

## ANALISIS STABILITAS MODEL SIR (*SUSCEPTIBLES, INFECTED, RECOVERED*) PADA PENYEBARAN VIRUS COVID-19 DI KOTA AMBON

Z. A. LELEURY<sup>1\*</sup>, M. E. RIJOLY<sup>1</sup>, F. M. RISAMENA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pattimura

\* [zetharthur82@gmail.com](mailto:zetharthur82@gmail.com)

### ABSTRAK

Virus Corona merupakan keluarga besar virus yang menyebabkan penyakit pada manusia dan hewan. Pada manusia biasanya menyebabkan penyakit infeksi saluran pernapasan, mulai flu biasa hingga penyakit yang serius. Wabah virus ini mulai menyebar ke seluruh dunia termasuk ke Indonesia pada Februari 2020. Di kota Ambon, virus Covid-19 mengalami peningkatan dari tahun 2020 hingga 2021. Dalam penelitian ini digunakan model SIR yang merupakan model epidemi yang dilakukan dengan mengelompokkan populasi ke dalam tiga kelas, yaitu kelas individu rentan yang dapat terinfeksi  $S$  (*Susceptible*), kelas individu terinfeksi  $I$  (*Infected*), dan kelas individu yang sembuh dari sakit  $R$  (*Recovered*). Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan dari titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik pada model penyebaran Covid-19 di Kota Ambon. Berdasarkan analisis yang dilakukan diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0(S, I, R) = \left(\frac{k}{\mu_1}, 0, 0\right)$  dan titik ekuilibrium endemik  $E_1(S(t), I(t), R(t)) = \left\{ \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2) + \alpha}{\beta}\right), \left(\frac{k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}\right), \left(\frac{\alpha(k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1)}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)\mu_1}\right) \right\}$ . Selain itu, berdasarkan data yang diperoleh dan hasil simulasi model maka dapat disimpulkan bahwa virus Covid-19 akan menghilang di kota Ambon dengan bilangan reproduksi dasar adalah  $R_0 = 0,05133$ .

**Kata Kunci:** Kota Ambon, Model SIR, Titik Ekuilibrium, Virus Covid-19.

### ABSTRACT

*Corona viruses are a large family of viruses that cause disease in humans and animals. In humans, it usually causes respiratory tract infections, ranging from the common cold to serious illnesses. This virus outbreak began to spread throughout the world including Indonesia in February 2020. In the Ambon city, the Covid-19 virus has increased from 2020 to 2021. In this study, the SIR model is used which is an epidemic model that is carried out by grouping the population into three classes which, namely the class of susceptible individuals who can be infected  $S$  (*Susceptible*), the class of infected individuals  $I$  (*Infected*), and the class of individuals who recover from illness  $R$  (*Recovered*). This study aims to analyze the stability of the disease-free and endemic equilibrium point in the Covid-19 distribution model in Ambon City. Based on the analysis carried out, the disease-free equilibrium point is  $E_0(S, I, R) = \left(\frac{k}{\mu_1}, 0, 0\right)$  and endemic equilibrium point is  $E_1(S(t), I(t), R(t)) = \left\{ \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2) + \alpha}{\beta}\right), \left(\frac{k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}\right), \left(\frac{\alpha(k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1)}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)\mu_1}\right) \right\}$ . In addition, based on the data obtained and the results of the model simulation, it can be concluded that the Covid-19 virus will disappear in the Ambon city with a basic reproduction number  $R_0 = 0,05133$ .*

**Keywords:** Ambon City, SIR Model, Equilibrium Point, Covid-19 Virus.

## 1 Pendahuluan

Indonesia pada awal tahun 2020 digemparkan dengan mewabahnya virus Covid-19. Wabah penyakit coronavirus 2019 (Covid-19) mulai teridentifikasi muncul di Wuhan, Cina pada akhir 2019, bahkan telah merenggut lebih dari 2.600 nyawa pada 24 Februari 2020 dan merupakan ancaman besar bagi kesehatan masyarakat global [1]. Virus yang berasal dari Wuhan Cina ini menyebar dengan cepat hampir di seluruh dunia, termasuk Indonesia. Hal tersebut turut mempengaruhi seluruh bidang pergerakan masyarakat, mulai dari pembatasan aktivitas pribadi hingga aktivitas sosial berskala besar.

Efek samping dari pandemi Covid-19 juga turut mempengaruhi aktivitas pada dunia pendidikan. Penyakit ini yang kemudian membuat banyak hal menjadi tidak biasa dalam kehidupan manusia. Penyakit ini juga yang membuat seakan semua orang sedang menghadapi sebuah wabah yang dapat mengancam nyawa setiap manusia yang terpapar Covid-19. Prediksi terhadap pandemi selalu berdasarkan faktor-faktor antara lain karakteristik dari penyebab pandemi, karakteristik komunitas atau individu yang terkena, karakteristik geografi, dan kebijakan serta kemampuan sistem kesehatan [2].

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk mempresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia real dalam pernyataan matematika sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia real ini menjadi lebih tepat [3]. Pemodelan matematika tentang epidemi berbasis SIR dan SI sudah diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick [4]. Dalam kasus ini individu yang rentan terjangkit akan dikelompokkan dalam populasi  $S$  (*Susceptible*), individu yang terinfeksi dikelompokkan dalam populasi  $I$  (*Infected*), sedangkan untuk populasi  $R$  (*Recovered*) merupakan kelompok individu yang telah bebas dari penyakit. Kermack dan McKendrick pertama kali membahas Model SIR dalam buku berjudul ‘Kontribusi terhadap Teori Matematika Epidemi’ [5].

Kajian terkait prediksi endemi Covid-19 di China sebagai pusat penyebaran virus ini untuk pertama kali, telah dilakukan oleh Roosa, dkk [6]. Metode yang digunakan dalam kajian tersebut adalah metode *generalized logistic growth* model dan model Richards. Penelitian tentang penyebaran Covid-19 menggunakan model matematika juga telah dilakukan di India menggunakan model SAIU dengan membagi populasi ke dalam kelas *susceptible* ( $S$ ), *asymptomatic* ( $A$ ), *reported symptomatic infectious* ( $I$ ), dan *unreported symptomatic infectious* ( $U$ ) [7]. Selain itu, kajian tentang penyebaran Covid-19 juga dilakukan di Irlandia Utara [8] menggunakan model SEIR namun hanya melibatkan parameter tingkat infeksi dan tingkat kesembuhan.

Secara khusus di Indonesia, penelitian terkait penggunaan model matematika untuk memprediksi penyebaran Covid-19 telah dilakukan di Daerah Istimewa Yogyakarta [2], Kalimantan [9], Samarina [10], dan Jakarta [11]. Secara keseluruhan, parameter yang digunakan pada penelitian-penelitian tersebut hanya terbatas pada tingkat infeksi, tingkat kesembuhan, dan tingkat kematian individu karena terinfeksi Covid-19. Dengan mempertimbangkan uraian beberapa penelitian terdahulu maka peneliti mencoba mengkonstruksi model berdasarkan data penelitian di Kota Ambon menggunakan model berbasis SIR dengan melibatkan juga parameter tingkat kelahiran dan tingkat kematian alami.

## 2 Tinjauan Pustaka

### 2.1 Matriks Jacobian

**Defenisi 2.1** [12].

Diberikan fungsi  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  dengan  $f \in E$  dan fungsi kontinu,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $E \subseteq R^n$  dan  $E$  himpunan terbuka. Matriks

$$Df(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(\hat{x}) & \frac{df_1}{dx_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{df_1}{dx_n}(\hat{x}) \\ \frac{df_2}{dx_1}(\hat{x}) & \frac{df_2}{dx_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{df_2}{dx_n}(\hat{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1}(\hat{x}) & \frac{df_n}{dx_2}(\hat{x}) & \cdots & \frac{df_n}{dx_n}(\hat{x}) \end{bmatrix},$$

dinamakan matriks Jacobian dari  $f$  di titik  $\hat{x}$ .

## 2.2 Jenis Kestabilan

Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dan  $\lambda$  nilai eigen  $A$ , maka

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik,  $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$  adalah  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$  sehingga diperoleh  $\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ , dimana,  $p = a + d$  dan  $q = ad - bc$ .

Stabilitas sistem linier dapat diterangkan sebagai berikut.

1.  $\lambda_{1,2}$  real dan berbeda jika nilai dari  $p^2 - 4q > 0$  :
    - a.  $\lambda_{1,2}$  sama tanda jika  $q > 0$  :
      - i.  $\lambda_{1,2}$  semua positif jika  $p > 0 \rightarrow$  tidak stabil
      - ii.  $\lambda_{1,2}$  semua negatif jika  $p < 0 \rightarrow$  stabil.
    - b.  $\lambda_{1,2}$  beda tanda jika  $q < 0 \rightarrow$  tidak stabil
    - c. Salah satu dari  $\lambda_{1,2}$  nol jika  $q = 0$  :
      - i. Akar lainnya positif jika  $p > 0 \rightarrow$  tidak stabil
      - ii. Akar lainnya negatif jika  $p < 0 \rightarrow$  stabil
  2.  $\lambda_{1,2}$  real dan sama jika  $p^2 - 4q = 0$  :
    - a.  $\lambda_{1,2}$ , sama tanda :
      - i. Keduanya positif jika  $p > 0 \rightarrow$  tidak stabil
      - ii. Keduanya negatif jika  $p < 0 \rightarrow$  stabil
    - b.  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , jika  $p = 0 \rightarrow$  tidak stabil
  3.  $\lambda_{1,2}$  kompleks bila  $p^2 - 4q < 0$  :
    - a.  $R_e(\lambda_{1,2})$  sama tanda :
      - i.  $R_e(\lambda_{1,2})$  semua positif jika  $p > 0 \rightarrow$  tidak stabil
      - ii.  $R_e(\lambda_{1,2})$  semua negatif jika  $p < 0 \rightarrow$  stabil
    - b.  $R_e(\lambda_{1,2})$  berbeda tanda jika  $p = 0 \rightarrow$  center
- [13].

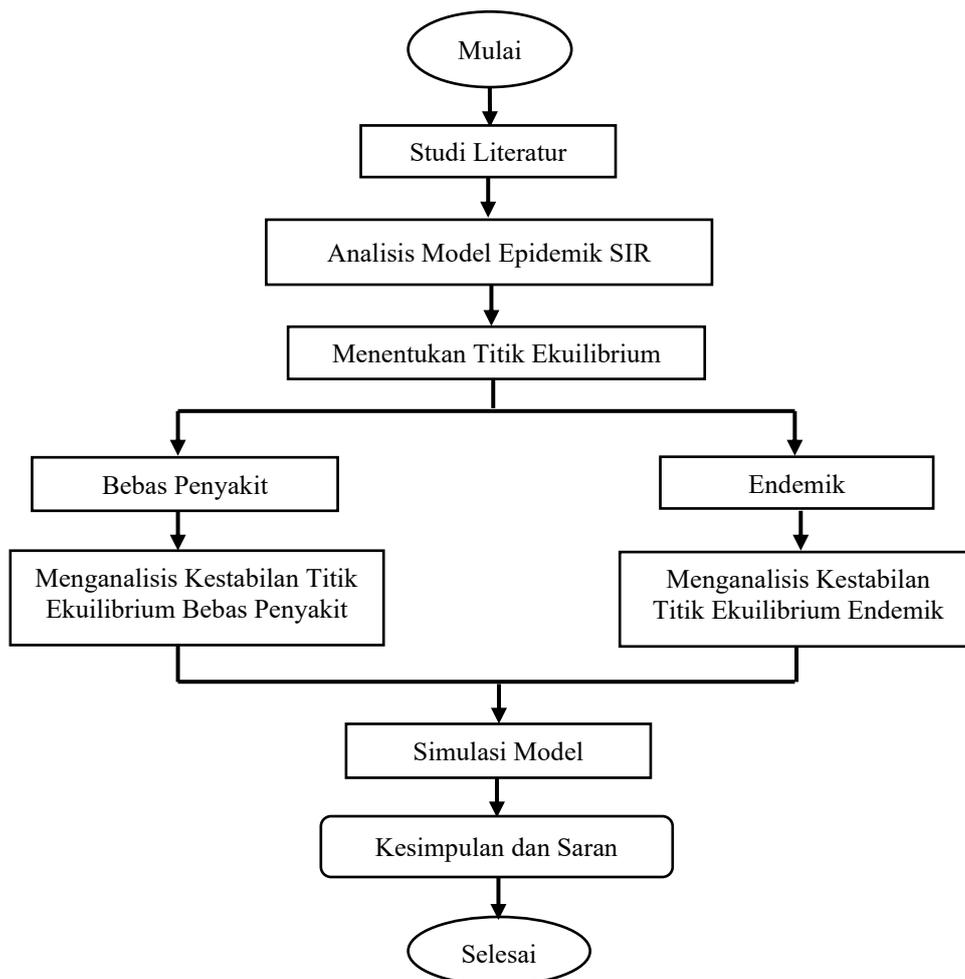
## 2.3 Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi [14]. Bilangan tersebut diperlukan sebagai parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Nilai ini menunjukkan indeks terjadinya wabah. Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian dari suatu model yang dihitung pada titik ekuilibrium bebas penyakit [15]. Jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil

asimtotik lokal dan penyakit tidak menyerang populasi, namun jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dan penyakit sangat mungkin untuk menyebar [16].

### 3 Metode

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dan studi kasus. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data pasien yang terinfeksi Covid-19, data pasien yang meninggal karena terinfeksi Covid-19, dan data pasien yang sembuh pasca terinfeksi Covid-19 selama tahun 2020-2021. Data ini diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Maluku. Prosedur penelitian yang digunakan dalam penelitian ini seperti yang digambarkan pada diagram alir berikut.



**Gambar 1:** Diagram Alur Penelitian

Berdasarkan diagram alur penelitian, setelah dikonstruksi model SIR penyebaran Covid-19 maka tahap selanjutnya adalah menentukan titik ekuilibrium, baik titik ekuilibrium bebas penyakit maupun endemik. Analisis kestabilan masing-masing titik ekuilibrium ditentukan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobian sistem persamaan model yang mengacu pada Defenisi 2.1. Selanjutnya menganalisis nilai eigen yang diperoleh untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar sehingga dapat diketahui jenis kestabilan sistem. Untuk simulasi menggunakan *software* Matlab.

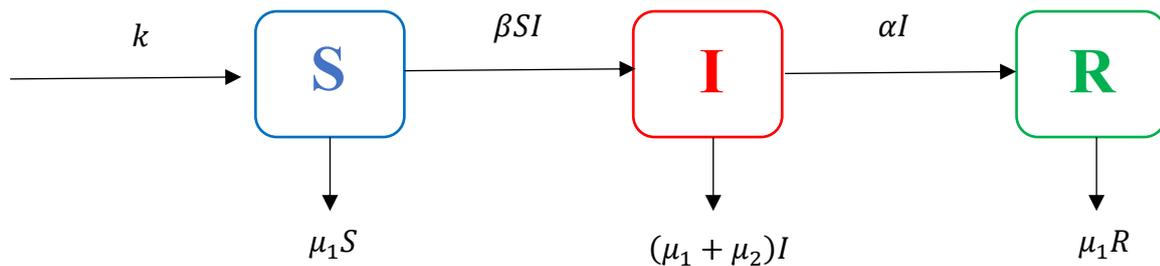
## 4 Hasil dan Pembahasan

### 4.1 Model Matematika Penyebaran Covid-19

Model SIR penyebaran Covid-19 yang dideskripsikan pada penelitian ini, terdiri dari 3 sub populasi dengan asumsi-asumsi sebagai berikut:

- Laju kematian alami terdapat pada setiap populasi/kompartemen dan diasumsikan sama sebesar  $\mu_1$ .
- Populasi rentan/*Susceptible* ( $S$ ) dapat bertambah karena adanya kelahiran yang diasumsikan konstan sebesar  $k$ .
- Individu rentan ( $S$ ) terinfeksi Covid-19 apabila berinteraksi dengan individu terinfeksi/*Infected* ( $I$ ) dengan laju infeksi sebesar  $\beta$ .
- Covid-19 dapat menyebabkan kematian dengan laju kematian sebesar  $\mu_2$  yang hanya terjadi pada kelompok populasi terinfeksi ( $I$ ).
- Individu pada populasi *Infected* ( $I$ ) berpindah ke populasi *Recovered* ( $R$ ) dengan laju kesembuhan sebesar  $\alpha$  karena telah mendapatkan penanganan dan perawatan oleh tim medis ataupun oleh keluarga.
- Individu yang telah sembuh dari Covid-19 akan memperoleh kekebalan dan diasumsikan tidak akan kembali terinfeksi lagi.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut penyebaran Covid-19, secara skematis disajikan pada bagan kompartemen seperti Gambar 2.



**Gambar 2:** Model SIR Penyebaran Covid-19

Berdasarkan bagan kompartemen di atas, maka dibentuk Model Matematika penyebaran Covid-19 yang dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial sebagaimana persamaan (1) sampai (3).

$$\frac{dS}{dt} = k - \mu_1 S - \beta SI, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu_1 + \mu_2 + \alpha)I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu_1 R. \quad (3)$$

dimana,

$S$  = Jumlah individu rentan terinfeksi

$I$  = Jumlah individu terinfeksi

$R$  = Jumlah individu sembuh dari penyakit

$k$  = Tingkat kelahiran individu

$\beta$  = Tingkat individu rentan menjadi individu terinfeksi

$\alpha$  = Tingkat kesembuhan individu terinfeksi

$\mu_1$  = Tingkat kematian alami individu

$\mu_2$  = Tingkat kematian karena terinfeksi virus Covid-19

## 4.2 Analisis Titik Ekuilibrium Model Matematika Penyebaran Covid-19

Titik ekuilibriumnya adalah titik invariant terhadap waktu. Dengan demikian titik-titik ekuilibrium diperoleh saat  $\frac{dS}{dt} = 0$ ,  $\frac{dI}{dt} = 0$ ,  $\frac{dR}{dt} = 0$ . Ada dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas penyakit dan titik setimbang endemik. Sedangkan untuk analisis kestabilan titik ekuilibrium, dapat dibentuk matriks Jacobian dari persamaan (1) – (3) sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{S}(t)}{\partial S} & \frac{\partial \hat{S}(t)}{\partial I} & \frac{\partial \hat{S}(t)}{\partial R} \\ \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial S} & \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial I} & \frac{\partial \hat{I}(t)}{\partial R} \\ \frac{\partial \hat{R}(t)}{\partial S} & \frac{\partial \hat{R}(t)}{\partial I} & \frac{\partial \hat{R}(t)}{\partial R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \beta I & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - \mu_1 - \mu_2 - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu_1 \end{bmatrix}.$$

### 4.2.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Jika  $I = 0$ , maka akan diperoleh titik setimbang bebas penyakit dimana pada keadaan ini semua populasi yang terinfeksi virus Covid-19 sudah tidak ada. Untuk mendapatkan titik setimbang, dari persamaan (1) diperoleh  $k - \mu_1 S = \beta S I$ . Karena  $I = 0$  maka  $k - \mu_1 S = 0$  sehingga  $S = \frac{k}{\mu_1}$ . Selanjutnya dari persamaan (3) diperoleh  $\alpha I = \mu_1 R$ . Karena  $I = 0$  maka diperoleh  $R = 0$ . Dengan demikian, diperoleh titik ekuilibrium bebas virus yaitu  $E_0(S, I, R) = \left(\frac{k}{\mu_1}, 0, 0\right)$ .

### 4.2.2 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Berdasarkan titik ekuilibrium bebas penyakit yang diperoleh, maka dapat dibentuk matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu_1 & \frac{-\beta k}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta k}{\mu_1} - \mu_1 - \mu_2 - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu_1 \end{bmatrix}.$$

Dari matriks Jacobian tersebut, dengan  $\det(\lambda I - J_0) = 0$  maka diperoleh :

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda + \mu_1 & \frac{\beta k}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{\beta k}{\mu_1} + \mu_1 + \mu_2 + \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \lambda + \mu_1 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Selanjutnya dengan aturan sarrus maka diperoleh bahwa :

$$(\lambda + \mu_1) \left( \lambda - \frac{\beta k}{\mu_1} + \mu_1 + \mu_2 + \alpha \right) (\lambda + \mu_1) = 0.$$

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -\mu_1 \quad \lambda_2 = \frac{\beta k}{\mu_1} - (\mu_1 + \mu_2 + \alpha)$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka  $\lambda_1$  dan  $\lambda_3$  bernilai negatif. Sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit ( $I = 0$ ) akan stabil asimtotik lokal jika

$$\frac{\beta k}{\mu_1} - \mu_1 - \mu_2 - \alpha < 0 \text{ atau } \frac{\beta k}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)} < 1$$

Sehingga diperoleh bilangan reproduksi dasar adalah  $R_0 = \frac{\beta k}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}$ .

### 4.2.3 Titik Ekuilibrium Endemik

Titik setimbang endemik dipengaruhi oleh populasi yang terinfeksi virus Covid-19 dengan  $I \neq 0$ . Sehingga persamaan (1) diperoleh:

$$I = \frac{k - \mu_1 S}{\beta S}. \quad (4)$$

Selanjutnya dari persamaan (2) diperoleh  $[\beta S - (\mu_1 + \mu_2 + \alpha)]I = 0$ . Karena  $I \neq 0$  maka  $\beta S - (\mu_1 + \mu_2 + \alpha) = 0$  sehingga diperoleh:

$$S = \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}{\beta}. \quad (5)$$

Selanjutnya dari persamaan (4) diperoleh :

$$I = \frac{k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}. \quad (6)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (6) ke persamaan (3) maka diperoleh:

$$R = \frac{\alpha(k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1)}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)\mu_1}. \quad (7)$$

Dengan demikian diperoleh titik ekuilibrium endemik, yaitu:

$$(S(t), I(t), R(t)) = \left\{ \left( \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}{\beta} \right), \left( \frac{k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)} \right), \left( \frac{\alpha(k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1)}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)\mu_1} \right) \right\}.$$

### 4.2.4 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Berdasarkan titik ekuilibrium endemik yang diperoleh, maka dapat dibentuk matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \beta \left( \frac{k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)} \right) & -\beta \left( \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}{\beta} \right) & 0 \\ \beta \left( \frac{k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)} \right) & \beta \left( \frac{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}{\beta} \right) - \mu_1 - \mu_2 - \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Yang dapat ditulis ulang menjadi bentuk yang lebih sederhana berikut.

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{-k\beta}{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)} & -(\mu_1 + \mu_2 + \alpha) & 0 \\ \frac{k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian tersebut, dengan  $\det(\lambda I - J_1) = 0$  maka diperoleh :

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda + \frac{k\beta}{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)} & \mu_1 + \mu_2 + \alpha & 0 \\ \frac{-k\beta + \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \alpha\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \alpha} & \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & \lambda + \mu_1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} \lambda + a & b & 0 \\ c & \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha & \lambda + \mu_1 \end{bmatrix} \right) = 0,$$

dimana  $a = \frac{k\beta}{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}$ ,  $b = (\mu_1 + \mu_2 + \alpha)$ , dan  $c = \frac{-k\beta + \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \alpha\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \alpha}$ .

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$[(\lambda + a)\lambda(\lambda + \mu_1)] - bc(\lambda + \mu_1) = 0 \text{ atau } (\lambda + \mu_1)(\lambda^2 + \lambda a - bc) = 0.$$

Dengan demikian nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas antara lain,

$$\lambda_1 = -\mu_1 \quad \lambda_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4bc}}{2}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan  $a, b, c$  maka diperoleh

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{-k\beta}{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)} \pm \sqrt{\left(\frac{k\beta}{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}\right)^2 + 4(-k\beta + \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \alpha\mu_1)} \right]$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka  $\lambda_1$  dan  $\lambda_3$  bernilai negatif. Sehingga titik ekuilibrium endemik akan stabil jika  $\lambda_2$  bernilai negatif. Dalam hal ini

$$\sqrt{\left(\frac{k\beta}{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}\right)^2 + 4(-k\beta + \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \alpha\mu_1)} < \frac{k\beta}{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}$$

atau

$$\left(\frac{k\beta}{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}\right)^2 + 4(-k\beta + \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \alpha\mu_1) < \left(\frac{k\beta}{(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}\right)^2$$

$$\frac{\beta k}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)} > 1$$

Yang menunjukkan juga bahwa bilangan reproduksi dasar adalah  $R_0 = \frac{\beta k}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}$ .

### 4. 3 Simulasi Numerik Model Penyebaran Virus Covid-19 Di Kota Ambon

Pada tahap ini dilakukan simulasi model penyebaran virus Covid-19 di kota Ambon. Simulasi dilakukan dengan memberikan nilai parameter pada model untuk menjelaskan kondisi penyebaran penyakit yang ditampilkan dalam bentuk kurva berdasarkan data yang terangkum pada Tabel 1 berikut.

**Tabel 1:** Estimasi Nilai Parameter

Parameter	Nilai Estimasi (per bulan)	Keterangan
$\mu_1$	0,00118	Tingkat kematian alami individu
$\mu_2$	0,06841	Tingkat kematian karena terinfeksi virus Covid-19
$k$	0,01676	Tingkat kelahiran individu
$\beta$	0,00132	Tingkat individu rentan menjadi individu terinfeksi virus Covid-19
$\alpha$	0,29565	Tingkat kesembuhan individu terinfeksi virus Covid-19

Menurut data dari Badan Pusat Statistik Kota Ambon, angka harapan hidup masyarakat Kota Ambon Tahun 2020 adalah 70,52 tahun [17]. Dengan demikian, tingkat kematian alami individu di Kota Ambon adalah

$$\mu_1 = \frac{1}{\text{angka harapan hidup}} = \frac{1}{70,52 \text{ tahun}} = 0,00118 \text{ bulan}^{-1}$$

Tingkat kematian dan tingkat kesembuhan pasien karena terinfeksi virus Covid-19 dihitung masing-masing berdasarkan data pasien yang meninggal dan data pasien yang sembuh pasca terinfeksi Covid-19. Berdasarkan data yang diperoleh, diketahui bahwa rata-rata pasien yang meninggal karena terinfeksi Covid-19 adalah sebanyak 31,47 per bulan. Sedangkan rata-rata pasien yang sembuh adalah sebanyak 136 jiwa per bulan dari total rata-rata pasien yang terinfeksi setiap bulan adalah 460 jiwa. Dengan demikian, tingkat kematian dan tingkat kesembuhan individu di Kota Ambon karena terinfeksi Covid-19 sebagai berikut:

$$\mu_2 = \frac{\text{Jumlah rata – rata pasien yang meninggal karena terinfeksi}}{\text{Jumlah rata – rata pasien yang terinfeksi}} = \frac{31,47}{460} = 0,06841$$

$$\alpha = \frac{\text{Jumlah rata – rata pasien yang sembuh pasca terinfeksi}}{\text{Jumlah rata – rata pasien yang terinfeksi}} = \frac{136}{460} = 0,29565$$

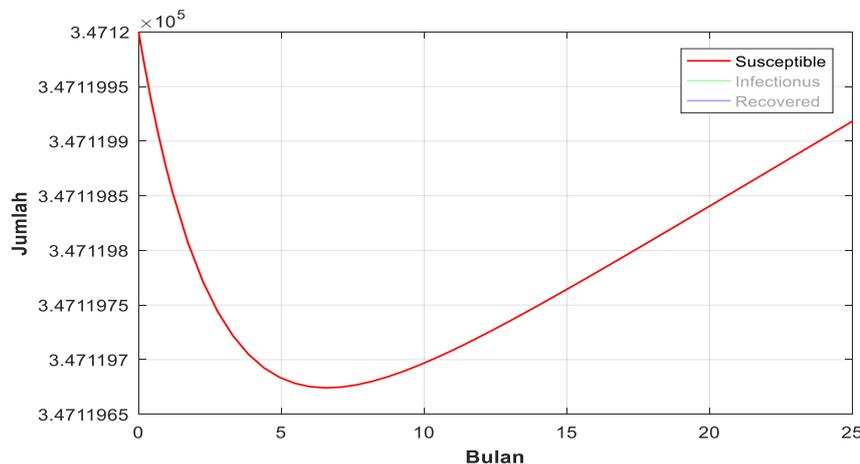
Tingkat kelahiran individu dihitung berdasarkan data bayi yang lahir di Kota Ambon pada Tahun 2020. Berdasarkan data yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Kota Ambon, diketahui bahwa jumlah bayi yang lahir di Kota Ambon pada Tahun 2020 adalah sebanyak 5.821. Dengan demikian, tingkat kelahiran individu di Kota Ambon adalah

$$k = \frac{\text{Jumlah bayi yang lahir}}{\text{Total populasi penduduk}} = \frac{5.821}{347.288} = 0,01676$$

Karena berdasarkan data diperoleh bahwa rata-rata pasien yang terinfeksi setiap bulan adalah 460 jiwa maka dapat diperoleh nilai parameter tingkat individu rentan menjadi individu terinfeksi adalah

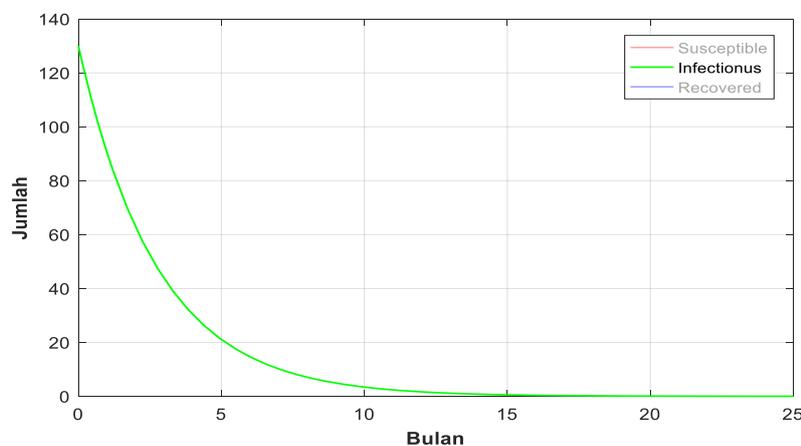
$$\beta = \frac{\text{Jumlah rata – rata pasien yang terinfeksi}}{\text{Total populasi penduduk}} = \frac{460}{347.288} = 0,00132$$

Proses simulasi dilakukan dengan waktu awal  $t_0 = 0$  dan waktu akhir tetap  $t_{25} = 25$  bulan, dengan kondisi awal setiap variabel state adalah  $S(0) = 347.120$ ,  $I(0) = 130$ ,  $R(0) = 38$ .



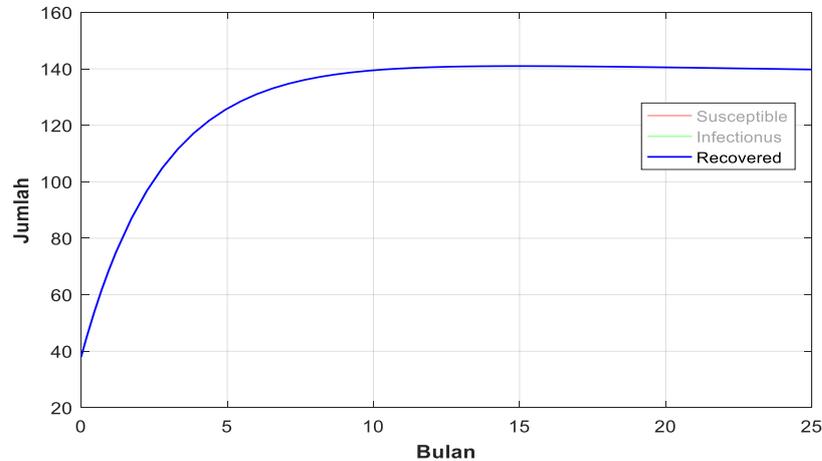
**Gambar 3:** Grafik Jumlah individu rentan terinfeksi

Dari Gambar 3 terlihat bahwa seiring berjalannya waktu, jumlah individu rentan terinfeksi menurun hingga bulan ke-7. Namun setelah bulan ke-7 jumlah individu rentan terinfeksi meningkat karena jumlah individu yang terinfeksi sudah mendekati titik kesetimbangan nol.



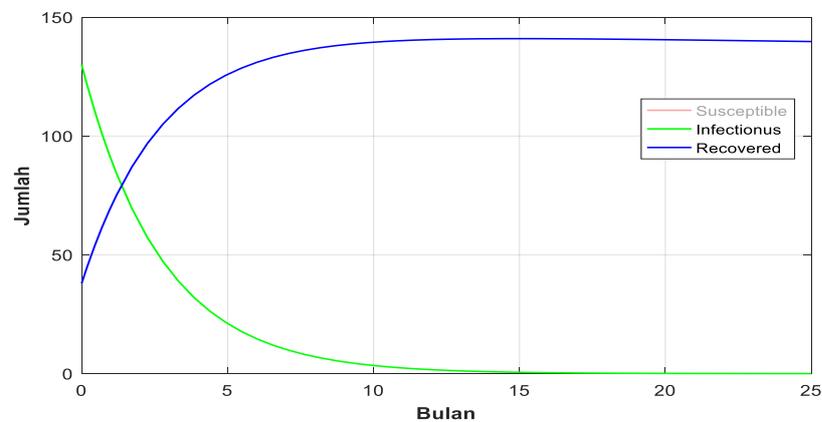
**Gambar 4:** Grafik Jumlah individu terinfeksi

Selanjutnya, berdasarkan Gambar 4 terlihat bahwa jumlah individu terinfeksi menurun secara drastis selama periode waktu  $< 10$  bulan. Pada bulan ke-15 jumlah individu terinfeksi sudah mendekati titik kesetimbangan nol. Sedangkan Gambar 5 memperlihatkan bahwa selama periode waktu  $< 10$  bulan, jumlah individu sembuh dari penyakit Covid-19 meningkat secara drastis.



**Gambar 5:** Grafik Jumlah individu sembuh dari penyakit

Setelah mensubstitusikan nilai dari setiap parameter ke persamaan bilangan reproduksi dasar maka diperoleh  $R_0 = 0,05133$  yang mengindikasikan bahwa berdasarkan data yang diperoleh maka virus Covid-19 akan menghilang di kota Ambon karena nilai  $R_0 < 1$ . Pernyataan ini sesuai dengan grafik jumlah individu terinfeksi yang mendekati titik kesetimbangan nol.



**Gambar 6:** Keterkaitan sub populasi I dan R

Gambar 6 merupakan hasil simulasi untuk memperlihatkan grafik keterkaitan antar kompartemen sub populasi jumlah individu terinfeksi dan jumlah individu sembuh dari penyakit. Terlihat bahwa jumlah individu terinfeksi menurun secara drastis seiring meningkatnya jumlah individu terinfeksi yang sembuh, disamping faktor lainnya yakni meningkatnya individu akibat terinfeksi Covid-19.

## 5 Kesimpulan

Berdasarkan analisis kestabilan model SIR penyebaran Covid-19 di Kota Ambon memiliki dua titik ekuilibrium yaitu  $E_0(S, I, R) = \left(\frac{k}{\mu_1}, 0, 0\right)$  dan  $E_1(S, I, R) = \left\{ \left(\frac{(\mu_1 + \mu_2) + \alpha}{\beta}\right), \left(\frac{k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}\right), \left(\frac{\alpha(k\beta - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 - \alpha\mu_1)}{\beta(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)\mu_1}\right) \right\}$  dengan bilangan reproduksi dasar

adalah  $R_0 = \frac{\beta k}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \alpha)}$ . Berdasarkan data dan hasil simulasi maka dapat disimpulkan bahwa virus Covid-19 akan menghilang di kota Ambon karena nilai  $R_0 = 0,05133 < 1$ .

## Daftar Pustaka

- [1] Q. Lina, S. Zhaob, D. Gaod, Y. Loue, S Yangf, S. S. Musae, M. H. Wang, Y. Caig, W. Wangg, L. Yangh, and D. Hee, 'A Conceptual Model For The Coronavirus Disease 2019 (Covid-19) Outbreak in Wuhan, China With Individual Reaction and Governmental Action', *International Journal of Infectious Diseases*, vol. 93, pp. 211-216, 2020.
- [2] F. A. Kusumo, N. Susyanto, I. Endrayanto, dan A. Meliala. 'Model Berbasis SIR Dalam Prediksi Awal Penyebaran Covid-19 di Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY)', *Jurnal Matematika Thales*, vol. 2, no. 1, 2020.
- [3] Pitriani, 'Kemampuan Pemodelan Matematika Dalam Realistic Mathematics Education (RME)', *JES-MAT: Jurnal Edukasi dan Sains Matematika*, vol. 2, no. 1, 2016.
- [4] F. Brauer and C. Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, 2nd Ed., New York Dordrecht Heidelberg London: Springer, 2012.
- [5] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, 'A Contribution to The Mathematical Theory of Epidemics', *Proceedings of The Royal Society of London, Series A*, vol. 115, no. 772, pp. 700-721. 1927.
- [6] K. Roosa, Y. Lee, R. Luo, A. Kirpich, R. Rothenberg, J. M. Hyman, P. Yan, and G. Chowell, 'Short-term Forecasts of the COVID-19 Epidemic in Guangdong and Zhejiang, China, *Journal of Clinical Medicine*, vol. 5, no. 596, pp1-9. 2020.
- [7] P. Samui, J. Mondal, and S. Khajanchi, 'A Mathematical Model for Covid-19 transmission dynamics with a case study of India, vol. 140. 2020.
- [8] P. A. Hall, G. Kiss, T. Kuhn, S. Moutari, E. Patterson, dan E. Smith. 'Mathematical Modelling of the COVID-19 Epidemic in Northern Ireland in 2020', *Open Journal of Modelling and Simulation*, vol. 9, pp. 91-110. 2021
- [9] R. Teguh, A. S. Sahay, dan F. F. Adji, 'Pemodelan Penyebaran Infeksi Covid-19 Di Kalimantan', *Jurnal Teknologi Informasi: Jurnal Keilmuan dan Aplikasi Bidang Teknik Informatika*, vol. 14, no. 2, 2020.
- [10] S. Sifriyani dan D. Rosadi, 'Susceptible Infected Recovered (SIR) Model For Estimating Covid-19 Reproduction Number In East Kalimantan And Samarinda', *Media Statistika*, vol. 13, no. 2, pp. 170-181. 2020.
- [11] Karina, 'Pemodelan dan Simulasi Numerik Penyebaran Covid-19 di Jakarta', Skripsi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Pekanbaru. 2020.
- [12] L. Perko, '*Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York. 1991.
- [13] W. E. Boyce dan R. C. DiPrima, '*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*', USA: Von Hoffmann Press. 2001.
- [14] O. Diekmann, H. Heesterbeek, and T. Britton, T. 'Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics', Princeton University Press. 2021.
- [15] H. Sihsan, S. Sidel, dan M. Pagga, 'Pemodelan Matematika SEIRS Pada Penyebaran Penyakit Malaria di Kabupaten Mimika', *Journal of Mathematics, Computatio, and Statistics*, vol. 4, no. 1. pp. 21-29, 2021.
- [16] P. van den Driessche and J. Watmough, 'Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission, *Mathematical Biosciences*, vol. 180, pp. 29-48, 2002.
- [17] BPS Provinsi Maluku, "Angka Harapan Hidup (AHH) Saat Lahir (Tahun), 2019-2021. <https://maluku.bps.go.id/indicator/26/242/1/angka-harapan-hidup-ahh-saat-lahir.html>