J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 08 No. 01 (2024) pp. 29-38
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)
e-ISSN: 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

SIFAT-SIFAT GRAF IRISAN PADA GRUP DIHEDRAL

AWAL FEBRIANTONO[1], ARIF MUNANDAR[2*], MUHAMMAD RIDHO RAMADHAN[3]

Prodi Matematika, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.

*penulis korespondensi:arif.munandar@uin-suka.ac.id

ABSTRAK

Teori graf aljabar adalah teori yang mengkoneksikan struktur aljabar dengan graf. Salah satu pembahasan didalamnya adalah graf irisan. Graf irisan dari suatu grup adalah graf verteknya adalah himpunan semua subgrup non-trivial dari grup tesebut dan dua vertex yang berbeda dikatakan saling *adjecent* jika dan hanya jika irisan subgroup non trivialnya tidak hanya elemen identitas. Penelitian ini dilakukan melalui pemahaman terhadap pola subgroup non trivial dalam grup dihedral sehingga dapat dipahami sifat-sifat yang terbentuk dalam graf irisan dari grup tersebut untuk order bilangan prima dan pangkat dari bilangan prima. Lebih lanjut dalam penelitian ini ditemukan himpunan dominasi yang sesuai dan nilai kardinalitas minimal untuk grup dihedral dengan order tersebut.
Kata Kunci: Graf Irisan, Grup Dihedral, Himpunan Dominasi

ABSTRACT

Algebraic graph theory is a theory that connects algebraic structures with graphs. One of the discussions in it is the wedge graph. The intersection graph of a group is its vertex graph is the set of all non-trivial subgroups of the group and two distinct vertices are said to be adjecent if and only if their non-trivial subgroup intersection is not only the identity element. This research is conducted through understanding the pattern of non-trivial subgroups in the dihedral group so that the properties formed in the intersection graph of the group for prime orders and powers of prime numbers can be understood. Furthermore, in this research, the corresponding dominating set and minimum cardinality value for the dihedral group with that order are found.
Keywords: *Intersection graph, Dihedral Group, Domination Set*

1 Pendahuluan

Graf dapat digunakan sebagai representasi dari berbagai struktur aljbar baik itu grup, ring atau modul. Banyak cara untuk merepresentasikan grup pada graf. Salah satu contohnya adalah graf koprima yang didefinisikan dengan menjadikan elemen dalam grup sebagai verteknya dan *adjacency* diantara dua vertek terjadi jika order dua elemen dalam grup tersebut saling prima (koprima). Beberapa riset dalam graf Koprima digunakan untuk merepresentasikan grup dihedral dan quaternion [1] atau representasi dalam grup berhingga [2].

Penelitian lanjutan mengenai representasi dari grup berhingga pada graf yang mendapatkan banyak perhatian dari peneliti adalah tentang power graph. Power graph didefinisikan dengan melihat elemen dalam grup sebagai vertek, dan adjacency dari vertek g dan h terbentuk jika $g = h^n$. Riset ini muncul pertama kali dalam penelitian Kalarev dan Quinn dalam [3]. Penelitian mengenai *power graf* pada grup berhingga [4]-[5]. Sementara penelitian yang berkaitan dengan *power graph* [6].

2020 *Mathematics Subject Classification*: 05C09
Diterima: 28-11-23; direvisi: 18-04-24; diterima: 29-04-24

Representasi dari grup berhingga pada graf yang juga mendapatkan banyak perhatian adalah *intersection graph*. Berbeda dengan representasi sebelumnya yang menjadikan elemen dalam grup sebagai vertek, dalam *intersection graph* vertek didefinisikan sebagai subgroup non trivial dari grup yang direpresentasikan. Kemudian subgroup non trivial H_i dan H_j terhubung jika $H_i \cap H_j \neq \{e\}$ [7]. Kemudian riset lanjutan dalam bidang ini diantaranya adalah [8] yang fokus pada pemahasan mengenai *intersection graph* pada grup berhingga, riset lainnya dalam [9] lebih detail membahas mengenai diameter dari masing-masing graf yang terbentuk dan riset [10] membahas mengenai beberapa keumuman yang muncul pada graf atas grup berhingga yang terbentuk. Graf hasil reprsentasi dari grup ini juga diaplikasikan dalam beberpa bidang, misalnya dalam bidang evolusi [11] dan bidang epidemologi [12].

Intersection graph dengan subjek teori ring juga mendapatkan banyak perhatian dari peneliti matematika. Dalam hal ini, vertek dipandang sebagai ideal dalam ring, sementara adjacency antar vertek masih seperti kriteria *intersection graph* yang sebelumnya. Contoh riset yang berkaitan dengan *intersection graph* pada ideal dalam ring [13], hasil lainnya yang lebih spesifik pada *principal ideal ring* [14] dan pemahasan dari segi planaritasnya [15]. Kemudian lebih lengkapnya mengenai riset-riset pada *intersection graph* dalam ideal dari struktur ring dirangkum dalam *survey* [16].

Penelitian ini akan membahas lebih lanjut mengenai irisan graf yang terbentuk dari grup dihedral D_{2n} [17] dengan memperumum nilai n menjadi $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Penelitian ini akan mencari tahu sejauh mana k dapat diperluas dan menghasilkan himpunan dominasi yang sesuai untuk $k \in \mathbb{N}$. Lebih lanjut dari himpunan dominasi yang terbentuk akan dicari nilai kardinalitas minimal dari D_{2n} dengan $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$.

2 Tinjauan Pustaka

Penelitian dilakukan denga mempelajari sejumlah referensi yang berhubungan dengan topik yang diangkat penulis. Selanjutnya dengan membaca, memahami dan menganalisis tentang grup dihedral D_{2n}, subgrup non-trivial grup dihedral, graf irisan, sifat-sifat graf dan lain-lain. Kemudian dengan memperhatikan pola dari subgroup non-trivial dalam grup D_{2n} dapat ditemukan sifat-sifat dari graf irisan dari grup tersebut.

Terminologi tentang graf diambil dari sumber [18], sementara terminologi yang berkaitan dengan grup diambil dari sumber [19]. Definisi yang berkaitan dengan grup dihedral diberikan secara detail untuk keutuhan naskah artikel ini.

Definisi 2.1[19] Misalkan G adalah grup. Grup G dikatakan grup dihedral dengan order $2n$, $n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$, adalah grup yang dibangun oleh dua elemen $a, b \in G$ dengan sifat

$$\boldsymbol{G = \langle a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle}.$$

Diperhatikan bahwa, karena $b^2 = e$, maka $b^{-1} = b$ sehingga pernyataan $bab^{-1} = a^{-1}$, setara dengan pernyataan $bab = a^{-1}$. Lebih lanjut grup dihedral dengan order $2n$ disimbolkan dengan D_{2n} dari Definisi 2.1 ini dapat dilihat bahwa $|D_{2n}| = 2n$ dan D_{2n} dapat dituliskan sebagai himpunan yaitu

$$D_{2n} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}.$$

Untuk keperluan menyusun graf irisan dari grup dihedral, diperlukan list dari semua subgrup non-trivial dari grup dihedral. Subgroup non trivial dalam grup dihedral pada pembahasan ini dibagi menjadi tiga jenis, yaitu subgrup rotasi yang terdiri dari unsur-unsur rotasi dalam grup, subgroup rotasi yang hanya berisi unsur rotasi dan campuran keduanya yang disebut subgroup campuran. Grup dihedral memiliki minimal dua dari tiga jenis subgrup, yaitu subgrup rotasi, subgrup refleksi, dan subgrup campuran tersebut. Berikut teorema-teorema dari penelitian [20], yang dapat dimanfaatkan untuk mencari subgrup non-trivial dari grup dihedral.

Teorema 2.2 [20] Diberikan D_{2n} grup diherdral dengan $n \geq 3$. Jika $R = \{e, a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}\} \subseteq D_{2n}$ maka R subgrup non-trivial dari D_{2n}.

Teorema 2.3 [20] Diberikan D_{2n} grup diherdral dan dengan $n \geq 3$. Jika $S_i = \{e, a^i b\} \subseteq D_{2n}$ dimana $i = 0,1,2, \ldots, n-1$ maka S adalah subgrup non-trivial dari D_{2n}.

Teorema 2.4 [20] Diberikan D_{2n} grup diherdral dan dengan $n \geq 3$ dan $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ dengan p_i bilangan prima, maka $R_i = \{e, a^{p_i}, a^{2p_{i,}}, a^{3p_i}, \ldots, a^{n-p_i}\}$ adalah subgrup non-trivial dari D_{2n}.

Teorema 2.5 [20] Diberikan D_{2n} grup diherdral dan dengan $n \geq 3$ dan $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ dengan p_i bilangan prima berbeda. Untuk $i \in \{1,2, \ldots, k\}$ dan $j \in \{0,1,2, \ldots, p_i - 1\}$. $C_{ij} = \{e, a^{p_i}, a^{2p_i}, \ldots, a^{n-p_i}, a^j b, a^{j+p_i} b, a^{j+2p_i} b, \ldots, a^{j+n-p_i} b\}$ subgrup non-trivial dari D_{2n}.

3 Hasil dan Pembahasan

Sebelum masuk kepada pembahasan menganai graf irisan dari grup dihedral kita perlu memahami unsur refleksi dan unsur rotasi dalam grup tersebut. Sebuah elemen dalam grup dihedral disebut sebagai unsur refleksi jika mempunyai order 2, oleh karenannya $b \in D_{2n}$ adalah unsur refleksi karena mrupakan elemen yang berorder 2, sementara elemen lain yang mempuyai order lebih dari 2 disebut unsur rotasi dengan demikian elemen a dalam D_{2n} pada umumnya merupakan unsur rotasi. Unsur b bukanlah satu-satunya unsur refleksi, unsur refleksi lain pada grup dihedral mempunyai bentuk sebagai pada teorema berikut.

Teorema 3.1 Diberikan grup dihedral $D_{2n} = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2 b, \ldots, a^{n-1} b\}$. Jika $x \in D_{2n}$ dan $x = a^k b$ untuk $k \in \{1, \ldots, n\}$, maka x adalah unsur refleksi.

BUKTI. Untuk menunjukkan x unsur refleksi, akan ditunjukkan $x^2 = e$. Karena dikethaui $b^{-1} = b$ maka $a^{-1} = bab$. Akibatnya

$$\begin{aligned} x^2 &= (a^k b)(a^k b) \\ &= (a^{k-1} eab)(\mathrm{a^k} b) \\ &= (a^{k-1} b^2 ab)(a^k b) \\ &= (a^{k-1} ba^{-1})(\mathrm{a^k} b) \\ &= (a^{k-1} b^2 ab)(a^{k-1}) \\ &= (a^{k-2} ba^{-1})(a^{k-1} b) \\ &= (a^{k-2} b)(a^{k-2} b) \end{aligned}$$

Proses diulagi sehingga diperoleh $x^2 = abab = aa^{-1} = e$. Jadi x adalah unsur refleksi.□

Teorema 3.2 Diberikan grup dihedral $D_{2n} = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ab, a^2 b, \ldots, a^{n-1} b\}$. Jika u, n adalah bilangan asli dengan $u \leq n$ maka $a^r ba^{n-u} = a^r a^u b$.

BUKTI. Misalkan $u \leq n$, diperoleh

$$\begin{aligned} a^r ba^{n-u} &= a^r ba^{-u} \\ &= a^r b(a^{-1}) a^{-u+1} \\ &= a^r b(bab) a^{-u+1} \\ &= a^r aba^{-u+1} \end{aligned}$$

Proses diteruskan hingga diperoleh $a^r ba^{n-u} = a^r a^u b$.□

Secara umum graf irisan terbentuk dengan menjadikan subgroup non trivialnya sebagai vertek, dan adjacencynya terjadi jika irisan dua subgroup tersebut tidak kosong. Definisi formal dari graf ini adalah sebagai berikut

Definisi 3.3 [7] Diberikan grup berhingga G dan $H_i, H_j \subset G$ adalah subgroup non trivial dari G. Graf irisan dari Gdidefinisikan sebagai graf dengan verteknya adalah himpuan subgroup non trivial dari G dan subgroup H_i *adjecent* dengan H_j jika $H_i \cap H_j \neq \{e\}$. Graf irisan dari G dinotasikan dengan Γ_G.

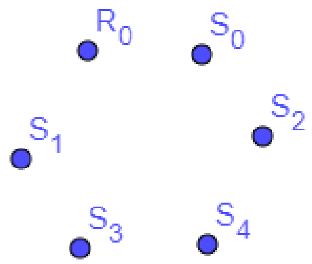
Contoh 3.4 Untuk $n = 5$, maka grup dihedral $D_{10} = \{e, a, a^2, a^3, a^4, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}$.

Memanfaatkan teorema-teorema di atas, dapat ditemukan subgrup-subgrup non-trivial dari D_{10} sebagai berikut

Tabel 1. Subgrup non-trivial dari $D_{2.5}$

Subgrup Rotasi	$R_0 = \{e, a, a^2, a^3, a^4\}$
Subgrup Refleksi	$S_0 = \{e, b\}$,$S_1 = \{e, ab\}$,$S_2 = \{e, a^2b\}$,$S_3 = \{e, a^3b\}$,$S_4\{e, a^4b\}$
Subgrup Campuran	-

Berdasarkan Tabel 1, diperoleh graf irisan dari D_{10} sebagai berikut



Gambar 1. Graf irisan dari D_{10} ($\Gamma_{D_{10}}$)

Contoh 3.4 di atas memberikan gambaran bahwa graf irisan dari grup dihedral D_{2n} dengan n bilangan prima merupakan graf kosong dengan $n + 1$ *vertex*, dan dinotasikan dengan N_{n+1}. Berikut teorema yang menjelaskan hal tersebut.

Teorema 3.5 [17] Jika D_{2n} grup dihedral dengan $n = p$ dengan p bilangan prima, maka graf irisan D_{2n} merupakan graf kosong N_{n+1}.

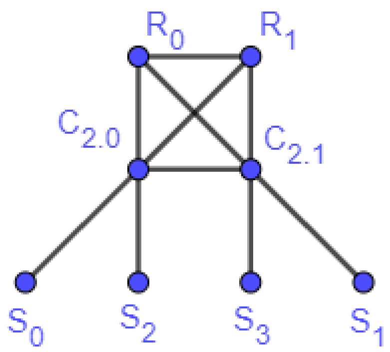
BUKTI. Misalkan D_{2n} grup dihedral. Ambil $n = p$ bilangan prima sebarang. Subgrup non-trivial dari D_{2n} adalah subgrup rotasi yaitu $\{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$ dan subgrup refleksi dengan bentuk $S_i = \{e, a^ib\}$ untuk setiap $i = 0,1,2, \dots, n-1$. Dengan demikian, diperoleh bahwa D_{2n} memiliki $n + 1$ buah subgrup non-trivial, artinya $\Gamma_{D_{2n}}$ memiliki $n + 1$ vertex. Ambil H, K subgrup non-trivial sebarang dari D_{2n} dengan $H \neq K$ maka diperoleh $H \cap K = \{e\}$. Jadi $\Gamma_{D_{2n}}$ merupakan graf kosong dengan $n + 1$ simpul, atau ditulis N_{n+1}.□

Graf irisan dari grup dihedral dengan oerder $n = p^2$ juga membentuk suatu graf khusus, lebih jelasnya perhatikan contoh berikut

Contoh 3.6 Untuk $n = p^2$ untuk p bilangan prima, misal $p = 2$ sehingga $n = 2^2$. Subgrup non trivial dari D_8 tampak dalam tabel berikut

Tabel 2. Subgrup non-trivial dari $D_{2.4}$

Subgrup Rotasi	$R_0 = \{e, a, a^2, a^3\}$, $R_1 = \{e, a^2\}$
Subgrup Refleksi	$S_0 = \{e, b\}$, $S_1 = \{e, ab\}$, $S_2 = \{e, a^2b\}$, $S_3 = \{e, a^3b\}$
Subgrup Campuran	$C_{2.0} = \{e, a^2, b, a^2b\}$, $C_{2.1} = \{e, a^2, ab, a^3b\}$



Gambar 2. Graf irisan dari D_8 (Γ_{D_8})

Graf pada Gambar 2 memiliki subgraf komplit K_4. Dengan langkah yang sama seperti contoh diatas, dapat diperoleh graf irisan dari grup dihedral D_{2n} ketika $n = p^2$ memiliki subgraf lengkap. Berikut teorema yang menjelaskan penjelasan diatas.

Teorema 3.7 [17] Jika D_{2n} grup dihedral dengan $n = p^2$ untuk p bilangan prima, maka $\Gamma_{D_{2n}}$ memiliki subgraf lengkap K_{p+2}.

BUKTI. Misalkan D_{2n} grup dihedral. Ambil $n = p^2$ dengan p bilangan prima sebarang. D_{2p^2} memiliki dua buah subgrup rotasi, yaitu $R_1 = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$ dan $R_2 = \{e, a^p, a^{2p}, \dots, a^{n-p}\}$, p^2 buah subgrup refleksi yaitu $S_i = \{e, a^i b\}$ untuk $i = 0,1,2, \dots, p^2 - 1$ dan p buah subgrup campuran, yaitu $C_j = \{e, a^p, a^{2p}, \dots, a^{n-p}, a^j b, a^{j+p} b, \dots, a^{j+n-p} b\}$ untuk $j = 0,1,2, \dots, p-1$. Setiap H, K subgrup rotasi atau campuran yang berbeda, berlaku $H \cap K \neq \{e\}$, artinya H dan K selalu saling terhubung. Dengan demikian subgrup rotasi dan campuran membentuk subgraf lengkap dari $\Gamma_{D_{2n}}$, yaitu subgraf K_{p+2}. □

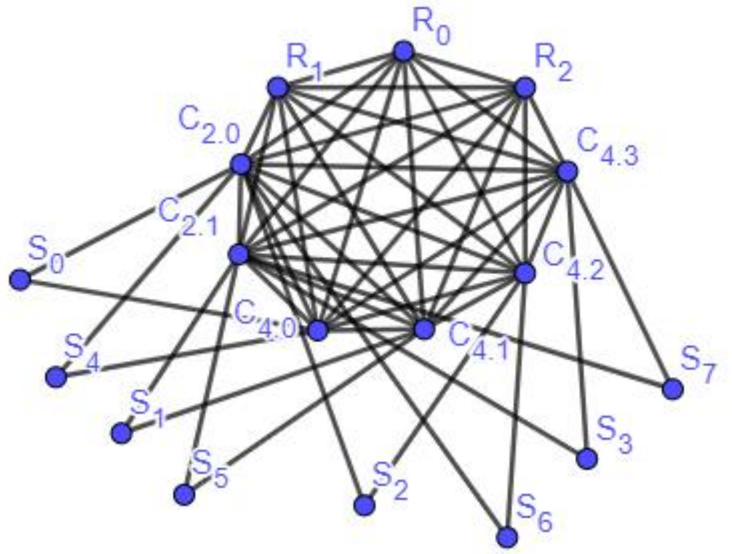
Berdasarkan Teorema 3.7 dapat kita tahu bahwa untuk setiap $n = p^2$ dengan p sebarang bilangan prima selalu memiliki subgraf lengkap K_{p+2}. Selanjutnya diberikan contoh graf irisan dari D_{2n} untuk $n = p^k$ dengan p bilangan prima dan $k > 1$ untuk $k \in \mathbb{N}$,

Contoh 3.8 Dipilih $n = 8$ subgrup non-trivial yang terbentuk dari $D_{2.8}$ disajikan dalam tabel sebagai berikut

Tabel 3. Subgrup non-trivial dari $D_{2.8}$

Subgrup Rotasi	$R_0 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7\}$, $R_1 = \{e, a^2, a^4, a^6\}$, $R_2 = \{e, a^4\}$
Subgrup Refleksi	$S_0 = \{e, b\}$,$S_1 = \{e, ab\}$, $S_2 = \{e, a^2 b\}$, $S_3 = \{e, a^3 b\}$, $S_4 = \{e, a^4 b\}$, $S_5 = \{e, a^5 b\}$, $S_6 = \{e, a^6 b\}$, $S_7 = \{e, a^7 b\}$
Subgrup Campuran	$C_{2.0} = \{e, a^2, a^4, a^6, b, a^2 b, a^4 b, a^6 b\}$, $C_{2.1} = \{e, a^2, a^4, a^6, ab, a^3 b, a^5 b, a^7 b\}$, $C_{4.0} = \{e, a^4, b, a^4 b\}$,$C_{4.1} = \{e, a^4, ab, a^5 b\}$, $C_{4.2} = \{e, a^4, a^2 b, a^6 b\}$,$C_{4.1} = \{e, a^4, a^3 b, a^7 b\}$

Berdasarkan Tabel 3 yang dituliskan di atas, dapat dibentuk graf irisan sebagai berikyt



Gambar 3. Graf irisan dari $D_{2.8}$

Graf pada Gambar 3 memiliki subgraf lengkap K_9. Dengan langkah yang sama seperti contoh diatas dapat diperoleh graf irisan dari grup dihedral D_{2n} ketika $n = p^k$ dengan p bilangan prima dan $k > 1$ untuk $k \in \mathbb{N}$ memiliki subgraf lengkap. Berikut teorema yang menjelaskan.

Teorema 3.9 Jika D_{2n} grup dihedral dengan $n = p^k$ untuk p bilangan prima dan $k > 1$ untuk $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{D_{2p^k}}$ memiliki subgraf lengkap $K_{k+\sum_{i=1}^{k-1} p^i}$.

BUKTI. Diberikan D_{2n} grup dihedral dengan $n = p^k$ untuk p sebarang bilangan prima dan $k > 1$ untuk $k \in \mathbb{N}$. D_{2p^k} memiliki k buah subgrup rotasi, yaitu

$$R_0 = \left\{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{p^k-1}\right\}$$
$$R_1 = \left\{e, a^p, a^{2p}, a^{3p}, \dots, a^{p^k-p}\right\}$$
$$R_2 = \left\{e, a^{p^2}, a^{2p^2}, a^{3p^2}, \dots, a^{p^k-p^2}\right\}$$
$$\vdots$$
$$R_{k-1} = \left\{e, a^{p^{k-1}}, a^{2p^{k-1}}, a^{3p^{k-1}}, \dots, a^{p^k-p^{k-1}}\right\}$$

Subgrup refleksi dalam grup tersebut adalah $S_i = \{e, a^i b\}$, untuk $i = 0,1,2, \dots, p^k - 1$, sebanyak p^k. Lalu subgrup campuranya adalah sebagai berikut

$$C_{p.j} = \left\{e, a^p, a^{2p}, \dots, a^{p^k-p}, a^j b, a^{j+p} b, \dots, a^{j+p^k-p} b\right\}$$
$$C_{p^2.j} = \left\{e, a^{p^2}, a^{2p^2}, \dots, a^{p^k-p^2}, a^j b, a^{j+p^2} b, \dots, a^{j+p^k-p^2} b\right\}$$
$$C_{p^3.j} = \left\{e, a^{p^3}, a^{2p^3}, \dots, a^{p^k-p^3}, a^j b, a^{j+p^3} b, \dots, a^{j+p^k-p^3} b\right\}$$
$$\vdots$$
$$C_{p^{k-1}.j} = \left\{e, a^{p^{k-1}}, a^{2p^{k-1}}, \dots, a^{p^k-p^{k-1}}, a^j b, a^{j+p^{k-1}} b, \dots, a^{j+p^k-p^{k-1}} b\right\}$$

untuk $j = 0,1,2, \dots, p^{k-1} - 1$.

Diperhatikan bahwa elemen dalam $C_{p.j}$ ada sebanyak p, sementara elemen dalam $C_{p^2.j}$ ada sebanyak p^2, $C_{p^3.j}$ ada sebanyak p^3, dan seterusnya sampai pada $C_{p^{k-1}.j}$ akan ada sebanyak p^{k-1}. Secara berurutan, jumlah subgrup campuran dari D_{2p^k} ada sebanyak

$$p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{k-1} = \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} p^i.$$

Setiap H, K subgrup rotasi atau campuran yang berbeda, berlaku $H \cap K \neq \{e\}$, artinya H dan K akan selalu *adjecent*. Dengan demikian subgrup rotasi dan campuran membentuk subgraf lengkap dari $\Gamma_{D_{2p^k}}$, yaitu subgraf $K_{k+\sum_{i=1}^{k-1} p^i}$. □

Dalam penelitian [17] mereka meneliti bilangan dominasi graf, dengan definisinya sebagai berikut.

Definisi 3.10 [21] Misalkan $H = (V, E), D \subseteq V$ disebut himpunan dominasi jika untuk setiap simpul di $V \setminus D$ bertetangga dengan minimal sebuah simpul di D. Bilangan dominasi adalah kardinalitas minimal dari himpunan dominasi dan dinotasikan dengan $\gamma(H)$.

Berdasarkan Gambar 2, diperoleh $D = \{C_{2.0}, C_{2.1}\}$ merupakan himpunan dominasi graf. Himpunan D merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas minimal karena graf tersebut tidak memiliki himpunan dominasi dengan kardinalitas 1. Jadi bilangan dominasi graf pada Gambar 2 adalah 2. Berikut Teorema yang menjelaskan bilangan dominasi graf irisan dari grup dihedral untuk $n = p^2$ untuk p bilangan prima.

Teorema 3.11 [17] Jika diberikan $n = p^2$, p bilangan prima, serta D_{2n} grup dihedral, maka $\gamma(\Gamma_{D_{2n}}) = p$.

Berdasarkan Gambar 3, diperoleh bahwa $D = \{C_{2.0}, C_{2.1}, C_{4.0}, C_{4.1}, C_{4.2}, C_{4.3}\}$ merupakan himpunan dominasi graf. Namun, D bukan merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas minimal karena graf tersebut masih memiliki himpunan dominasi yang lain dengan $D_1 = \{C_{2.0}, C_{2.1}\}$ dan $D_2 = \{C_{4.0}, C_{4.1}, C_{4.2}, C_{4.3}\}$ dengan $D_1, D_2 \subseteq D$. Sehingga dapat dilihat bahwa D_1 merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas minimal. Jadi bilangan dominasi graf pada Gambar 3 adalah 2.

Penjelasan di atas menjadi gambaran bilangan dominasi graf irisan dari grup dihedral untuk $n = p^k$ untuk p bilangan prima dan $k > 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$, yang dituliskan sebagai berikut

Teorema 3.12 Jika diberikan $n = p^k$, p bilangan prima dan $k > 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$, serta D_{2n} grup dihedral, maka $\gamma\left(\Gamma_{D_{2p^k}}\right) = p$.

BUKTI. Misalkan D_{2n} grup dihedral. Ambil $n = p^k$ untuk suatu p bilangan prima sebarang dan $k > 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Subgrup non-trivial dari D_{2p^k} adalah

$$D_1 = \{C_{p.0}, C_{p.1}, C_{p.2}, \dots, C_{p.p-1}\}$$
$$D_2 = \{C_{p^2.0}, C_{p^2.1}, C_{p^2.2}, \dots, C_{p^2.p^2-1}\}$$
$$D_3 = \{C_{p^3.0}, C_{p^3.1}, C_{p^3.2}, \dots, C_{p^3.p^3-1}\}$$
$$\vdots$$
$$D_{k-1} = \{C_{p^{k-1}.0}, C_{p^{k-1}.1}, C_{p^{k-1}.2}, \dots, C_{p^{k-1}.p^{k-1}-1}\}.$$

Secara umum dapat dituliskan $D_i = \{C_{p^i.0}, C_{p^i.1}, C_{p^i.2}, \dots, C_{p^i.p^i-1}\}$ untuk $i = 1,2,3, \dots, k-1$. Akan dibuktikan bahwa $V\left(\Gamma_{D_{2p^k}}\right) \setminus D_i$ didominasi oleh D_i. Jelas bahwa subgrup $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{k-1}$ selalu *adjecent* dengan semua subgrup campurannya sehingga benar bahwa subgrup rotasi didominasi oleh D_i untuk $i = 1,2,3, \dots, k-1$. Selanjutnya, untuk setiap subgrup campuran juga *adjecent* dengan p^k buah subgrup refleksi. Dengan kata lain setiap D_i mendominasi subgrup refleksi. Lalu, untuk setiap anggota-anggota D_i juga saling *adjecent* untuk i yang berbeda. Sehingga D_i dengan i yang berbeda akan saling mendominasi. Jadi terbukti untuk setiap D_i merupakan himpunan dominasi dari $\Gamma_{D_{2p^k}}$ dengan kardinalitas masing-masing D_i adalah p^i. Karena setiap D_i untuk $i = 1,2,3, \dots, k-1$ merupakan himpunan dominasi diperoleh $|D_1| < |D_2| < \cdots < |D_{k-1}|$. Berdasarkan penjelasan tersebut diperoleh D_1 merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas minimal yaitu p atau $\gamma\left(\Gamma_{D_{2p^k}}\right) = p$. ∎

Sifat terakhir yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bilangan kebebasan graf. Bilangan kebebasan graf didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.13 [21] Diberikan $H = (V, E), I \subseteq V$ disebut himpunan kebebasan graf H jika tidak terdapat vertex-vertex di I yang adjecent. Kardinalitas maksimal dari himpunan kebebasan disebut dengan bilangan kebebasan dari graf H dan dinotasikan dengan $\beta(H)$.

Berdasarkan Gambar 3, dapat dilihat bahwa untuk setiap subgrup refleksinya tidak saling *adjecent*, sehingga $A = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$ merupakan himpunan kebebasan. Juga perhatikan bahwa subgrup rotasi juga tidak saling *adjecent* dengan subgrup refleksinya. Karena subgrup rotasi saling *adjecent* untuk subgrup yang berbeda, maka hanya butuh salah satu saja sehingga himpunan tunggal $B = \{R_i\}$ untuk $i = 0,1,2$, merupakan himpunan kebebasan. Karena bilangan kebebasan merupakan himpunan kebebasan dengan kardinalitas maksimal, maka dapat diperoleh bilangan kebebasan graf $\Gamma_{D_{2.8}}$ adalah $|A \cup B| = 9$ atau $\beta\left(\Gamma_{D_{2.8}}\right) = 9$. Berikut ini diberikan Teorema yang menjelaskan bilangan kebebasan graf irisan dari grup dihedral untuk $n = p^k$ untuk p bilangan prima dan $k > 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.14 Jika D_{2n} grup dihedral dengan $n = p^k$, p bilangan prima dan $k > 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$ maka $\beta\left(\Gamma_{D_{2p^k}}\right) = p^k + 1$.

BUKTI. Diambil D_{2n} grup dihedral. Ambil $n = p^k$ suatu p bilangan prima sebarang dan $k > 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Dalam Teorema 7 diperoleh subgrup non-trivial dari D_{2p^k}. Perhatikan untuk S_x, S_y dengan $x \neq y$ berlaku $S_x \cap S_y = \{e\}$, dengan kata lain $A = \{S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}\}$ merupakan himpunan kebebasan bagi $\Gamma_{D_{2p^k}}$. Selanjutnya untuk R_x, R_y dengan $x \neq y$ berlaku $R_x \cap R_y \neq \{e\}$ sehingga untuk $B = \{R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{k-1}\}$ bukan himpunan kebebasan dari $\Gamma_{D_{2p^k}}$. Tetapi, kita tahu bahwa $K_1 \cap K_2 = \{e\}$ untuk setiap $K_1 \in A$ dan $K_2 \in B$. Dengan demikian $B \cup \{R_i\}$ untuk $i = 0,1,2, \ldots, k-1$, merupakan himpunan kebebasan bagi $\Gamma_{D_{2p^k}}$ dengan

$$\begin{aligned} |B \cup \{R_i\}| &= |B| + |R_i| \\ &= p^k + 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{B \cup \{R_i\}}$ untuk $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, \ldots, k-1}$ merupakan himpunan kebebasan dari $\boldsymbol{\Gamma_{D_{2p^k}}}$ dengan kardinalitas maksimal. Perhatikan $\boldsymbol{B \cup \{R_i\}}$, jika ditambahkan dengan satu *vertex* saja dapat dipastikan minimal terdapat dua buah *vertex* yang *adjecent*. Dengan demikian $\boldsymbol{B \cup \{R_i\}}$ merupakan himpunan kebebasan dengan kardinalitas maksimal atau bilangan kebebasan graf $\boldsymbol{\Gamma_{D_{2p^k}}}$ adalah $\boldsymbol{p^k + 1}$ atau $\boldsymbol{\beta\left(\Gamma_{D_{2p^k}}\right) = p^k + 1}$. ∎

4 Kesimpulan

Beberapa kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Jika D_{2n} gurp dihedral dengan $n = p^k$ untuk p bilangan prima dan $k > 1$ untuk $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{D_{2p^k}}$ memiliki subgraf lengkap $K_{k+\sum_{i=1}^{k-1} p^i}$.
2. Jika diberikan $n = p^k$, p bilangan prima dan $k > 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$, serta D_{2n} grup dihedral, maka $\gamma\left(\Gamma_{D_{2p^k}}\right) = p$.

3. Jika D_{2n} grup dihedral dengan $n = p^k$, p bilangan prima dan $k > 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$ maka $\beta\left(\Gamma_{D_{2p^k}}\right) = p^k + 1$.

Daftar Pustaka

[1] A. Munandar, "Some Properties On Coprime Graoh of Generalized Quaternion Groups," *BAREKENG J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 17, no. 3, pp. 1373–1380, Sep. 2023, doi: 10.30598/barekengvol17iss3pp1373-1380.

[2] A. Sehgal, Manjeet, and D. Singh, "Co-prime order graphs of finite abelian groups and dihedral groups," *J. Math. Comput. Sci.*, vol. 23, no. 3, pp. 196–202, 2020, doi: 10.22436/jmcs.023.03.03.

[3] A. Kelarev and S. J. Quinn, "A COMBINATORIAL PROPERTY AND," no. January 2004, 2004.

[4] P. J. Cameron and S. Ghosh, "The power graph of a finite group," *Discrete Math.*, vol. 311, no. 13, pp. 1220–1222, 2011, doi: 10.1016/j.disc.2010.02.011.

[5] D. Alireza, E. Ahmad, and J. Abbas, "Some results on the power graphs of finite groups," *ScienceAsia*, vol. 41, no. 1, pp. 73–78, 2015, doi: 10.2306/scienceasia1513-1874.2015.41.073.

[6] P. J. Cameron, H. Guerra, and Š. Jurina, "The power graph of a torsion-free group," *J. Algebr. Comb.*, vol. 49, no. 1, pp. 83–98, 2019, doi: 10.1007/s10801-018-0819-1.

[7] P. Erdös, A. W. Goodman, and L. Pósa, "The Representation of a Graph by Set Intersections," *Can. J. Math.*, vol. 18, no. 2, pp. 106–112, 1966, doi: 10.4153/cjm-1966-014-3.

[8] R. Shen, "*Intersection graph*s of subgroups of finite groups," *Czechoslov. Math. J.*, vol. 60, no. 4, pp. 945–950, Dec. 2010, doi: 10.1007/s10587-010-0085-4.

[9] X. Ma, "On the diameter of the *intersection graph* of a finite simple group," *Czechoslov. Math. J.*, vol. 66, no. 2, pp. 365–370, Jun. 2016, doi: 10.1007/s10587-016-0261-2.

[10] H. Shahsavari and B. Khosravi, "On the *intersection graph* of a finite group," *Czechoslov. Math. J.*, vol. 67, no. 4, pp. 1145–1153, Dec. 2017, doi: 10.21136/CMJ.2017.0446-16.

[11] M. Bradonjić, A. Hagberg, N. W. Hengartner, and A. G. Percus, "Component Evolution in General Random *Intersection graph*s," 2010, pp. 36–49. doi: 10.1007/978-3-642-18009-5_5.

[12] F. G. Ball, D. J. Sirl, and P. Trapman, "Epidemics on random *intersection graph*s," *Ann. Appl. Probab.*, vol. 24, no. 3, pp. 1081–1128, 2014, doi: 10.1214/13-AAP942.

[13] I. Chakrabarty, S. Ghosh, T. K. Mukherjee, and M. K. Sen, "*Intersection graph*s of ideals of rings," *Electron. Notes Discret. Math.*, vol. 23, pp. 23–32, Nov. 2005, doi: 10.1016/j.endm.2005.06.104.

[14] E. A. Osba, "The *intersection graph* of finite commutative principal ideal rings," *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyiregyhaziensis*, vol. 32, no. 1, pp. 15–22, 2016.

[15] P. Vadhel and S. Visweswaran, "Planarity of a spanning subgraph of the *intersection graph* of ideals of a commutative ring II, quasilocal case," *Algebr. Discret. Math.*, vol. 27, no. 1, pp. 117–143, 2019.

[16] I. Chakrabarty and J. V. Kureethara, "A survey on the *intersection graph*s of ideals of rings," *Commun. Comb. Optim.*, vol. 7, no. 2, pp. 121–167, 2022, doi: 10.22049/CCO.2021.26990.1176.

[17] N. Nurhabibah, A. G. Syarifudin, I. G. A. W. Wardhana, and Q. Aini, "The *Intersection graph* of a Dihedral Group," *Eig. Math. J.*, pp. 68–73, Dec. 2021, doi: 10.29303/emj.v4i2.119.

[18] A. Munandar, *Pengantar Matematika Diskrit dan Teori Graf*. Deepulish, 2022.

[19] R. M. Dummit, David S.; Foote, *Abstract Algebra 3rd Edition*. Jhon Wiley & Sons, 2004.
[20] A. Gazir and I. G. A. W. Wardhana, “Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral,” *Eig. Math. J.*, pp. 73–76, Dec. 2019, doi: 10.29303/emj.v1i2.26.
[21] N. Murugesan and D. S. Nair, “The Domination and Independence of Some Cubic Bipartite Graphs,” *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, vol. 6, no. 13, pp. 611–618, 2011.