruhi oleh laju individu yang terinfeksi menjadi sembuh disimbolkan dengan δ dan laju individu yang dikarantina menjadi sembuh disimbolkan dengan η .
- (b) Pengurangan individu dalam sub-populasi R dipengaruhi oleh laju kematian alami individu sembuh yang disimbolkan dengan μ dan laju individu yang sembuh menjadi rentan kembali yang disimbolkan τ .

Sehingga dapat dituliskan persamaan model untuk kompartemen R adalah.

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \eta Q - \mu R - \tau R. \quad (5)$$

Dapat dirangkum bahwa dari diagram kompartemen Gambar (1) dapat dibentuk sistem persamaan model SEIQR dengan pengaruh keefektifan vaksin pada COVID-19 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - (1 - v)\beta S \frac{I}{N} - \mu S + \rho E + \tau R, \quad (6a)$$

$$\frac{dE}{dt} = (1 - v)\beta S \frac{I}{N} - (\rho + \gamma + \varepsilon_1 + \theta_1)E, \quad (6b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - (\delta + \varepsilon_2 + \theta_2)I, \quad (6c)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \theta_1 E + \theta_2 I - (\eta + \varepsilon_3)Q, \quad (6d)$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \eta Q - (\mu + \tau)R. \quad (6e)$$

Keterangan:

$S(t)$ = Banyaknya populasi yang rentan,

$E(t)$ = Banyaknya populasi yang terpapar tetapi belum terinfeksi,

$I(t)$ = Banyaknya populasi yang sudah terinfeksi,

$Q(t)$ = Banyaknya populasi yang dikarantina,

$R(t)$ = Banyaknya populasi yang sudah sembuh,

μ = Laju kelahiran dan kematian alami,

β = Laju penularan,

ρ = Laju individu yang terpapar menjadi rentan kembali,

δ = Laju pemulihan,

η = Laju individu dikarantina menjadi sembuh,

τ = Laju individu sembuh menjadi rentan kembali,

θ_1 = Laju individu terpapar akan dikarantina,

θ_2 = Laju individu terinfeksi akan dikarantina,

ε_1 = Laju kematian individu terpapar,

ε_2 = Laju kematian individu terinfeksi,

ε_3 = Laju kematian individu dikarantina,

v = Keefektifan vaksin,

Persamaan (6a)–(6e) diubah bentuknya dengan menggunakan permisalan berikut:

$$w = \rho + \gamma + \varepsilon_1 + \theta_1,$$

$$x = \delta + \varepsilon_2 + \theta_2,$$

$$y = \eta + \epsilon_3,$$

$$z = \mu + \tau.$$

Maka sistem Persamaan (6) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \mu N - (1 - \nu)\beta S \frac{I}{N} - \mu S + \rho E + \tau R, \tag{7a}$$

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = (1 - \nu)\beta S \frac{I}{N} - wE, \tag{7b}$$

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \gamma E - xI, \tag{7c}$$

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \theta_1 E + \theta_2 I - yQ, \tag{7d}$$

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = \delta I + \eta Q - zR. \tag{7e}$$

2.2 Linearisasi

Linearisasi merupakan proses transformasi persamaan non-linear menjadi persamaan linear dengan pendekatan untuk membantu pemahaman persamaan diferensial non-linear. Persamaan sistem yang tidak bergantung pada waktu disebut dengan sistem *autonomous* non-linear [10]. Linearisasi sistem Persamaan (7) dengan deret Taylor dapat dilakukan menggunakan matriks Jacobi. Hasil linearisasi dari sistem Persamaan (7) yaitu:

$$\begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{E} \\ \dot{I} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1 - \nu)\beta \frac{I}{N} - \mu & \rho & -(1 - \nu)\beta \frac{S}{N} & 0 & \tau \\ (1 - \nu)\beta \frac{I}{N} & -w & (1 - \nu)\beta \frac{S}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -x & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & \theta_2 & -y & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \eta & -z \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Berdasarkan bentuk matriks Jacobi pada Persamaan (8) dapat dianalisis kestabilan yang diperoleh dengan menemukan nilai eigen dari hasil linearisasi yang akan berbentuk persamaan karakteristik. Kemudian dari persamaan karakteristik tersebut dicari syarat terpenuhi kestabilan dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*.

2.3 Titik Kesetimbangan

Model penyebaran COVID-19 berbentuk sistem persamaan diferensial yang mana untuk mengetahui keadaan setimbang (tidak terjadi perubahan jumlah sub-populasi) dilakukan dengan menyamakan ruas kanan dari Persamaan (7a)–(7e) dengan nol (0). Atau dapat dikatakan titik kesetimbangan dapat diperoleh apabila $\frac{S(t)}{dt} = \frac{E(t)}{dt} = \frac{I(t)}{dt} = \frac{Q(t)}{dt} = \frac{R(t)}{dt} = 0$. Terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

2.3.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit dalam kasus COVID-19 menggunakan model SEIQR dengan pengaruh keefektifan vaksin merupakan kasus ketika tidak ada individu yang terpapar, terinfeksi, dan dikarantina, atau dengan kata lain $E = I = Q = 0$. Titik kesetimbangan bebas penyakit $P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ adalah sebagai berikut:

Dari Persamaan (7e), disubstitusikan $I^* = 0$ dan $Q^* = 0$, maka,

$$\begin{aligned}\delta I^* + \eta Q^* - zR^* &= 0, \\ \delta(0) + \eta(0) - zR^* &= 0 \implies R^* = 0.\end{aligned}$$

Dari Persamaan (7a), disubstitusikan $E^* = 0$, $I^* = 0$, dan $R^* = 0$, maka,

$$\begin{aligned}\mu N - (1 - \nu)\beta S^* \frac{I^*}{N} - \mu S^* + \rho E^* + \tau R^* &= 0, \\ \mu N - (1 - \nu)\beta S^* \frac{0}{N} - \mu S^* + \rho(0) + \tau(0) &= 0, \\ \mu N - \mu S^* &= 0 \implies S^* = N.\end{aligned}$$

Diperoleh titik kesetimbangan satu (bebas penyakit) $P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*) = (N, 0, 0, 0, 0)$.

2.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik pada kasus COVID-19 menggunakan model SEIQR dengan pengaruh keefektifan vaksin merupakan kasus saat terdapat individu yang terpapar, terinfeksi, dan dikarantina dalam sistem, atau dengan kata lain $E \neq I \neq Q \neq 0$. Titik kesetimbangan endemik $P_2 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ adalah sebagai berikut:

Dari Persamaan (7c) diperoleh:

$$\begin{aligned}\gamma E^* - xI^* &= 0, \\ E^* &= \frac{xI^*}{\gamma}.\end{aligned}\tag{9}$$

Substitusikan Persamaan (9) ke Persamaan (7b).

$$\begin{aligned}(1 - \nu)\beta S^* \frac{I^*}{N} - wE^* &= 0, \\ (1 - \nu)\beta S^* \frac{I^*}{N} - w\left(\frac{xI^*}{\gamma}\right) &= 0, \\ I^* = 0 \vee (1 - \nu)\beta \frac{S^*}{N} - \frac{wx}{\gamma} &= 0, \\ S^* &= \frac{wxN}{(1 - \nu)\beta\gamma}.\end{aligned}\tag{10}$$

Substitusikan Persamaan (9) ke Persamaan (7d).

$$\begin{aligned}\theta_1 E^* + \theta_2 I^* - yQ^* &= 0, \\ \theta_1 \left(\frac{xI^*}{\gamma}\right) + \theta_2 I^* - yQ^* &= 0, \\ Q^* &= I^* \left(\frac{\theta_1 x + \theta_2 \gamma}{\gamma y}\right).\end{aligned}\tag{11}$$

Substitusikan Persamaan (11) ke Persamaan (7e).

$$\delta I^* + \eta Q^* - zR^* = 0,$$

$$\delta I^* + \eta \left(I^* \left(\frac{\theta_1 x + \theta_2 \gamma}{\gamma y} \right) \right) - z R^* = 0,$$

$$R^* = I^* \left(\frac{\delta \gamma y + \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)}{\gamma y z} \right). \tag{12}$$

Substitusikan Persamaan (9), (10), dan (12) ke Persamaan (7a).

$$\mu N - (1 - \nu) \beta S^* \frac{I^*}{N} - \mu S^* + \rho E^* + \tau R^* = 0,$$

$$\mu N - (1 - \nu) \beta \left(\frac{wxN}{(1 - \nu) \beta \gamma} \right) \frac{I^*}{N} - \mu \left(\frac{wxN}{(1 - \nu) \beta \gamma} \right) + \rho \left(\frac{xI^*}{\gamma} \right) + \tau \left(I^* \left(\frac{\delta \gamma y + \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)}{\gamma y z} \right) \right) = 0,$$

$$I^* = \left(\frac{(1 - \nu) \beta \gamma \mu N - \mu wxN}{(1 - \nu) \beta} \right) \left(\frac{yz}{yz(wx - \rho x) - \tau \gamma y z - \delta \gamma y - \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)} \right). \tag{13}$$

Substitusikan Persamaan (13) ke Persamaan (9).

$$E^* = \frac{xI^*}{\gamma},$$

$$E^* = \left(\frac{(1 - \nu) \beta \gamma \mu N - \mu wxN}{(1 - \nu) \beta \gamma} \right) \left(\frac{xyz}{yz(wx - \rho x) - \tau \gamma y z - \delta \gamma y - \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)} \right). \tag{14}$$

Substitusikan Persamaan (13) ke Persamaan (11).

$$Q^* = I^* \left(\frac{\theta_1 x + \theta_2 \gamma}{\gamma y} \right),$$

$$Q^* = \left(\frac{(1 - \nu) \beta \gamma \mu N - \mu wxN}{(1 - \nu) \beta \gamma} \right) \left(\frac{z (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)}{yz(wx - \rho x) - \tau \gamma y z - \delta \gamma y - \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)} \right). \tag{15}$$

Substitusikan Persamaan (13) ke Persamaan (12).

$$R^* = I^* \left(\frac{\delta \gamma y + \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)}{\gamma y z} \right),$$

$$R^* = \left(\frac{(1 - \nu) \beta \gamma \mu N - \mu wxN}{(1 - \nu) \beta \gamma} \right) \left(\frac{\delta \gamma y + \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)}{yz(wx - \rho x) - \tau \gamma y z - \delta \gamma y - \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)} \right). \tag{16}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan dua (endemik) yaitu $P_2 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*) =$

$$\left(\frac{wxN}{(1 - \nu) \beta \gamma}, \left(\frac{(1 - \nu) \beta \gamma \mu N - \mu wxN}{(1 - \nu) \beta \gamma} \right) \left(\frac{xyz}{yz(wx - \rho x) - \tau \gamma y z - \delta \gamma y - \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)} \right), \right.$$

$$\left(\frac{(1 - \nu) \beta \gamma \mu N - \mu wxN}{(1 - \nu) \beta} \right) \left(\frac{yz}{yz(wx - \rho x) - \tau \gamma y z - \delta \gamma y - \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)} \right),$$

$$\left(\frac{(1 - \nu) \beta \gamma \mu N - \mu wxN}{(1 - \nu) \beta \gamma} \right) \left(\frac{z (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)}{yz(wx - \rho x) - \tau \gamma y z - \delta \gamma y - \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)} \right),$$

$$\left. \left(\frac{(1 - \nu) \beta \gamma \mu N - \mu wxN}{(1 - \nu) \beta \gamma} \right) \left(\frac{\delta \gamma y + \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)}{yz(wx - \rho x) - \tau \gamma y z - \delta \gamma y - \eta (\theta_1 x + \theta_2 \gamma)} \right) \right).$$

2.4 Analisis Kestabilan

Menentukan kestabilan dari masing-masing titik kesetimbangan dengan mencari nilai eigen dari matriks hasil linearisasi dengan mensubstitusikan terlebih dahulu nilai-nilai parameter dan S, E, I, Q, R dengan S^*, E^*, I^*, Q^*, R^* . Pada Persamaan (8) jika mensubstitusikan S, E, I, Q, R dengan S^*, E^*, I^*, Q^*, R^* , maka persamaannya menjadi:

$$\begin{bmatrix} \dot{S} \\ \dot{E} \\ \dot{I} \\ \dot{Q} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-\nu)\beta \frac{I^*}{N} - \mu & \rho & -(1-\nu)\beta \frac{S^*}{N} & 0 & \tau \\ (1-\nu)\beta \frac{I^*}{N} & -w & (1-\nu)\beta \frac{S^*}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -x & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & \theta_2 & -y & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \eta & -z \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Kemudian menghitung nilai eigen dari masing-masing titik kesetimbangan.

1. Jika titik kesetimbangan satu (bebas penyakit) $P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*) = (N, 0, 0, 0, 0)$ disubstitusikan ke Persamaan (17), maka,

$$J(P_1) = \begin{bmatrix} -\mu & \rho & -(1-\nu)\beta & 0 & \tau \\ 0 & -w & (1-\nu)\beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -x & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & \theta_2 & -y & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \eta & -z \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dan vektor eigen untuk titik kesetimbangan P_1 .

$$\begin{aligned} & |J(P_1) - \lambda I| = 0, \\ & \begin{vmatrix} -\mu - \lambda & \rho & -(1-\nu)\beta & 0 & \tau \\ 0 & -w - \lambda & (1-\nu)\beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -x - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & \theta_2 & -y - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \eta & -z - \lambda \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss segitiga bawah, maka diperoleh hasil determinan.

$$\begin{aligned} & (-\mu - \lambda)(-w - \lambda) \left(\frac{(1-\nu)\beta\gamma - (\lambda + w)(\lambda + x)}{\lambda + w} \right) (-y - \lambda)(-z - \lambda) = 0, \\ & (-\mu - \lambda)(-(1-\nu)\beta\gamma + (\lambda + w)(\lambda + x))(-y - \lambda)(-z - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Diperoleh salah satu nilai eigennya yaitu:

$$\lambda_1 = -\mu.$$

Diperhatikan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} & (-(1-\nu)\beta\gamma + (\lambda + w)(\lambda + x))(-y - \lambda)(-z - \lambda) = 0, \\ & \lambda^4 + \lambda^3(w + x + y + z) + \lambda^2(wx + wy + wz + xy + xz + yz + \beta\gamma\nu - \beta\gamma) \\ & + \lambda(wxy + wxz + wyz + xyz + \beta\gamma\nu y + \beta\gamma\nu z - \beta\gamma y - \beta\gamma z) - \beta\gamma yz + \beta\gamma\nu yz + wxyz = 0. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan karakteristik *Routh-Hurwitz* $p_0\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0$. Maka diketahui:

$$p_0 = 1,$$

$$\begin{aligned}
 p_1 &= w + x + y + z, \\
 p_2 &= wx + wy + wz + xy + xz + yz + \beta\gamma v - \beta\gamma, \\
 p_3 &= wxy + wxz + wyz + xyz + \beta\gamma vy + \beta\gamma vz - \beta\gamma y - \beta\gamma z, \\
 p_4 &= -\beta\gamma yz + \beta\gamma vyz + wxyz.
 \end{aligned}$$

Dapat dibentuk menjadi tabel *Routh* sebagai berikut:

Tabel 1: Tabel *Routh* Titik Keseimbangan P_1

λ^4	p_0	p_2	p_4
λ^3	p_1	p_3	0
λ^2	q_1	q_2	0
λ^1	r_1	0	
λ^0	s_1		

Dengan,

$$\begin{aligned}
 q_1 &= -\frac{p_0p_3 - p_2p_1}{p_1} = \frac{p_2p_1 - p_0p_3}{p_1}, \\
 q_2 &= -\frac{-p_4p_3}{p_3} = \frac{p_4p_3}{p_3}, \\
 r_1 &= -\frac{p_1q_2 - p_3q_1}{q_1} = \frac{p_3q_1 - p_1q_2}{q_1}, \\
 s_1 &= -\frac{-q_2r_1}{r_1} = \frac{q_2r_1}{r_1}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika dan hanya jika $R_0 < 1$ dan juga apabila nilai eigen dari akar-akar bagian real dari persamaan karakteristik bernilai negatif. Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil apabila memenuhi empat kondisi berikut:

- (a) $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 > 0$,
- (b) $p_2p_1 - p_0p_3 > 0$,
- (c) $p_3q_1 - p_1q_2 > 0$,
- (d) $q_2r_1 > 0$.

2. Jika titik kesetimbangan dua (endemik) $P_2 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ disubstitusikan ke Persamaan (17), maka,

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} -(1-v)\beta\frac{I^*}{N} - \mu & \rho & -(1-v)\beta\frac{S^*}{N} & 0 & \tau \\ (1-v)\beta\frac{I^*}{N} & -w & (1-v)\beta\frac{S^*}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -x & 0 & 0 \\ 0 & \theta_1 & \theta_2 & -y & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \eta & -z \end{bmatrix}.$$

Dengan permisalan,

$$\begin{aligned}
 A &= -(1-v)\beta\frac{I^*}{N} - \mu, & X &= \gamma, & Y &= -x, & M &= \eta, \\
 B &= (1-v)\beta\frac{I^*}{N}, & F &= \theta_1, & Z &= \theta_2, & N &= \tau,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \rho, & G &= -(1-\nu)\beta \frac{S^*}{N}, & K &= \delta, & O &= -z. \\
D &= -w, & H &= (1-\nu)\beta \frac{S^*}{N}, & L &= -y,
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$J(P_2) = \begin{bmatrix} A & C & G & 0 & N \\ B & D & H & 0 & 0 \\ 0 & X & Y & 0 & 0 \\ 0 & F & Z & L & 0 \\ 0 & 0 & K & M & O \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dan vektor eigen untuk titik kesetimbangan P_2 .

$$\begin{aligned}
& |J(P_2) - \lambda I| = 0, \\
& \begin{vmatrix} A - \lambda & C & G & 0 & N \\ B & D - \lambda & H & 0 & 0 \\ 0 & X & Y - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & F & Z & L - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & K & M & O - \lambda \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss segitiga bawah, maka diperoleh hasil determinan.

$$\begin{aligned}
& (A - \lambda) \left(\frac{-BC + (A - \lambda)(D - \lambda)}{A - \lambda} \right) \left(\frac{(BC - (A - \lambda)(D - \lambda))(Y - \lambda) + X(-BG + H(A - \lambda))}{BC - (A - \lambda)(D - \lambda)} \right) (L - \lambda) \\
& \left(\frac{\left((O - \lambda)(BC - (A - \lambda)(D - \lambda)(Y - \lambda) + X(-BG + H(A - \lambda))) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + KBNX \right) (L - \lambda) - M((Y - \lambda)(-BFN) + ZBNX)}{(BC - (A - \lambda)(D - \lambda))(Y - \lambda) + X(-BG + H(A - \lambda))(L - \lambda)} \right) = 0, \\
& \lambda^5 + \lambda^4(-A - D - L - O - Y) + \lambda^3(-BC + AD + AL + DL + AO + DO + OL + YA \\
& \quad + YD + YL + YO - XH) + \lambda^2(BCL - ADL + BCO - ADO - AOL - DOL + YBC \\
& \quad - YAD - YAL - YDL - YAO - YDO - YOL - XBG + XHA + XHL + XHO) \\
& \quad + \lambda(-BFMN - BCOL + ADOL - YBCL + YADL - YBCO + YADO + YAOL \\
& \quad + YDOL + XBGL - XHAL - KBNX + XBGO - XHAO - XHOL) + (BFMNY \\
& \quad + YBCOL - YADOL + KBNXL - BZMNX - XBGOL + XHAOL) = 0.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan karakteristik *Routh-Hurwitz* $p_0\lambda^5 + p_1\lambda^4 + p_2\lambda^3 + p_3\lambda^2 + p_4\lambda + p_5 = 0$. Maka diketahui:

$$p_0 = 1,$$

$$p_1 = -A - D - L - O - Y,$$

$$p_2 = -BC + AD + AL + DL + AO + DO + OL + YA + YD + YL + YO - XH,$$

$$p_3 = BCL - ADL + BCO - ADO - AOL - DOL + YBC - YAD - YAL - YDL - YAO$$

$$\begin{aligned}
 & -YDO - YOL - XBG + XHA + XHL + XHO, \\
 p_4 = & -BFMN - BCOL + ADOL - YBCL + YADL - YBCO + YADO + YAOL + YDOL \\
 & + XBGL - XHAL - KBNX + XBGO - XHAO - XHOL, \\
 p_5 = & BFMNY + YBCOL - YADOL + KBNXL - BZMNX - XBGOL + XHAOL.
 \end{aligned}$$

Dapat dibentuk menjadi tabel *Routh* sebagai berikut:

Tabel 2: Tabel *Routh* Titik Kesetimbangan P_2

λ^5	p_0	p_2	p_4
λ^4	p_1	p_3	p_5
λ^3	q_1	q_2	0
λ^2	r_1	r_2	0
λ^1	s_1	0	
λ^0	t_1		

Dengan,

$$\begin{aligned}
 q_1 &= -\frac{p_0p_3 - p_2p_1}{p_1} = \frac{p_2p_1 - p_0p_3}{p_1}, \\
 q_2 &= -\frac{p_2p_5 - p_4p_3}{p_3} = \frac{p_4p_3 - p_2p_5}{p_3}, \\
 r_1 &= -\frac{p_1q_2 - p_3q_1}{q_1} = \frac{p_3q_1 - p_1q_2}{q_1}, \\
 r_2 &= -\frac{-p_5q_2}{q_2} = \frac{p_5q_2}{q_2}, \\
 s_1 &= -\frac{q_1r_2 - q_2r_1}{r_1} = \frac{q_2r_1 - q_1r_2}{r_1}, \\
 t_1 &= -\frac{-r_2s_1}{s_1} = \frac{r_2s_1}{s_1}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Titik kesetimbangan endemik akan stabil jika dan hanya jika $R_0 > 1$ dan juga apabila nilai eigen dari akar-akar bagian real dari persamaan karakteristik bernilai negatif. Sehingga titik kesetimbangan endemik akan stabil apabila memenuhi lima kondisi berikut:

- (a) $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 > 0$,
- (b) $p_2p_1 - p_0p_3 > 0$,
- (c) $p_3q_1 - p_1q_2 > 0$,
- (d) $q_2r_1 - q_1r_2 > 0$,
- (e) $r_2s_1 > 0$.

2.5 Bilangan Reproduksi Dasar

Perhitungan bilangan reproduksi dasar (R_0) dilakukan dengan menggunakan metode matriks *next generation* dari sistem persamaan model yang telah terbentuk seperti pada sistem Persamaan (7). Pada sistem ini yang termasuk kelas terinfeksi ialah individu pada kelas terpapar (E), teinfeksi (I), dan dikarantina (Q). Sehingga diperoleh:

$$u = \begin{bmatrix} E(t) \\ I(t) \\ Q(t) \end{bmatrix}$$

Sehingga diketahui laju infeksi yang menambah kelas terinfeksi (ϕ) dan laju infeksi yang mengurangi kelas terinfeksi (ψ) adalah sebagai berikut:

$$\phi = \begin{bmatrix} (1-v)\beta S \frac{I}{N} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} wE \\ -\gamma E + xI \\ -\theta_1 E - \theta_2 I + yQ \end{bmatrix}.$$

Diperoleh matriks F dan V yang dibentuk melalui matriks Jacobi dari ϕ dan ψ terhadap u sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & (1-v)\beta \frac{S}{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 \\ -\gamma & x & 0 \\ -\theta_1 & -\theta_2 & y \end{bmatrix}.$$

Kemudian matriks *next generation* didapat dengan

$$\begin{aligned} K = FW^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & (1-v)\beta \frac{S}{N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{w} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{wx} & \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{\gamma\theta_2 + \theta_1 x}{wxy} & \frac{\theta_2}{xy} & \frac{1}{y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(1-v)\beta\gamma S}{wxN} & \frac{(1-v)\beta S}{xN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dari nilai eigen dominan *next generation*. Sehingga,

$$\begin{aligned} |K - \lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{(1-v)\beta\gamma S}{wxN} - \lambda & \frac{(1-v)\beta S}{xN} & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ \left(\frac{(1-v)\beta\gamma S}{wxN} - \lambda \right) (-\lambda)(-\lambda) &= 0, \\ \lambda_{1,2} = 0 \quad \vee \quad \lambda_3 &= \frac{(1-v)\beta\gamma S}{wxN}. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{(1-v)\beta\gamma S}{wxN}. \quad (20)$$

2.6 Simulasi Numerik

Penyelesaian secara numerik dari model penyebaran COVID-19 yang bentuk sistem persamaannya ditunjukkan pada sistem Persamaan (6) menggunakan metode numerik *Runge-Kutta* orde empat. Nilai awal dari masing-masing variabel dan parameter ditunjukkan pada Tabel (3).

Sistem Persamaan (6) jika dibentuk menjadi skema numerik *Runge-Kutta* dapat dituliskan:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{h}{6} (m_{1S} + 2m_{2S} + 2m_{3S} + m_{4S}), \quad (21a)$$

$$E_{n+1} = E_n + \frac{h}{6} (m_{1E} + 2m_{2E} + 2m_{3E} + m_{4E}), \tag{21b}$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{h}{6} (m_{1I} + 2m_{2I} + 2m_{3I} + m_{4I}), \tag{21c}$$

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{h}{6} (m_{1Q} + 2m_{2Q} + 2m_{3Q} + m_{4Q}), \tag{21d}$$

$$R_{n+1} = R_n + \frac{h}{6} (m_{1R} + 2m_{2R} + 2m_{3R} + m_{4R}). \tag{21e}$$

Dengan,

$$m_{1S} = \mu N - (1 - \nu)\beta S_n \frac{I_n}{N} - \mu S_n + \rho E_n + \tau R_n, \\ m_{1E} = (1 - \nu)\beta S_n \frac{I_n}{N} - (\rho + \gamma + \varepsilon_1 + \theta_1)E_n, \tag{22a}$$

$$m_{1I} = \gamma E_n - (\delta + \varepsilon_2 + \theta_2)I_n, \\ m_{1Q} = \theta_1 E_n + \theta_2 I_n - (\eta + \varepsilon_3)Q_n, \\ m_{1R} = \delta I_n + \eta Q_n - (\mu + \tau)R_n, \\ m_{2S} = \mu N - (1 - \nu)\beta \left(S_n + \frac{p_{1S}}{2} \right) \frac{\left(I_n + \frac{p_{1I}}{2} \right)}{N} - \mu \left(S_n + \frac{p_{1S}}{2} \right) + \rho \left(E_n + \frac{p_{1E}}{2} \right) + \tau \left(R_n + \frac{p_{1R}}{2} \right), \\ m_{2E} = (1 - \nu)\beta \left(S_n + \frac{p_{1S}}{2} \right) \frac{\left(I_n + \frac{p_{1I}}{2} \right)}{N} - (\rho + \gamma + \varepsilon_1 + \theta_1) \left(E_n + \frac{p_{1E}}{2} \right), \\ m_{2I} = \gamma \left(E_n + \frac{p_{1E}}{2} \right) - (\delta + \varepsilon_2 + \theta_2) \left(I_n + \frac{p_{1I}}{2} \right), \\ m_{2Q} = \theta_1 \left(E_n + \frac{p_{1E}}{2} \right) + \theta_2 \left(I_n + \frac{p_{1I}}{2} \right) - (\eta + \varepsilon_3) \left(Q_n + \frac{p_{1Q}}{2} \right), \\ m_{2R} = \delta \left(I_n + \frac{p_{1I}}{2} \right) + \eta \left(Q_n + \frac{p_{1Q}}{2} \right) - (\mu + \tau) \left(R_n + \frac{p_{1R}}{2} \right), \tag{22b}$$

$$m_{3S} = \mu N - (1 - \nu)\beta \left(S_n + \frac{p_{2S}}{2} \right) \frac{\left(I_n + \frac{p_{2I}}{2} \right)}{N} - \mu \left(S_n + \frac{p_{2S}}{2} \right) + \rho \left(E_n + \frac{p_{2E}}{2} \right) + \tau \left(R_n + \frac{p_{2R}}{2} \right), \\ m_{3E} = (1 - \nu)\beta \left(S_n + \frac{p_{2S}}{2} \right) \frac{\left(I_n + \frac{p_{2I}}{2} \right)}{N} - (\rho + \gamma + \varepsilon_1 + \theta_1) \left(E_n + \frac{p_{2E}}{2} \right), \\ m_{3I} = \gamma \left(E_n + \frac{p_{2E}}{2} \right) - (\delta + \varepsilon_2 + \theta_2) \left(I_n + \frac{p_{2I}}{2} \right), \\ m_{3Q} = \theta_1 \left(E_n + \frac{p_{2E}}{2} \right) + \theta_2 \left(I_n + \frac{p_{2I}}{2} \right) - (\eta + \varepsilon_3) \left(Q_n + \frac{p_{2Q}}{2} \right), \\ m_{3R} = \delta \left(I_n + \frac{p_{2I}}{2} \right) + \eta \left(Q_n + \frac{p_{2Q}}{2} \right) - (\mu + \tau) \left(R_n + \frac{p_{2R}}{2} \right), \tag{22c}$$

$$m_{4S} = \mu N - (1 - \nu)\beta (S_n + p_{3S}) \frac{(I_n + p_{3I})}{N} - \mu (S_n + p_{3S}) + \rho (E_n + m_{3E}) + \tau (R_n + p_{3R}), \\ m_{4E} = (1 - \nu)\beta (S_n + p_{3S}) \frac{(I_n + p_{3I})}{N} - (\rho + \gamma + \varepsilon_1 + \theta_1) (E_n + p_{3E}), \\ m_{4I} = \gamma (E_n + p_{3E}) - (\delta + \varepsilon_2 + \theta_2) (I_n + p_{3I}), \\ m_{4Q} = \theta_1 (E_n + p_{3E}) + \theta_2 (I_n + p_{3I}) - (\eta + \varepsilon_3) (Q_n + p_{3Q}), \\ m_{4R} = \delta (I_n + p_{3I}) + \eta (Q_n + p_{3Q}) - (\mu + \tau) (R_n + p_{3R}). \tag{22d}$$

3 Metode Penelitian

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian kuantitatif merupakan jenis penelitian yang akan digunakan dalam penelitian ini karena penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan permasalahan melalui pengumpulan, pengolahan, serta analisis dan penyajian data. Data yang dikumpulkan berupa data numerik atau berbentuk angka yang akan diolah, dianalisis, dan disajikan dengan menggunakan teori-teori yang sudah ada dan juga dengan metode matematika.

3.2 Sumber Data

Dalam penelitian ini data diperoleh dari publikasi pemerintah maupun jurnal penelitian lain. Data-data yang diperoleh dari publikasi pemerintah yang merupakan data kependudukan dan data COVID-19 di Jawa Timur yang beberapa digunakan sebagai nilai awal variabel diantaranya adalah sebagai berikut [11, 12]:

1. Populasi penduduk Jawa Timur (N) sebanyak 40,994,615 jiwa.
2. Populasi individu terpapar ($E(0)$) sebanyak 503,911 jiwa.
3. Populasi individu terinfeksi ($I(0)$) sebanyak 135,388 jiwa.
4. Populasi individu dikarantina ($Q(0)$) sebanyak 59,638 jiwa.
5. Populasi individu sembuh ($R(0)$) sebanyak 81,289 jiwa.
6. Populasi individu rentan ($S(0) = N - (E(0) + I(0) + Q(0) + R(0))$) sebanyak 40,214,389 jiwa.

Data dari jurnal penelitian lain yaitu data nilai-nilai parameter berdasarkan virus SARS dan beberapa dari publikasi pemerintah menjadi nilai parameter yang disajikan pada Tabel (3) berikut:

Tabel 3: Nilai Parameter COVID-19

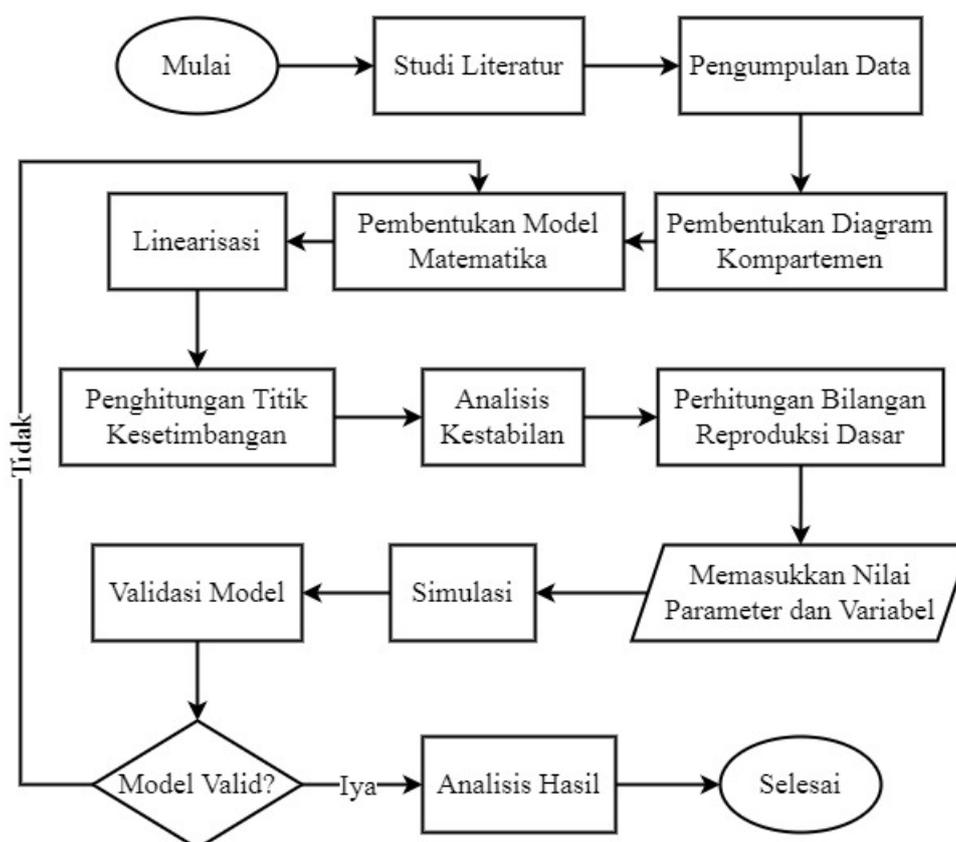
Para meter	Nilai	Sumber	Para meter	Nilai	Sumber	Para meter	Nilai	Sumber
μ	2.23×10^{-3}	[11]	θ_1	0.2000	[13]	v_1	0.6530	[14]
β	1.78×10^{-9}	[12]	θ_2	0.2000	[13]	v_2	0.6210	[15]
ρ	0.2000	[13]	ε_1	0.0035	[12]	v_3	0.7802	[16]
γ	0.1972	[8]	ε_2	0.0860	[12]	v_4	0.9410	[17]
η	0.1000	[13]	ε_3	0.0264	[18]	v_5	0.9550	[19]
τ	0.0111	[13]	δ	0.0714	[8]			

3.3 Kerangka Pemikiran

Agar terarah dan terstruktur dengan baik, maka beberapa tahapan untuk menganalisis data dapat disajikan pada diagram alir seperti pada Gambar (2):

Berdasarkan Gambar (2), maka langkah-langkah dalam penelitian ini dapat dijabarkan sebagai berikut:

1. **Studi Literatur:** Studi literatur mengenai COVID-19 dan model SEIQR beserta berbagai pengembangannya melalui buku atau jurnal penelitian terdahulu yang dilakukan untuk membantu dalam pembentukan batasan dan asumsi-asumsi yang akan digunakan pada model matematika.



Gambar 2: Diagram Alir Tahapan Penelitian

2. **Pengumpulan Data:** Data sesuai dengan model dan asumsi-asumsi yang dibentuk diperoleh dari web dan jurnal-jurnal terdahulu yaitu oleh [8] dan oleh [20]. Data yang digunakan untuk nilai variabel dan beberapa parameter COVID-19 di Jawa Timur mulai tanggal 1 Juli 2021 hingga 31 Juli 2021 yang diperoleh melalui akses website [12]. Sedangkan data kematian individu dikarantina diperoleh dari [18] dan data populasi dan kematian di Jawa Timur diperoleh melalui akses website [11].
3. **Pembentukan Model SEIQR dengan Keefektifan Vaksin pada Penyebaran COVID-19:** Pembentukan model dilakukan dengan terlebih dahulu membuat asumsi, kemudian membentuk diagram kompartemen dari hubungan antar sub-populasi berdasarkan asumsi yang terbentuk. Diagram kompartemen dari model SEIQR dengan pengaruh keefektifan vaksin disajikan pada Gambar (1). Setelah itu model matematika dibuat dan disusun dalam bentuk sistem persamaan diferensial non-linear, yang dituliskan pada persamaan (7).
4. **Linearisasi:** Masing-masing model matematika yang berbentuk sistem persamaan diferensial non-linear diubah menjadi bentuk sistem persamaan diferensial linear terlebih dahulu dengan linearisasi menggunakan matriks Jacobi hingga diperoleh sistem persamaan dalam bentuk persamaan (8).
5. **Perhitungan Titik Keseimbangan:** Titik kesetimbangan endemik dan bebas penyakit dapat dicari dengan membuat ruas kiri sama dengan 0. Titik kesetimbangan endemik diperoleh apabila $E = I = Q = 0$, sedangkan titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh apabila $E \neq I \neq Q \neq 0$.

6. **Analisis Kestabilan dari Titik Kesetimbangan:** Analisis kestabilan dari tiap titik kesetimbangan dapat diketahui melalui nilai eigen pada matriks Jacobian yang didapatkan dari persamaan karakteristiknya. Kemudian dari persamaan karakteristik tersebut dicari syarat terpenuhi kestabilan dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*.
7. **Simulasi:** Simulasi dijalankan dengan menerapkan metode numerik *Runge-Kutta* orde empat untuk memperoleh penyelesaian numerik dan untuk mengetahui dari tiap-tiap sub-populasi bagaimana pola penyebarannya berdasarkan model dengan mensubstitusi nilai-nilai parameter. Persamaan (7) disimulasikan dengan metode numerik *Runge-Kutta* orde empat dalam bentuk persamaan seperti pada persamaan (22) dan memasukkan nilai parameter dan variabel.
8. **Analisis Hasil:** Analisis hasil dilakukan dengan membandingkan hasil simulasi dari sub-populasi terpapar dan sub-populasi yang terinfeksi berdasarkan model SEIQR dengan pengaruh berberapa varian vaksin yang memiliki keefektifan yang berbeda-beda untuk mengetahui pada titik berapa COVID-19 berhenti menyebar.

4 Hasil dan Pembahasan

4.1 Analisis Kestabilan

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (P_1).

Rumus pada kolom pertama Tabel (1) tidak terdapat variabel, maka nilai titik kesetimbangan bebas penyakit (P_1) tidak perlu disubstitusikan ke persamaan (18). Sehingga,

- (a) Vaksin Sinovac ($v = 0.653$). Diperoleh nilai $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 > 0$ dan $q_1, q_2, r_1, s_1 > 0$ yang memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_1 . Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit dengan vaksin Sinovac adalah stabil.
- (b) Vaksin AstraZeneca ($v = 0.621$). Diperoleh nilai $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 > 0$ dan $q_1, q_2, r_1, s_1 > 0$ yang memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_1 . Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit dengan vaksin AstraZeneca adalah stabil.
- (c) Vaksin Sinopharm ($v = 0.7802$). Diperoleh nilai $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 > 0$ dan $q_1, q_2, r_1, s_1 > 0$ yang memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_1 . Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit dengan vaksin Sinopharm adalah stabil.
- (d) Vaksin Moderna ($v = 0.941$). Diperoleh nilai $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 > 0$ dan $q_1, q_2, r_1, s_1 > 0$ yang memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_1 . Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit dengan vaksin Moderna adalah stabil.
- (e) Vaksin Pfizer ($v = 0.955$). Diperoleh nilai $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 > 0$ dan $q_1, q_2, r_1, s_1 > 0$ yang memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_1 . Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit dengan vaksin Pfizer adalah stabil.

Berdasarkan pembahasan tersebut dapat diketahui bahwa titik kestabilan bebas penyakit dengan lima jenis vaksin tersebut adalah stabil. Sehingga dapat dikatakan bahwa COVID-19 semakin menurun dan seiring waktu akan menghilang.

2. Titik Kesetimbangan Endemik (P_2).

Nilai dari titik kesetimbangan endemik (P_2) disubstitusikan ke sistem persamaan (19). Sehingga diperoleh,

- (a) Vaksin Sinovac ($v = 0.653$). Diperoleh nilai $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 > 0$ dan $q_1, q_2, r_1, s_1 > 0$ yang memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_2 . Sehingga titik kesetimbangan endemik dengan vaksin Sinovac adalah stabil.
- (b) Vaksin AstraZeneca ($v = 0.621$). Diperoleh nilai $p_0, p_1 > 0$ dan $q_2, r_1, s_1 > 0$ sedangkan $p_2, p_3, p_4 < 0$ dan $q_1, r_2, t_1 < 0$ yang tidak memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_2 . Sehingga titik kesetimbangan endemik dengan vaksin AstraZeneca adalah tidak stabil.
- (c) Vaksin Sinopharm ($v = 0.7802$). Diperoleh nilai $p_0, p_1 > 0$ dan $q_2, r_1, s_1 > 0$ sedangkan $p_2, p_3, p_4 < 0$ dan $q_1, r_2, t_1 < 0$ yang tidak memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_2 . Sehingga titik kesetimbangan endemik dengan vaksin Sinopharm adalah tidak stabil.
- (d) Vaksin Moderna ($v = 0.941$). Diperoleh nilai $p_0, p_1 > 0$ dan $q_2, r_1, s_1 > 0$ sedangkan $p_2, p_3, p_4 < 0$ dan $q_1, r_2, t_1 < 0$ yang tidak memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_2 . Sehingga titik kesetimbangan endemik dengan vaksin Moderna adalah tidak stabil.
- (e) Vaksin Pfizer ($v = 0.955$). Diperoleh nilai $p_0, p_1 > 0$ dan $q_2, r_1, s_1 > 0$ serta $p_2, p_3, p_4 < 0$ dan $q_1, r_2, t_1 < 0$ yang tidak memenuhi syarat stabil kriteria *Routh-Hurwitz* P_2 . Sehingga titik kesetimbangan endemik dengan vaksin Moderna adalah tidak stabil.

Berdasarkan pembahasan tersebut dapat diketahui bahwa semakin besar nilai keefektifan vaksinya, maka titik kestabilan endemik semakin tidak stabil yang mana kondisi penyebaran penyakit tidak mendekati titik nol. Sehingga dapat dikatakan bahwa semakin besar nilai keefektifan vaksin, maka COVID-19 semakin menurun dan seiring waktu akan menghilang.

4.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Nilai-nilai parameter dan variabel disubstitusikan ke Persamaan (20). Sehingga diperoleh hasil bilangan reproduksi dasar (R_0) dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik yang disajikan pada Tabel (4) di bawah.

Tabel 4: Hasil Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) dari Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit (P_1) dan Titik Kesetimbangan Endemik (P_2)

Vaksin	R_0 Bebas Penyakit (P_1)	R_0 Endemik (P_2)
Sinovac ($v = 0.653$)	0.6×10^{-9}	2.0554
AstraZeneca ($v = 0.621$)	0.6×10^{-9}	2.2450
Sinopharm ($v = 0.7802$)	0.4×10^{-9}	1.3020
Moderna ($v = 0.941$)	0.9×10^{-10}	0.3495
Pfizer ($v = 0.955$)	0.7×10^{-10}	0.2666

Berdasarkan Tabel (4) dapat diketahui bahwa nilai R_0 dari setiap vaksin dengan keefektifan yang berbeda adalah kurang dari 1 ($R_0 < 1$), sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil yang mana kondisi penyebaran penyakit semakin mendekati titik nol. Kemudian seiring berjalannya waktu penyakit akan menghilang.

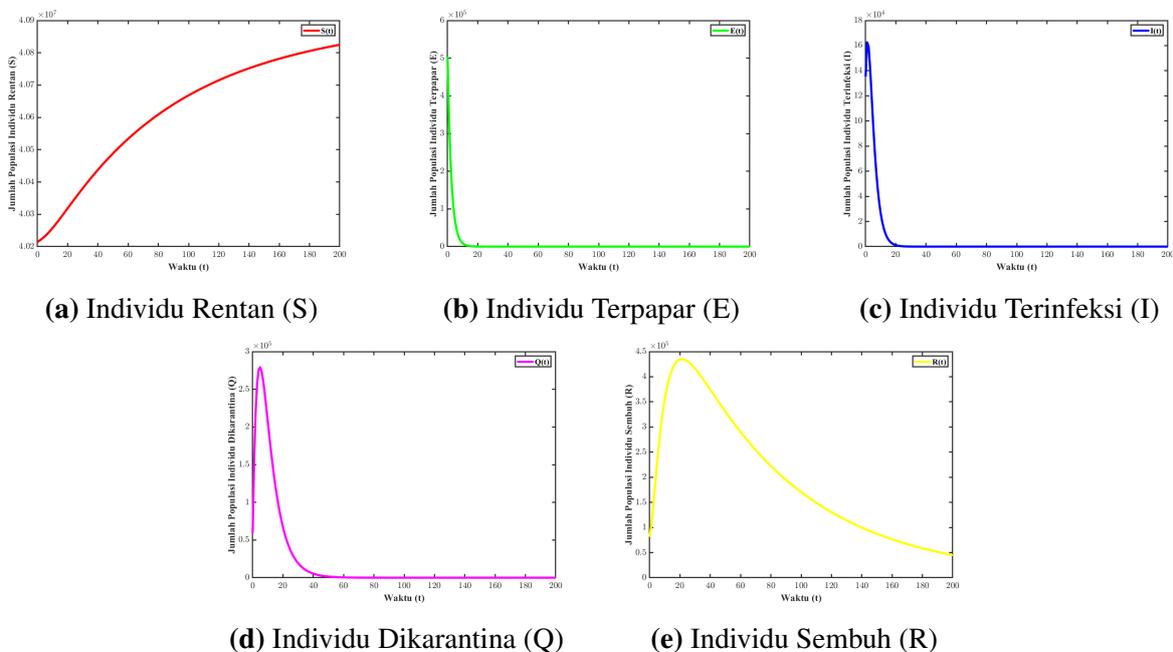
Selain itu, berdasarkan Tabel (4) juga dapat diketahui bahwa nilai R_0 dari vaksin dengan keefektifan 65,3%, 62.1%, dan 78,02% adalah lebih dari 1 ($R_0 > 1$), sehingga titik

kesetimbangan endemik adalah stabil. Maka dapat dikatakan bahwa penyakit menjadi endemik dan populasi terinfeksi akan semakin meningkat. Sedangkan untuk nilai R_0 dari vaksin dengan keefektifan 94,1% dan 95,5% adalah kurang dari 1 ($R_0 < 1$), sehingga titik kesetimbangan endemik adalah tidak stabil. Maka dapat dikatakan bahwa penyakit akan menghilang seiring berjalannya waktu.

Nilai R_0 juga dapat diartikan bahwa dengan vaksin Sinovac (65,3%) atau vaksin AstraZeneca (62,1%), satu orang yang terinfeksi COVID-19 dapat menularkan kepada 2 hingga 3 orang lain yang sehat. Jika dengan vaksin Sinopharm (62,1%) satu orang yang terinfeksi COVID-19 dapat menularkan kepada 1 hingga 2 orang yang sehat. Sedangkan apabila dengan vaksin Moderna (94,1%) atau vaksin Pfizer (95,5%) maka satu orang yang terinfeksi dapat menularkan kepada 1 orang sehat atau bahkan tidak menularkan COVID-19.

4.3 Simulasi Numerik

Persamaan (21) disimulasikan dengan bantuan *software* MATLAB 2020 sehingga menghasilkan grafik sebagai berikut:



Gambar 3: Dinamika Perubahan Populasi pada Penyebaran COVID-19 Model SEIQR dengan Pengaruh Keefektifan Vaksin 62,1% (AstraZeneca)

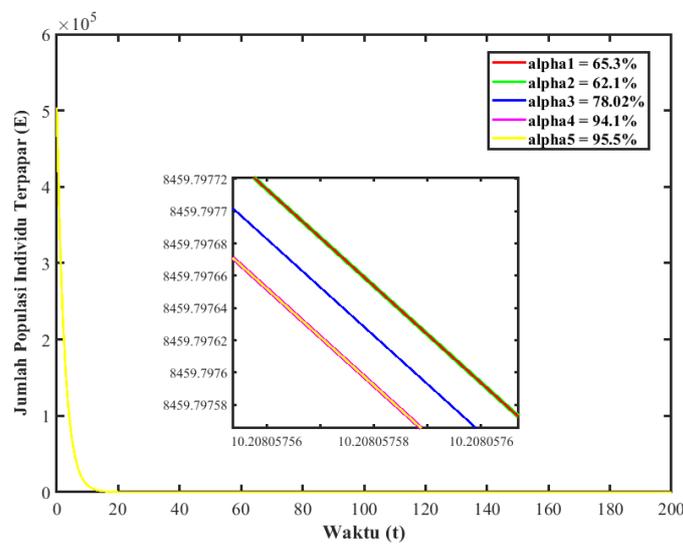
Berdasarkan Gambar (3a) jumlah individu dari sub-populasi rentan COVID-19 mengalami peningkatan karena adanya penambahan individu dari kelahiran dan dari sub-populasi terpapar menjadi rentan kembali, serta dari sub-populasi yang sudah sembuh dari COVID-19 (R) sehingga jumlah individu pada sub-populasi rentan COVID-19 terus bertambah hingga pada hari ke-200 diketahui jumlah sub-populasi rentan adalah 40,823,971 jiwa. Pada Gambar (3b) dapat diketahui bahwa sub-populasi yang terpapar COVID-19 mengalami peningkatan jumlah dan kemudian menurun menuju nol yang disebabkan oleh kematian alami dan individu yang berpindah ke sub-populasi dikarantina dan terinfeksi.

Sedangkan dari Gambar (3c) dapat dilihat bahwa sub-populasi yang terinfeksi COVID-19 juga mengalami kenaikan yang kemudian menurun menuju nol karena kematian alami dan

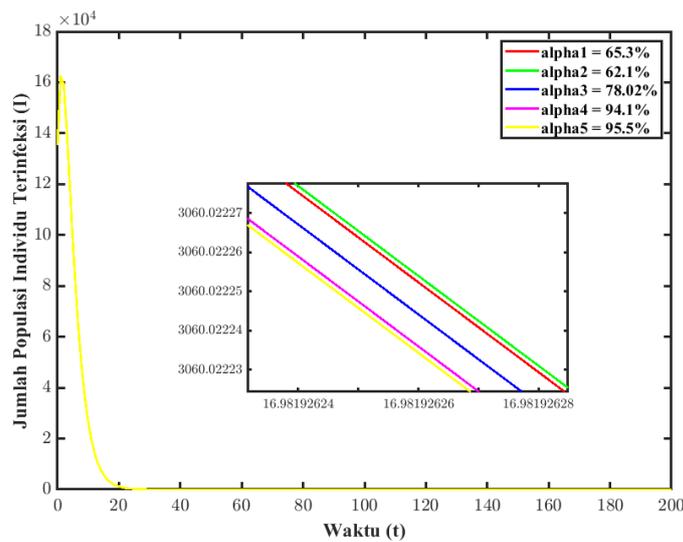
individu yang berpindah ke sub-populasi dikarantina dan sembuh dari COVID-19. Jika dilihat pada Gambar (3d), jumlah individu yang dikarantina mengalami kenaikan dan kemudian menurun menuju nilai nol dikarenakan adanya kematian alami dan individu yang berpindah ke sub-populasi sembuh.

Dan berdasarkan Gambar (3e), jumlah individu pada sub-populasi sembuh mengalami peningkatan hingga titik kesetimbangannya yang diakibatkan oleh transfer masuk dari sub-populasi terinfeksi dan dikarantina. Setelah meningkat hingga mencapai titik kesetimbangan, sub-populasi sembuh mengalami penurunan jumlah karena kematian alami dan karena individu yang sembuh dapat rentan kembali (transfer dari sub-populasi sembuh ke sub-populasi rentan).

Hasil perbandingan dinamika populasi individu yang terpapar (E) dan individu yang terinfeksi (I) dengan menggunakan pengaruh lima keefektifan vaksin yang berbeda dapat disajikan pada Gambar (4) berikut:



(a) Populasi Individu yang Terpapar



(b) Populasi Individu yang Terinfeksi

Gambar 4: Perbandingan Dinamika Populasi Individu yang Terpapar dan Terinfeksi dengan Keefektifan Vaksin yang berbeda ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4,$ dan α_5)

Berdasarkan grafik pada Gambar (4a) diketahui bahwa setelah mencapai titik kesetimbangannya, semakin tinggi tingkat keefektifan vaksin, maka jumlah individu yang terpapar semakin rendah. Jumlah populasi yang terinfeksi mencapai titik kesetimbangan pada hari ke-0 dengan individu terinfeksi adalah sekitar 503.911 individu dan kemudian menurun semakin mendekati nol, dan jika diasumsikan dengan menggunakan 5 digit angka dibelakang koma, maka jumlah individu yang terpapar COVID-19 tidak ada lagi dalam populasi pada hari ke-61 (sekitar 2 bulan) atau setelah tanggal 30 September 2021.

Berdasarkan grafik pada Gambar (4b) diketahui bahwa setelah mencapai titik kesetimbangannya, semakin tinggi tingkat keefektifan vaksin, maka jumlah orang yang terinfeksi semakin rendah. Jumlah populasi yang terinfeksi mencapai titik kesetimbangan pada hari ke-1 dengan banyak individu terinfeksi adalah sekitar 162.622 individu dan kemudian menurun semakin mendekati nol, dan jika diasumsikan dengan menggunakan 5 digit angka dibelakang koma, maka jumlah individu yang terinfeksi COVID-19 tidak ada lagi dalam populasi setelah hari ke-73 (sekitar 2 bulan) atau setelah tanggal 12 Oktober 2021.

5 Kesimpulan

Model penyebaran COVID-19 menggunakan model SEIQR dengan pengaruh keefektifan vaksin di Jawa Timur adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= \mu N - (1 - v)\beta \frac{I}{N} S - \mu S + \rho E + \tau R \\ E &= (1 - v)\beta \frac{I}{N} S - (\rho + \gamma + \varepsilon_1 + \theta_1)E \\ I &= \gamma E - (\delta + \varepsilon_2 + \theta_2)I \\ Q &= \theta_1 E + \theta_2 I - (\eta + \varepsilon_3)Q \\ R &= \delta I + \eta Q - (\mu + \tau)R \end{aligned}$$

Hasil bilangan reproduksi dasar dan analisis kestabilan menunjukkan bahwa dengan menggunakan keefektifan vaksin lebih rendah seperti vaksin Sinovac, AstraZeneca, atau Sinopharm, individu terinfeksi COVID-19 akan terus ada dalam populasi. Sedangkan dengan keefektifan vaksin tinggi seperti vaksin Moderna atau Pzizer, maka COVID-19 akan menghilang seiring waktu. Dengan artian bahwa semakin besar nilai keefektifan vaksinnya, maka titik kestabilan endemik semakin tidak stabil.

Dinamika populasi berdasarkan hasil simulasi menunjukkan bahwa tidak ada lagi individu yang terpapar COVID-19 pada sekitar hari ke-61 atau setelah tanggal 30 September 2021 dan tidak ada lagi individu yang terinfeksi COVID-19 setelah hari ke-73 atau setelah tanggal 12 Oktober 2021. Selain itu, diketahui juga apabila semakin tinggi keefektifan vaksin, maka jumlah individu terpapar dan individu yang terinfeksi semakin rendah, sedangkan jumlah individu yang sembuh semakin tinggi.

Referensi

- [1] J. Zhong, J. Tang, C. Ye, and L. Dong, "The Immunology of COVID-19: Is Immune Modulation an Option for Treatment?," *The Lancet Rheumatology*, vol. 2, no. 7, pp. 428–436, 2020.
- [2] A. Susilo, C. M. Rumende, C. W. Pitoyo, W. D. Santoso, M. Yulianti, H. Herikurniawan, and E. Yuniastuti, "Coronavirus Disease 2019: Review of Current Literatures," *Jurnal penyakit dalam Indonesia*, vol. 7, no. 1, pp. 45–64, 2020.
- [3] R. Resmawan and N. Nurwan, "Konstruksi Bilangan Reproduksi Dasar pada Model Epidemik SEIRS-SEI Penyebaran Malaria dengan Vaksinasi dan Pengobatan," *Jurnal Matematika Integratif*, vol. 13, no. 2, pp. 105–114, 2017.
- [4] N. Mulyani, R. Ratianingsih, and N. Nacong, "Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Penyakit Sifilis pada Manusia," *Jurnal Ilmiah Matematika Dan Terapan*, vol. 15, no. 1, pp. 1–10, 2018.
- [5] M. Elhia, O. Balatif, L. Boujallal, and M. Rachik, "Optimal Control Problem for a Tuberculosis Model with Multiple Infectious Compartments and Time Delays," *An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications (IJOCTA)*, vol. 11, no. 1, pp. 75–91, 2021.
- [6] F. Adi-Kusumo, N. Susyanto, I. Endrayanto, and A. Meliala, "Model Berbasis SIR dalam Prediksi Awal Penyebaran COVID-19 di Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY)," *Jurnal Matematika Thales*, vol. 2, no. 1, 2020.
- [7] G. Puspita, M. Kharis, and S. Supriyono, "Pemodelan Matematika Pada Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Pengaruh Karantina Dan Vaksinasi," *Unnes Journal of Mathematics*, vol. 6, no. 1, pp. 25–35, 2017.
- [8] R. Ghostine, M. Gharamti, S. Hassrouny, and I. Hoteit, "An Extended SEIR Model with Vaccination for Forecasting the COVID-19 Pandemic in Saudi Arabia Using an Ensemble Kalman Filter," *Mathematics*, vol. 9, no. 6, p. 636, 2021.
- [9] G. O. Fosu, J. M. Opong, and J. K. Appati, "Construction of Compartmental Models for COVID-19 with Quarantine, Lockdown and Vaccine Interventions," *SSRN Electronic Journal*, 2020.
- [10] S. Halimah, "Analisis Kestabilan Model Matematika pada Pembentukan Sel Darah Putih dengan Perlambatan," 2018.
- [11] BPS Jawa Timur, "BPS Provinsi Jawa Timur," 2021.
- [12] Jatim Tanggap Covid, "Jatim Tanggap Covid-19," 2021.
- [13] WHO, "COVID-19 Quarantine and Isolation — CDC," 2022.
- [14] BPOM, "Badan POM Terbitkan EUA, Vaksin CoronaVac Sinovac Siap Disuntikkan," 2021.
- [15] BPOM, "Badan POM Terbitkan Emergency Use Authorization Vaksin AstraZeneca," 2021.

- [16] BPOM, “Penuhi Cakupan Jumlah Penduduk Indonesia, Badan POM Terbitkan EUA Vaksin COVID-19 Produksi Sinopharm,” 2021.
- [17] BPOM, “Badan POM Terbitkan EUA Moderna COVID-19 Vaccine Sebagai Vaksin Pertama dari Platform mRNA,” 2021.
- [18] LaporanCovid-19, “Statistik Kematian Isolasi Mandiri dan Di Luar RS,” 2021.
- [19] BPOM, “Badan POM Terbitkan EUA Comirnaty (Vaksin COVID-19 Pfizer) Sebagai Vaksin Kedua Platform mRNA,” 2021.
- [20] S. Annas, M. I. Pratama, M. Rifandi, W. Sanusi, and S. Side, “Stability Analysis and Numerical Simulation of SEIR Model for Pandemic COVID-19 Spread in Indonesia,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 139, p. 110072, 2020.