



DINAMIKA MODEL MANGSA-PEMANGSA LOTKA VOLTERRA DENGAN ADANYA KERJA SAMA BERBURU PADA PEMANGSA

SAFINADIN INDIRA SALWA¹, LINTANG ALEA SHAKIRA², DIAN SAVITRI^{3*}

^{1,2,3} Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya

*Penulis Korespondensi: diansavitri@unesa.ac.id

ABSTRAK

Artikel ini membahas model mangsa-pemangsa Lotka Volterra dengan adanya kerja sama berburu pada pemangsa. Sistem dianalisis dengan menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan lokal masing-masing solusi yang menghasilkan analisis kestabilan sebanyak empat buah titik kestabilan, yaitu titik kepunahan semua populasi yang tidak stabil, titik kepunahan populasi pemangsa stabil dengan syarat, serta dua titik interior kedua populasi yang stabil dengan syarat tertentu. Simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui kesesuaian hasil analisis dan perubahan solusi sistem karena adanya kerja sama berburu pada pemangsa berupa potret fase menggunakan P-Plane. Hasil analisis kestabilan dan simulasi numerik menunjukkan kestabilan ganda (bistabil) pada titik interior dan titik kepunahan populasi pemangsa saat parameter kerja sama berburu dengan $\alpha = 0.5$, dan $\alpha = 0.16$. Perubahan parameter kerja sama mempengaruhi titik kesetimbangan interior. Penurunan parameter kerjasama berburu pada pemangsa dapat menyebabkan perubahan titik interior.

Kata Kunci: Model Matematika, Kerja Sama Berburu, Lotka Volterra, bistabil.

ABSTRACT

This article discusses the Lotka Volterra prey-predator model in which predators cooperate in hunting. System analysis is carried out by determining the balance point and local stability of each solution which results in a stability analysis of four stability points, namely the extinction point of the entire unstable population, the extinction point of a stable predator population under certain conditions, and the extinction point of a stable predator population under certain condition, and two interior points of two populations that are stable under certain conditions. Numerical simulations were carried out to determine the suitability of the analysis results and changes in system solutions due to cooperative predator hunting in the form of phase portraits using P-Plane. The results of stability analysis and numerical simulations show dual stability (bistable) at the interior point and extinction point of the predator population when the hunting parameters are cooperative with $\alpha = 0.5$, and $\alpha = 0.16$. Changes in cooperation parameters affect the interior balance point. Decreased hunting cooperation parameters in predators can cause changes in interior points.

Keywords: *Mathematical Models, Hunting Cooperation, Lotka Volterra, bistability*

1 Pendahuluan

Biomatematika merupakan disiplin ilmu yang mengkuantifikasi kejadian biologis menggunakan alat matematika [1]. Salah satu model biomatematika adalah model ekologi. Model ekologi merupakan cabang ilmu biologi yang mempelajari hubungan timbal balik antara makhluk hidup, kemudian hubungan tersebut direpresentasikan dalam bahasa matematika [2]. Model ekologi biasanya dikaitkan dengan fenomena alam yang sering terjadi di sekitar, salah satunya yaitu adanya interaksi antar populasi. Interaksi antara dua populasi terjadi antara mangsa dan pemangsa [3]. Pemangsa mempunyai sifat memburu dan memakan populasi lain, sedangkan mangsa adalah yang diburu dan dimakan oleh pemangsa. Hubungan yang dinamis antara mangsa dan pemangsa tersebut merupakan kejadian yang sering terjadi dan berulang serta keberadaannya keduanya saling mempengaruhi populasi satu sama lain [4].

Setiap populasi memiliki karakteristik tersendiri untuk bertahan hidup dalam suatu ekosistem. Karakter tersebut dapat berupa pertahanan diri, saling berkompetisi untuk berebut mangsa, maupun bekerja sama ketika berburu mangsa [5]. Dalam konteks berburu, kerja sama dapat diartikan sebagai dua atau lebih individu meningkatkan kemampuan dengan bertindak bersama untuk tujuan yang sama. Kerja sama berburu pada pemangsa memiliki beberapa keuntungan, seperti meningkatkan peluang keberhasilan dalam berburu, mengurangi waktu pemburuan, menargetkan mangsa dengan jumlah yang besar, menemukan makanan dengan cepat, serta mencegah mangsa dimangsa oleh pemangsa lain [6]. Beberapa binatang yang menunjukkan kebiasaan bekerja sama ketika berburu ialah elang, singa, buaya, dan simpanse. Mangsa utama dari simpanse adalah *red colobus monkey* yang menghabiskan waktunya berada di pohon setinggi 40-50 meter, serta memiliki bobot sekitar 8-13 kilogram untuk spesies dewasa. *Red colobus monkey* dapat bergerak lincah, serta mampu melompat di antara pepohonan, sehingga memudahkan mereka untuk melarikan diri dari pemangsa. Hal ini menggambarkan simpanse berburu mangsa secara kelompok, dengan cara berkoordinasi untuk menyudutkan mangsanya. Pergerakan simpanse juga dipengaruhi oleh habitat, karena apabila habitat mereka berada pada hutan lebat, maka mereka semakin sulit untuk menyudutkan mangsanya [7]. Pemangsa dapat meningkatkan peluang keberhasilan berburu apabila mereka mampu memprediksi mangsa [8].

Kerja sama dalam berburu pada pemangsa dapat mempengaruhi ekosistem. Laju pertumbuhan populasi mangsa yang cepat dapat menyebabkan penurunan laju pertumbuhan populasi pemangsa. Oleh karena itu, pertumbuhan populasi mangsa perlu dikendalikan supaya ekosistem tetap seimbang. Fenomena ini dapat dimodelkan secara matematika berdasarkan asumsi dan beberapa peneliti terdahulu telah membahas perburuan langsung mangsa oleh predator [9-11]. Kerja sama berburu pada pemangsa telah diteliti dengan mempertimbangkan fungsi respon yang berbeda [12-15]. Fungsi respon atau yang disebut sebagai laju pemangsaan pemangsa terhadap mangsa yang menggambarkan pencarian mangsa oleh pemangsa. Alves dan Hilker menggunakan fungsi respon Holling tipe I dan menambahkan istilah kerja sama $c\gamma$ pada tingkat perburuan λ untuk merepresentasikan keberhasilan berburu [16]. Dinamika interaksi antar populasi yang mempengaruhi perubahan kestabilan telah dikaji beberapa peneliti dengan menggabungkan efek ketakutan, efek allee, dan perilaku mangsa [17-21]. Para peneliti tersebut menemukan bahwa kerja sama berburu dapat menguntungkan populasi pemangsa, di sisi lain perburuan berlebihan atau sebaliknya juga dapat menyebabkan kepunahan populasi pemangsa. Berdasarkan perkembangan model matematika dengan fenomena adanya kerjasama berburu dapat mempengaruhi perubahan suatu ekosistem, maka pada penelitian ini membahas model interaksi mangsa-pemangsa dengan mempertimbangkan kerja sama berburu pada pemangsa.

2 Tinjauan Pustaka

2.1 Model Mangsa Pemangsa dengan Kerja Sama Berburu

Model interaksi antar populasi yang dikenal sebagai model mangsa-pemangsa, dengan asumsi bahwa satu populasi merupakan mangsa sedangkan lainnya merupakan pemangsa yang memangsa dengan tujuan bertahan hidup. Model ini merupakan salah satu topik yang terus mengalami perkembangan dan modifikasi sesuai kondisi alam.

Model mangsa-pemangsa yang mempertimbangkan kerja sama berburu telah dibahas oleh Alves dan Hilke [16], sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - (p + \alpha y)xy, \\ \frac{dy}{dt} &= c(p + \alpha y)xy - \mu y.\end{aligned}\quad (1)$$

Model (1) merepresentasikan laju pertumbuhan populasi mangsa yang dinyatakan dalam x dan populasi pemangsa dalam y . Model tersebut menambahkan istilah kerja sama perburuan pada laju serangan populasi predator, dengan parameter α . Parameter c , p , r , dan μ berturut-turut menyatakan tingkat konversi pemangsa, tingkat pemangsaan pemangsa terhadap mangsa, laju pertumbuhan alami populasi mangsa, serta laju kematian alami pemangsa per kapita. Hasil analisis dan simulasi model (1) memungkinkan predator bertahan tanpa kerja sama perburuan dan menyebabkan perubahan serta hilangnya populasi predator.

Pal, Samanta, dan Chattopadhyay [17], membahas model mangsa pemangsa dengan adanya kerja sama berburu pada pemangsa dan ketakutan pada mangsa.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{rx}{1+ey} - bx^2 - (p + \alpha y)xy - dx, \\ \frac{dy}{dt} &= c(p + \alpha x)xy - \mu y.\end{aligned}\quad (2)$$

Model (2) tersebut mempertimbangkan pada saat berburu secara kelompok, pemangsa bekerja sama sehingga menyebabkan ketakutan pada mangsa. Ketakutan yang diwakili $f(x) = \frac{rx}{1+ey}$ pada populasi pemangsa dapat menyebabkan laju pertumbuhan mangsa menurun.

Kemudian Du, Niu, dan Wei [22] mendiskusikan model mangsa pemangsa dengan adanya kerja sama berburu pada pemangsa dan pertahanan kelompok pada mangsa. Penelitian tersebut menggambarkan dinamika efek dari kerja sama berburu dan pertahanan kelompok melalui analisis bifurkasi. Perburuan pemangsa pada mangsa, fungsi respon Holling tipe I dan Holling tipe II juga diilustrasikan secara luas, serta fenomena alam yang kompleks.

2.2 Model Mangsa Pemangsa dengan Kerja Sama Berburu dengan Fungsi Respon

Komponen dasar pada interaksi model mangsa-pemangsa ialah fungsi respon, yang merupakan suatu respon dari konsumsi mangsa oleh individu pemangsa untuk mengubah kepadatan populasi mangsa. Fungsi respon juga dapat dikatakan sebagai laju pemangsaan pemangsa terhadap mangsa.

Holling memperkenalkan fungsi respon, yaitu Holling tipe I, Holling tipe II, dan Holling tipe III [23]. Fungsi respon Holling tipe I mengasumsikan bahwa laju pemangsaan meningkat secara linier sebanding dengan bertambahnya populasi mangsa. Persentase mangsa yang dimangsa oleh pemangsa adalah tetap.

Belew dan Melese [20] menggunakan fungsi respon Holling tipe II pada laju pemangsaan dan menggabungkan kerja sama perburuan pada populasi predator.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{rx}{1+ey} \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{(p + \alpha y)xy}{1 + m(p + \alpha y)x} - H_1 Q_1 N, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{c(p + \alpha y)xy}{1 + m(p + \alpha y)x} - \mu y - H_2 Q_2 N.\end{aligned}\quad (3)$$

Pada model mangsa-pemangsa (3), populasi mangsa dipanen secara linier dan dipengaruhi oleh rasa takut, serta populasi mangsa meningkat secara logistik tanpa adanya predator. Populasi predator mengikuti kerja sama perburuan dengan pemangsaan menggunakan fungsi respon Holling tipe II, dan dipanen secara linier. Hasil simulasi numerik ditemukan efek ketakutan, kerja sama berburu, pemanenan mangsa, dan pemanenan predator mempengaruhi perubahan pada dinamika sistem (3) tersebut.

3 Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini diawali dengan studi literatur beberapa peneliti terdahulu. berdasarkan fenomena dan perilaku pemangsa bekerjasama dalam perburuan, serta mempertimbangkan faktor yang berpengaruh terhadap perubahan pertumbuhan kedua populasi. Asumsi yang digunakan berdasarkan persamaan (1), (2), (3), dan (4), dengan mempertimbangkan adanya kerja sama berburu pada populasi predator. Beberapa asumsi yang digunakan sebagai dasar dalam mengkonstruksi model sebagai berikut:

1. Model matematika mempertimbangkan faktor pertumbuhan antar populasi, yaitu pemangsa dan mangsa mengikuti model pertumbuhan Lotka Volterra. Pertumbuhan populasi diasumsikan tumbuh secara logistik.
2. Interaksi antar kedua populasi tersebut juga diperhatikan serta perilaku populasi pemangsa menggunakan kerja sama berburu di antara mereka sendiri untuk menangkap populasi mangsa sesuai fungsi respon Holling tipe I.
3. Kerja sama berburu populasi predator berbentuk $(p + \alpha y)$, dengan α parameter kerja sama berburu, jika $\alpha = 0$ model mangsa pemangsa tanpa kerja sama berburu.

Beberapa asumsi tersebut digunakan sebagai dasar dalam mengkonstruksi model mangsa pemangsa.

3.1 Konstruksi Model

Penelitian ini mengadopsi penelitian yang telah dilakukan oleh Alves dan Hilke [16] dan menggabungkan model [19]. Pada penelitian ini juga menyederhanakan beberapa asumsi dari model [21] dan [23] dengan tidak memasukkan pengaruh efek ketakutan dan efek allee, karena terdapat persaingan sesama populasi mangsa. Model interaksi mangsa-pemangsa pada penelitian ini mempertimbangkan adanya kerja sama berburu pada pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe I. Asumsi laju pertumbuhan populasi mangsa tumbuh secara logistik mengikuti model pertumbuhan Lotka Volterra.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - bx^2 - (p + \alpha y)xy, \\ \frac{dy}{dt} = c(p + \alpha y)xy - \mu y. \end{cases} \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (4), $x(t)$ dan $y(t)$ mewakili kepadatan populasi mangsa dan pemangsa dalam satuan waktu t , r merupakan tingkat pertumbuhan mangsa, K merupakan daya dukung lingkungan, p merupakan tingkat serangan pemangsa, b merupakan tingkat persaingan mangsa, c merupakan laju konversi biomassa mangsa menjadi biomassa pemangsa, μ merupakan tingkat kematian pemangsa, serta $\alpha > 0$ merupakan parameter yang menggambarkan kerja sama pemangsa ketika berburu.

Penyelesaian secara analitik model (4) menghasilkan solusi setimbang yang dapat menginformasikan jenis titik kesetimbangan dan kestabilan masing-masing solusi setimbang untuk dianalisis dan dideksripsikan lebih lanjut.

3.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan (x^*, y^*) merupakan titik yang memenuhi $\frac{dx^*}{dt} = 0$ dan $\frac{dy^*}{dt} = 0$. Titik kesetimbangan pada persamaan (4) dapat diperoleh sebagai berikut.

$$x \left(r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - bx - (p + \alpha y) y \right) = 0, \quad (5)$$

$$y(c(p + \alpha y)x - \mu) = 0. \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan (5) dan (6) diperoleh

(i) Titik kesetimbangan $E_1 = (0,0)$

(ii) Titik kesetimbangan $E_2 = \left(\frac{rK}{Kb+r}, 0 \right)$

(iii) Titik interior yang diperoleh dari

$$c(p + \alpha y)x - \mu = 0, \quad (7)$$

$$r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - bx - (p + \alpha y)y = 0. \quad (8)$$

Titik kesetimbangan yang diperoleh dari persamaan (7) dan (8) menghasilkan

$$x^* = -\frac{1}{Kb+r} \left(K(\alpha(AX^3 + BX^2 + CX + D))^2 + bp(AX^3 + BX^2 + XC + D) - r \right),$$

$$y^* = AX^3 + BX^2 + CX + D.$$

Dimana

$$A = K\alpha^2c, B = 2K\alpha cp, C = Kcp^2 - K\alpha cr, \text{ dan } D = \mu r + Kb\mu - Kcpr$$

Penentuan titik kesetimbangan tersebut, diperoleh empat titik kesetimbangan, yaitu

$E_1 = (0,0)$, $E_2 = (K, 0)$, $E_3 = (x_3^*, y_3^*)$, dan $E_4 = (x_4^*, y_4^*)$.

1. Titik kesetimbangan $E_1 = (0,0)$ merepresentasikan punahnya kedua populasi, yaitu mangsa dan pemangsa.

2. Titik kesetimbangan $E_2 = \left(\frac{rK}{Kb+r}, 0 \right)$ merepresentasikan punahnya populasi pemangsa.

3. Koeksistensi populasi mangsa dan populasi pemangsa direpresentasikan oleh dua titik kesetimbangan interior yang eksis $E_3 = (x_3^*, y_3^*)$, dan $E_4 = (x_4^*, y_4^*)$.

Analisis kestabilan lokal masing-masing solusi setimbang dilakukan setelah titik-titik kesetimbangan diperoleh. Analisis kestabilan lokal berupa penentuan jenis-jenis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan. Hal ini dilakukan dengan cara menganalisis nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi di sekitar titik-titik kesetimbangan.

3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Proses linearisasi terhadap sistem persamaan (4) di sekitar titik kesetimbangan dengan menentukan nilai eigen, sehingga dapat diperoleh sifat kestabilan lokal dari ketiga titik kesetimbangan. Matriks Jacobi yang dihasilkan dari proses linearisasi terhadap sistem persamaan (4), yaitu:

$$J = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{K} - 2bx - (\alpha y + p)y & -\alpha xy - (\alpha y + p)x \\ c(\alpha y + p)y & \alpha cxy + c(\alpha y + p)x - \mu \end{bmatrix}.$$

3.3.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1 = (0, 0)$

Substitusi titik kesetimbangan E_1 ke dalam matriks Jacobi, sehingga diperoleh:

$$J_1 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}.$$

Kemudian, nilai eigen dicari dengan persamaan karakteristik $\det(J(0,0) - \lambda I) = 0$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(J(0,0) - \lambda I) &= 0, \\ \begin{bmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -\mu - \lambda \end{bmatrix} &= 0, \\ (r - \lambda)(-\mu - \lambda) &= 0. \\ \lambda_1 &= r \quad \text{atau} \quad \lambda_2 = -\mu\end{aligned}$$

Karena parameter diasumsikan bernilai positif, maka diperoleh $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Melalui nilai eigen yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa kestabilan E_1 bersifat tidak stabil jenis pelana.

3.3.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_2 = (\frac{rK}{Kb+r}, 0)$

Substitusi titik kesetimbangan E_2 ke dalam matriks Jacobi, sehingga diperoleh:

$$J_2 = \begin{bmatrix} r - \frac{2r^2K}{Kb+r} - \frac{2brK}{Kb+r} & -\frac{rpK}{Kb+r} \\ 0 & \frac{cprK}{Kb+r} - \mu \end{bmatrix}.$$

Kemudian, nilai eigen dicari dengan persamaan karakteristik $\det(J(\frac{rK}{Kb+r}, 0) - \lambda I) = 0$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(J(K, 0) - \lambda I) &= 0, \\ \begin{bmatrix} \left(r - \frac{2r^2K}{Kb+r} - \frac{2brK}{Kb+r}\right) - \lambda & -\frac{rpK}{Kb+r} \\ 0 & \left(\frac{cprK}{Kb+r} - \mu\right) - \lambda \end{bmatrix} &= 0, \\ (Kb\lambda + rbK + r\lambda + r^2)(Kb\lambda - cprK + Kb\mu + \mu r + r\lambda) &= 0. \\ \lambda_1 &= \frac{-Kcpr + b\mu K + r\mu}{Kb+r} \quad \text{atau} \quad \lambda_2 = -r\end{aligned}$$

Karena parameter diasumsikan bernilai positif, maka diperoleh $\lambda_2 < 0$. Sehingga, kestabilan E_2 bersifat stabil asimtotik lokal jika $\lambda_1 = \mu < \frac{cprK}{Kb+r}$ dan tidak stabil jika $\lambda_1 = \mu > \frac{cprK}{Kb+r}$.

3.3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_3 = (x^*, y^*)$

Proses linearisasi pada persamaan (4) di sekitar titik kesetimbangan (x^*, y^*) diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut.

$$J_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

dengan:

$$\begin{aligned}a_{11} &= r - \frac{2rx^*}{K} - 2bx^* - (\alpha y^* + p)y^* \\ a_{12} &= -\alpha x^* y^* - (\alpha y^* + p)x^* \\ a_{21} &= c(\alpha y^* + p)y^* \\ a_{22} &= \alpha c x^* y^* + c(\alpha y^* + p)x^* - \mu\end{aligned}$$

Nilai eigen dicari dengan persamaan karakteristik $\det(J(x^*, y^*) - \lambda I) = 0$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}[J(x^*, y^*) - \lambda I] &= 0 \\ \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} - \lambda \end{bmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - (a_{11} - a_{22})\lambda + ((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22}) &= 0\end{aligned}$$

Nilai eigen yang diperoleh adalah

$$\lambda_1 = \frac{(a_{11} - a_{22}) + \sqrt{(-a_{11} + a_{22})^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22})}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{(a_{11} - a_{22}) - \sqrt{(-a_{11} + a_{22})^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22})}}{2}$$

Parameter diasumsikan bernilai positif, maka berdasarkan nilai eigen λ_1 dan λ_2 diperoleh sifat kestabilan titik kesetimbangan E_3 yang dapat dilihat melalui Tabel 1 sebagai berikut.

Tabel 1: Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_3 = (x^*, y^*)$

	Syarat	Sifat
$(-a_{11} + a_{22})^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22}) > 0$ $\in \mathbb{R}$	$(a_{11} - a_{22}) > \sqrt{(-a_{11} + a_{22})^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22})}$	Simpul tidak stabil
	$(a_{11} - a_{22}) < \sqrt{(-a_{11} + a_{22})^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22})}$	Pelana atau simpul stabil
	$(a_{11} - a_{22}) = 0$	Pelana
$(-a_{11} + a_{22})^2 - 4((a_{12} - a_{21}) - a_{11}a_{22}) < 0$ $\in \mathbb{R}$	$(a_{11} - a_{22}) > 0$	Spiral tidak stabil
	$(a_{11} - a_{22}) < 0$	Spiral stabil
	$(a_{11} - a_{22}) = 0$	Pusat

3.4 Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan pada tahap terakhir. Hasil simulasi mengkonfirmasi hasil perhitungan secara analitik tentang kestabilan titik kesetimbangan, serta mengilustrasikan perilaku model. Nilai parameter berasal dari rujukan penelitian terdahulu dan beberapa berdasarkan asumsi. Apabila salah satu nilai parameter diubah terjadi perubahan kestabilan solusi titik kesetimbangan. Perubahan tersebut digambarkan dalam potret fase menggunakan P-Plane.

Untuk mengetahui kesesuaian antara hasil analisis dan numerik, maka dilakukan simulasi numerik. Simulasi numerik menggunakan nilai parameter yang diambil dari [17] dan [19]. Nilai-nilai parameter tersebut disajikan pada Tabel 2 sebagai berikut.

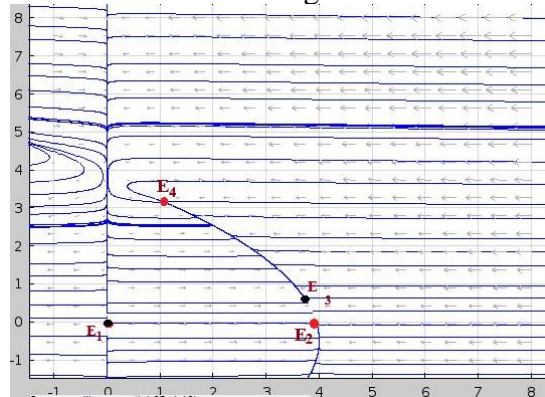
Tabel 2: Notasi Variabel dan Nilai Parameter

Notasi	Nilai	Keterangan
r	9.03	Asumsi
K	4	Du, dkk. 2022
p	0.5	Pal, dkk. 2019
b	0.03	Asumsi
c	0.02	Asumsi
μ	0.05	Pal, dkk. 2019
α	0.5	Du, dkk. 2022
	0.16	Asumsi

Simulasi numerik yang dilakukan ada dua, yaitu simulasi pertama dengan memilih $\alpha = 0.5$ [17], dan simulasi kedua dengan memilih $\alpha = 0.16$ berdasarkan asumsi. Hasil simulasi numerik masing-masing titik kesetimbangan ditampilkan melalui potret fase sebagai berikut.

3.4.1 Simulasi 1 ($\alpha = 0.5$)

Simulasi numerik berdasarkan Tabel 2 dengan $\alpha = 0.5$ diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 1. Potret Fase dengan $\alpha = 0.5$

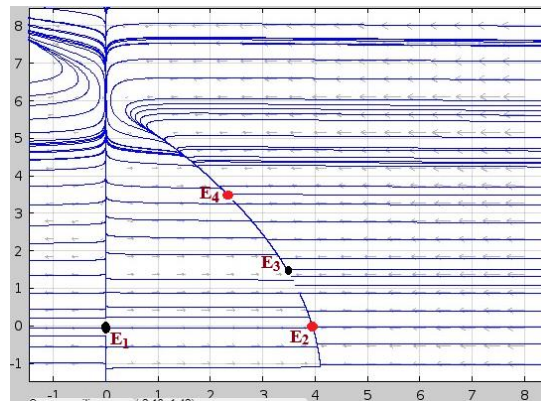
Pada Gambar 1 menunjukkan trayektori yang digambarkan melalui potret fase menggambarkan solusi sistem (4) menuju ke titik kesetimbangan $E_4 = (1.2315, 3.06037)$ yang stabil. Solusi sistem (4) yang lain menuju ke titik kesetimbangan $E_2(3.9475, 0)$ yang stabil. Berdasarkan Gambar 1, terdapat dua kestabilan yang ditunjukkan solusi titik kesetimbangan E_2 dan E_4 yang stabil. Munculnya dua kestabilan dalam sistem (4) dikenal dengan kestabilan ganda atau bistabil. Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 2 untuk $\alpha = 0.5$ diperoleh titik kesetimbangan eksis yang secara lengkap ditampilkan pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3: Nilai Eigen dan Kestabilan saat $\alpha = 0.5$

Titik Tetap Eksis	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
$E_1 = (0, 0)$	$\lambda_1 = -0.05$ $\lambda_2 = 9.03$	Pelana tidak stabil
$E_2 = (3.9475, 0)$	$\lambda_1 = -9.03$ $\lambda_2 = -0.01$	Simpul stabil asimtotik
$E_3 = (3.8644, 0.2938)$	$\lambda_1 = -8.83858$ $\lambda_2 = 0.010037$	Pelana tidak stabil
$E_4 = (1.2315, 3.06037)$	$\lambda_1 = -2.61118$ $\lambda_2 = -0.16798$	Simpul stabil asimtotik

3.4.2 Simulasi 2 ($\alpha = 0.16$)

Simulasi numerik berdasarkan pada Tabel 2 dengan asumsi untuk parameter $\alpha = 0.16$ diilustrasikan melalui potret fase pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Potret fase dengan $\alpha = 0.16$

Pada Gambar 2 menunjukkan potret fase solusi sistem (4) menuju ke titik kesetimbangan $E_4 = (2.39332, 3.40356)$ yang stabil, dan menuju ke titik kesetimbangan $E_2 = (3.95, 0)$ yang stabil. Berdasarkan Gambar 2, sistem (4) memiliki dua kestabilan yang digambarkan melalui potret fase pada titik kesetimbangan E_2 dan E_4 yang disebut kestabilan ganda atau bistabil. Berdasarkan asumsi untuk $\alpha = 0.16$ diperoleh titik kestabilan secara lengkap ditampilkan pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4: Nilai Eigen dan Kestabilan saat $\alpha = 0.16$

Titik Tetap Eksis	Nilai Eigen	Sifat Kestabilan
$E_1 = (0, 0)$	$\lambda_1 = -0.05$ $\lambda_2 = 9.03$	Pelana tidak stabil
$E_2 = (3.95, 0)$	$\lambda_1 = -9.03$ $\lambda = -0.01$	Simpul stabil asimtotik
$E_3 = (3.55899, 1.26528)$	$\lambda_1 = -8.13418$ $\lambda_2 = 0.00738$	Pelana tidak stabil
$E_4 = (2.39332, 3.40356)$	$\lambda_1 = -5.4251$ $\lambda_1 = -0.02354$	Simpul stabil asimtotik

Nilai parameter kerja sama berburu lebih kecil sampai $\alpha = 0.1274$ diperoleh titik kestabilan yang eksis hanya 2 yaitu $E_1 = (0, 0)$ tidak stabil pelana dan $E_2 = (3.95, 0)$ stabi. Dengan demikian apabila kerja sama berburu predator $\alpha > 0.1274$ terdapat empat titik kesetimbangan yang eksis dan ada dua titik kesetimbangan yang stabil, yaitu E_1 dan E_4 . Hasil analisis kestabilan dan simulasi numerik menunjukkan kestabilan ganda pada titik interior dan titik kepunahan populasi pemangsa saat parameter kerja sama berburu $\alpha = 0.5$, dan $\alpha = 0.16$.

4 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis solusi setimbang model interaksi mangsa-pemangsa Lotka Volterra dengan adanya kerja sama berburu pada pemangsa, diperoleh empat titik kesetimbangan dengan jenis kestabilan yang berbeda pada setiap kasus dengan kondisi yang diberikan. Pemilihan parameter α sebagai parameter yang menggambarkan kerja sama pemangsa ketika berburu memiliki pengaruh terhadap kestabilan masing-masing solusi sistem. Hasil analisis numerik menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis untuk jenis masing-masing solusi setimbang. Terdapat kemungkinan sistem dengan dua titik kesetimbangan yang stabil atau disebut dengan sistem memiliki kestabilan ganda (*bistability*), ditunjukkan melalui potret fase, yaitu E_2 dan E_4 . Pada sistem tersebut solusi dipengaruhi oleh nilai awal kedua populasi.

5 Ucapan Terima Kasih

Peneliti mengucapkan terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat (LPPM) Universitas Negeri Surabaya dan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Surabaya atas bantuan dana yang telah diberikan untuk penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] C. A. Crawford, "Principles of Biotechnology," New York: Salem Press, 2018.
- [2] P. Riberu, "Pembelajaran Ekologi," *Jurnal Pendidikan Penabur*, Vol. 1, Hal. 125-132, 2002.
- [3] D.L. DeAngelis, R. Goldstein, R.V. O'Neill. "A model for tropic interaction". *Ecology* 56(4), 881–892, 1975.
- [4] M. Begon, C. Townsend, J. Harper., *Ecology: Individuals, populations and communities* (Third edition). Blackwell Science. London, 1996..
- [5] Z. Zhang, Mutualism or cooperation among competitors promotes coexistence and competitive ability, *Ecol. Model.*, 164, 271–282. 2003.
- [6] S. Pal, N. Pal, S. Samanta, and J. Chattopadhyay, "Effect of hunting cooperation and fear in a predator-prey model," *Ecological Complexity*, vol. 39, 2019.
- [7] C. Boesch, "Cooperative Hunting Roles Among Tai Chimpanzees," *Human Nature*, Vol. 13, no. 1, pp. 27-46, 2002.
- [8] D.P. Hector, Cooperative hunting and its relationship to foraging success and prey size in an avian predator. *Ethology* 73(3), 247–257, 1986.
- [9] D. Scheel, C. Packer, Group hunting behaviour of lions: a search for cooperation. *Anim. Behav.* 41(4), 697–709, 1991.
- [10] L. Berec, Impacts of foraging facilitation among predators on predator-prey dynamics. *Bull. Math. Biol.* 72(1), 94–121, 2010.
- [11] S. Pal, N. Pal, and J. Chattopadhyay, "Hunting cooperation in a discrete-time predator-prey system," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 28, no. 7, article 1850083, 2018.
- [12] J. Sugie, R. Kohno, R. Miyazaki.: On a predator-prey system of Holling type. *Proc. Am. Math. Soc.* 125(7), 2041–2050, 1997.
- [13] G. Seo, D.L. DeAngelis: A predator-prey model with a Holling type I functional response including a predator mutual interference. *J. Nonlinear Sci.* 21(6), 811–833, 2011.
- [14] Y. Huang, F. Chen, L. Zhong, Stability analysis of a prey-predator model with Holling type III response function incorporating a prey refuge. *Appl. Math. Comput.* 182, 672–683, 2006.
- [15] S. Pal, N. Pal, and J. Chattopadhyay, "Hunting cooperation in a discrete-time predator-prey system," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 28, no. 7, article 1850083, 2018.
- [16] M.T. Alves and F. Hilker, "Hunting cooperation and Allee effects in predators," *Journal of Theoretical Biology*, vol. 419, pp. 13–22, 2017.
- [17] S. Pal, N. Pal, S. Samanta, and J. Chattopadhyay, "Effect of hunting cooperation and fear in a predator-prey model," *Ecological Complexity*, vol. 39, article 100770, 2019.
- [18] S. Pal, N. Pal, S. Samanta, and J. Chattopadhyay, "Fear effect in prey and hunting cooperation among predators in a Leslie Gower model," *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 16, no. 5, pp. 5146–5179, 2019.

- [19] Du, B. Niu, and J. Wei, "A Predator-Prey Model with Cooperative Hunting in The Predator and Group Defense in The Prey," *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*, vol. 27, no. 10, pp. 5845-5881, 2022.
- [20] B. Belew and D. Melese, "Modeling and Analysis of Predator-Prey Model with Fear Effect in Prey and Hunting Cooperation among Predators and Harvesting", *Journal of Applied Mathematics* , <https://doi.org/10.1155/2022/2776698>, 2022.
- [21] A.K.Umrao, and K.P. Srivastava, "Bifurcation Analysis of a Predator–Prey Model with Allee Effect and Fear Effect in Prey and Hunting Cooperation in Predator", *Diferential Equations and Dynamical Systems*, <https://doi.org/10.1007/s12591-023-00663-w>, 2023.
- [22] W. E. Boyce dan R. C. DiPrima, "Elementary differential equations and boundaryvalue problems," xvi+809, 2012.
- [23] C.S. Holling, The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation. *Mem. Entomol. Soc. Can.* 97(S45), 5–60,1965.