



# ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN MAKANAN TAMBAHAN PADA PEMANGSA MENGGUNAKAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE IV

ALFIATUL MUFIDAH<sup>1\*</sup>, DIAN SAVITRI<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Universitas Negeri Surabaya

[\\*alfiatul.19014@mhs.unesa.ac.id](mailto:alfiatul.19014@mhs.unesa.ac.id)

[\\*\\*diansavitri@unesa.ac.id](mailto:diansavitri@unesa.ac.id)

## ABSTRAK

Interaksi antar dua populasi dapat mengakibatkan perubahan pada dinamika pertumbuhan kedua populasi. Pada populasi mangsa yang hidup secara berkelompok mengakibatkan populasi pemangsa kesulitan dalam mencari sumber makanan. Hal ini berakibat penurunan populasi pemangsa dan terjadi ketidakseimbangan kedua populasi. Jalan alternatif yang dapat dilakukan saat terjadi ketidakseimbangan populasi yaitu memberikan makanan tambahan untuk pemangsa. Dalam penelitian ini mengkonstruksi model mangsa pemangsa dua populasi dengan fungsi respon Holling tipe IV dan mempertimbangkan makanan tambahan pada pemangsa. Kajian pertama berupa studi literatur, kemudian mengkonstruksi model mangsa pemangsa, dilanjutkan analisis dengan menentukan titik kesetimbangan, dan kestabilan lokal di sekitar titik kesetimbangan. Kesesuaian hasil analisis ditampilkan dalam simulasi berupa potret fase. Hasil analisis diperoleh tiga titik kesetimbangan yaitu kepunahan mangsa pemangsa ( $E_1$ ), kepunahan pemangsa ( $E_2$ ) dan mangsa pemangsa saling berdampingan ( $E_3$ ). Pada titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil, sedangkan pada  $E_2$  dan  $E_3$  bersifat stabil asimtotis dengan syarat tertentu. Hasil simulasi numerik menunjukkan adanya kestabilan ganda (bistabil) yakni pada titik kesetimbangan  $E_2$  dan  $E_3$  ketika parameter makanan tambahan  $A = 1.3$ . Ketika  $A = 1.2$  maka hanya titik kepunahan pemangsa yang stabil ( $E_2$ ). Kedua populasi saling berdampingan ditunjukkan dalam potret fase saat  $A = 1.9$ . Adanya makanan tambahan, yaitu parameter  $A$  dapat mempengaruhi dinamika pertumbuhan kedua populasi tersebut.

**Kata Kunci:** Makanan tambahan, Holling tipe IV, kestabilan, bistabil, model mangsa pemangsa.

## ABSTRACT

*The interaction between the two populations can result in changes to the growth dynamics of the two populations. In prey populations that live in groups, predator populations have difficulty finding food sources. This resulted in a decrease in predator populations and an imbalance between the two populations. An alternative way that can be done when there is a population imbalance is to provide additional food for predators. In this study, we constructed a two-population predator-prey model with a Holling type IV response function and considered additional food for predators. The first study was in the form of a literature review, then constructing the prey-predator model, followed by analysis by determining the equilibrium point and local stability around the equilibrium point. The suitability of the analysis results is displayed in the simulation in the form of a phase portrait. The results of the analysis obtained three equilibrium points, namely the extinction of prey-predator ( $E_1$ ), extinction of predators ( $E_2$ ) and the interaction of prey and predators or when prey-predator live together ( $E_3$ ). At the equilibrium point  $E_1$  is unstable, while at  $E_2$  and  $E_3$  it is asymptotically stable with certain conditions.*

*The numerical simulation results show that there is a double stability at the equilibrium point  $E_2$  and  $E_3$  when the additional food parameter  $A = 1.3$ . When  $A = 1.2$  only the point of extinction of predators is stable ( $E_2$ ). The two populations side by side are shown in the phase shot when  $A = 1.9$ . The presence of additional food  $A$  affects the dynamics of the growth of the two populations.*

**Keywords:** *Additional Food, Holling Type IV, stability, bistability, Predator Prey Model.*

## 1 Pendahuluan

Ekosistem mangrove merupakan salah satu ekosistem yang mempunyai berbagai macam fungsi antara lain sebagai daerah mencari makanan (*feeding ground*) dan tempat tumbuh berkembang berbagai biota perairan seperti kepiting, ikan bandeng, ikan kakap dan berbagai macam spesies ikan [1]. Interaksi yang muncul antar biota perairan pada ekosistem mangrove seperti ikan kecil dan ikan besar mempunyai arti penting bagi keseimbangan populasi yang ada pada ekosistem tersebut [2]. Kawasan mangrove dihuni oleh hewan akuatik yang berinteraksi dengan tumbuhan atau makhluk hidup lainnya. Beberapa contoh hewan akuatik mangrove yang menjadikan tanaman yang ada di kawasan mangrove sebagai sumber makanannya yaitu kepiting *Uca spp.* [3], dan ikan bandeng [4]. Rata-rata hewan-hewan tersebut hidup secara berkelompok sebagai upaya bertahan hidup [5]. Hewan-hewan tersebut merupakan mangsa utama bagi ikan-ikan besar dan fauna lainnya yang ada di kawasan mangrove [6] salah satunya yaitu kepiting dimangsa oleh ikan buntal [7] dan ikan bandeng dimangsa oleh ikan kakap, ikan payus dan lain-lain [8]. Populasi mangsa yang hidup secara berkelompok dapat memengaruhi jumlah kepadatan dari populasi mangsa yang ada di kawasan mangrove [9].

Interaksi antar dua populasi tersebut dapat mengakibatkan menurunnya populasi pemangsa di kawasan mangrove, karena populasi pemangsa menjadi kesulitan dalam mencari sumber makanannya dan apabila terus dibiarkan menyebabkan ketidakseimbangan populasi yang ada di kawasan mangrove. Ketidakseimbangan tersebut dapat terjadi karena populasi pemangsa yang semakin menurun dan populasi mangsa yang semakin meningkat [10].

Pada rantai makanan yang ada di kawasan mangrove, pemangsa dapat menetapkan lebih dari satu mangsa atau dapat mengubah sumber makanannya menjadi makanan yang lain [11]. Jalan alternatif yang dapat dilakukan saat terjadi ketidakseimbangan populasi di kawasan mangrove yaitu memberikan makanan tambahan untuk pemangsa. Populasi mangsa yang semakin menguat menyebabkan populasi pemangsa memerlukan sumber makanan lainnya untuk keberlangsungan hidupnya sehingga makanan tambahan yang diberikan pada pemangsa dapat mengurangi tingkat kepunahan yang terjadi pada pemangsa [12].

Model interaksi mangsa-pemangsa yang melibatkan penambahan makanan pada pemangsa telah dibahas beberapa peneliti. Namun, sampai saat ini belum banyak penelitian yang membahas mengenai analisis kestabilan model matematika mangsa pemangsa dengan makanan tambahan menggunakan fungsi respon Holling tipe IV. Kajian fungsi respon Holling tipe IV dan fungsi respon Holling tipe II dengan perbandingan efek dari makanan tambahan mangsa pemangsa tiga populasi telah dibahas [13]. Didukung oleh penelitian lainnya yang mempertimbangkan makanan tambahan pada pemangsa yakni mengkaji tentang fungsi respon Holling tipe II dengan mempertimbangkan makanan tambahan pada pemangsa. Pada model [14], waktu penanganan untuk makanan tambahan dapat mempengaruhi ekosistem. Model mangsa pemangsa [15] mengkaji tiga populasi menggunakan fungsi respon Holling tipe II dengan pemberian makanan tambahan dan anti pemangsa pada pemangsa remaja. Ketiga penelitian mempunyai kesamaan yaitu adanya makanan tambahan pada pemangsa, hanya berbeda pada fungsi respon yang digunakan.

Berdasarkan uraian di atas maka peneliti tertarik untuk mengkonstruksi model mangsa pemangsa dua populasi dengan fungsi respon Holling tipe IV dan mempertimbangkan makanan tambahan pada pemangsa.

## 2 Tinjauan Pustaka

### 2.1 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik secara umum berbentuk sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right). \quad (2.1)$$

Variabel  $x(t)$  merepresentasikan kepadatan populasi mangsa, dengan parameter  $r$  merupakan laju pertumbuhan populasi mangsa dan  $K$  adalah carrying capacity atau daya dukung lingkungan populasi mangsa, dengan  $K > 0$ . Pertumbuhan populasi pada model logistik dibatasi oleh ketersediaan daya dukung lingkungan [16].

### 2.2 Model Lotka-Volterra

Interaksi antara dua populasi dapat direpresentasikan dalam model mangsa pemangsa dengan  $x(t), y(t)$  masing-masing menyatakan kepadatan populasi mangsa, dan kepadatan populasi pemangsa. Laju pertumbuhan alami populasi mangsa dinyatakan dalam parameter  $r$ , Pertumbuhan populasi mangsa dapat berkurang karena adanya pemangsa dan dinyatakan sebagai suatu fungsi respon  $f(x)$  dengan  $\alpha$  adalah laju pemangsaan pemangsa terhadap mangsa. Laju pertumbuhan pada populasi pemangsa berbanding terbalik dengan populasi mangsa. Saat mangsa dan pemangsa berinteraksi maka populasi pemangsa dapat bertambah dinyatakan dengan parameter konversi biomassa dari mangsa menjadi pemangsa, yaitu  $\beta$ . Apabila tidak berinteraksi dengan mangsa maka populasi pemangsa dapat berkurang karena kematian alami, yang dinyatakan sebagai  $m$ , dimana  $r, \alpha, \beta, m > 0$  [17].

Pola pemangsaan atau berbagai jenis fungsi respon berkembang sesuai keadaan dan perilaku populasi. Menurut [18], berdasarkan model Lotka-Volterra dapat disederhanakan menjadi,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx - f(x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= y(\beta f(x) - m). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pada persamaan (2.2),  $f(x)$  adalah fungsi respon yang disebut juga sebagai tingkat predasi.

### 2.3 Fungsi Respon

Fungsi respon merupakan jumlah makanan yang dimakan oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan [18] (Panja et al., 2017). Tahun 1953 fungsi respon ini diperkenalkan oleh Holling yaitu fungsi respon Holling tipe I, II, dan, III [19]. Selain tiga fungsi respon yang telah dijabarkan oleh Holling. Menurut [20], Monod dan Haldane mengembangkan fungsi respon lainnya yaitu fungsi respon Holling tipe IV. Fungsi respon ini didasari interaksi antara mangsa pemangsa saat jumlah populasi mangsa meningkat, daya predasi dari pemangsa berkurang karena adanya sifat bertahan pada populasi mangsa. Contoh interaksi yang menggunakan fungsi respon Holling tipe IV yaitu populasi ikan yang berkelompok untuk bertahan terhadap pemangsa, sehingga mengakibatkan pemangsa kesulitan dalam memangsa ikan tersebut.

Menurut [21] yang telah melakukan kajian terhadap mangsa pemangsa menggunakan fungsi respon yang berbentuk

$$f(x) = \frac{mx}{a + x^2}. \quad (2.3)$$

Fungsi respon pada persamaan (2.3), dikenal dengan fungsi respon Holling tipe IV.

### 2.4 Model Mangsa Pemangsa Penambahan Makanan

Menurut [22] diperlukan kontribusi makanan alternatif terhadap fungsi respon pertumbuhan populasi pemangsa, yang dinyatakan dalam bentuk  $\delta g(x, A)$ , sehingga persamaan (2.2) menjadi,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx - f(x, A)y, \\ \frac{dy}{dt} &= y(\beta f(x, A) + \delta g(x, A) - m).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) merepresentasikan  $x$  sebagai populasi mangsa,  $y$  adalah populasi pemangsa. Parameter  $r, \beta, \delta, m$  berturut-turut menyatakan laju pertumbuhan mangsa, laju konversi biomassa mangsa ke pemangsa, laju konversi biomassa makanan tambahan ke pemangsa, dan tingkat kematian alami pemangsa. Untuk  $f(x, A)$  dan  $g(x, A)$  adalah fungsi respon pemangsa yaitu tingkat predasi dan fungsi respon penambahan makanan pada pemangsa.

## 2.5 Titik Keseimbangan

### Definisi 2.1

Titik  $\bar{x} \in R^n$  merupakan titik keseimbangan dari suatu sistem  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  jika  $f(\bar{x}) = 0$  [23].

## 2.6 Matriks Jacobian

Analisis kestabilan titik keseimbangan suatu sistem dapat ditentukan dengan melakukan linearisasi, dan dapat dihipotesis oleh matriks Jacobian berikut [24],

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.\tag{2.5}$$

## 2.7 Nilai Eigen

### Definisi 2.2 [25]

Jika  $A$  adalah suatu matriks  $n \times n$ , sehingga sebuah vektor tak nol  $\vec{x}$  pada  $R^n$  disebut vektor eigen dari  $A$  jika  $A\vec{x}$  adalah kelipatan skalar dari  $\vec{x}$ , yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.\tag{2.6}$$

Untuk skalar sebarang  $\lambda$  disebut nilai eigen (eigen value) dari  $A$ , dan  $\vec{x}$  disebut sebagai vektor eigen dari  $A$  yang terikat dengan  $\lambda$ .

Persamaan (2.6) dapat ditulis kembali menjadi,

$$(A - I\lambda)\vec{x} = 0.\tag{2.7}$$

Dimana  $I$  adalah matriks identitas. Persamaan (2.7) memiliki solusi tak nol, sehingga dapat diperoleh jika dan hanya jika

$$\det(A - I\lambda) = 0.\tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) merupakan penyelesaian untuk memperoleh nilai eigen dari matriks  $A$  dengan  $\lambda$  merupakan nilai eigen dari matriks  $A$ .

## 2.8 Analisis Kestabilan

Kestabilan nilai eigen disajikan dalam tabel berikut [26]:

**Tabel 1:** Kriteria Kestabilan Sistem Linear

| Nilai Eigen   | Jenis Titik                    | Jenis Kestabilan                 |
|---|--------------------------------|----------------------------------|
| Nilai eigen real, berbeda, bertanda sama, dan lebih dari nol (bernilai positif)<br>$r_1 > r_2 > 0$  | <i>Node</i>                    | Tidak stabil                     |
| Nilai eigen real, berbeda, bertanda sama, dan kurang dari nol (bernilai negatif)<br>$r_1 < r_2 < 0$ | <i>Node</i>                    | Stabil asimtotik                 |
| Nilai eigen real, berbeda, berlawanan tanda<br>$r_1 < 0 < r_2$                                      | <i>Saddle point</i>            | Tidak stabil                     |
| Nilai eigen real, sama, dan lebih dari nol (bernilai positif)<br>$r_1 = r_2 > 0$                    | <i>Proper or improper node</i> | Tidak stabil                     |
| Nilai eigen real, sama, dan kurang dari nol (bernilai negatif)<br>$r_1 = r_2 < 0$                   | <i>Proper or improper node</i> | Stabil asimtotik                 |
| Nilai eigen kompleks<br>$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$<br>• $\lambda > 0$<br>• $\lambda < 0$         | <i>Spiral point</i>            | Tidak stabil<br>Stabil asimtotik |
| Nilai eigen imajiner murni<br>$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$   | <i>Center</i>                  | Stabil                           |

## 2.9 Kriteria Routh-Hurwitz

Pada persamaan karakteristik yang berbentuk

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (2.9)$$

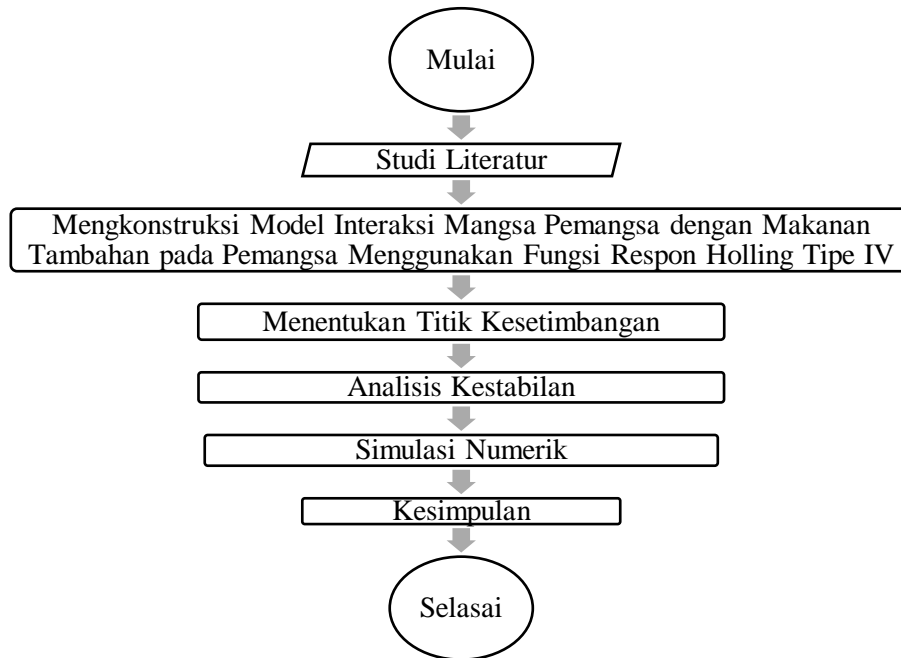
Dimana  $a_n = 1$ .

Nilai eigen dari persamaan karakteristik (2.9) bernilai negatif semua, maka titik kesetimbangan sistem stabil. Metode lain untuk mencari kestabilan sistem apabila nilai eigen dari persamaan karakteristik sistem sulit untuk ditentukan, yaitu dengan menunjukkan tanda bagian real negatif tanpa menghitung atau mengetahui nilai eigen persamaan karakteristik secara langsung terlebih dahulu yang disebut dengan kriteria *Routh-Hurwitz* [27].

Melalui Kriteria *Routh-Hurwitz* kestabilan  $A$  dapat diperiksa dengan mempertimbangkan koefisien  $\{a_i\}$ , dengan  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Matriks  $A$  memiliki nilai eigen dengan real negatif jika dan hanya jika semua elemen pada kolom pertama memiliki tanda yang sama. Jika sistem memiliki nilai eigen negatif pada bagian realnya maka sistem dikatakan stabil.

## 3 Metodologi

Metode penelitian merupakan studi literatur. Mengumpulkan berbagai literatur berupa buku, jurnal, artikel ilmiah yang mendukung penyusunan model yang dikonstruksi. Diawali dengan memperdalam konsep dan teori, kemudian memahami fenomena alam sebagai dasar dalam menentukan asumsi dan konstruksi model sebelum dilakukan analisis. Pada penelitian ini dilakukan uji coba simulasi untuk mengetahui kesesuaian antara hasil analisis yang dilakukan dari model matematika yang diperoleh, dengan perhitungan secara numerik menggunakan *software* Python. Rancangan penelitian yang dilakukan digambarkan pada diagram alir berikut.



**Gambar 1:** Diagram Alir Penelitian

Berdasarkan diagram alir penelitian, setelah mengkonstruksi model interaksi mangsa pemangsa berdasarkan fenomena yang digunakan maka tahap selanjutnya adalah analisis dinamik. Tahap analisis dinamik meliputi penentuan titik kesetimbangan, eksistensi, dan menganalisis kestabilan masing-masing titik kesetimbangan yang ditentukan berdasarkan nilai eigen yang diperoleh dari matriks Jacobian sistem persamaan model. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis yang telah dilakukan menggunakan *software* Python, yang ditampilkan dalam potret fase.

## 4 Hasil dan Pembahasan

### 4.1 Konstruksi Model Matematika Interaksi Mangsa Pemangsa dengan Makanan Tambahan pada Pemangsa Menggunakan Fungsi Respon Holling Tipe IV

Pada subbab ini dikonstruksi model mangsa pemangsa berdasarkan beberapa asumsi.

- Tingkat pertumbuhan populasi mangsa mengikuti persamaan logistik.
- Tingkat pertumbuhan mangsa berkurang karena interaksi dengan pemangsa.
- Tingkat pertumbuhan pemangsa bertambah apabila terjadi interaksi dengan mangsa.
- Pemberian penambahan makanan hanya diberikan pada pemangsa.
- Tingkat pertumbuhan pemangsa berkurang karena adanya tingkat kematian secara alami.

- f. Pola interaksi mangsa pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe IV sesuai perilaku populasi mangsa yang hidup berkelompok dan bertahan secara kelompok bila ada pemangsa.

Berdasarkan asumsi di atas, dikonstruksi model mangsa pemangsa dengan penambahan makanan pada pemangsa sesuai penelitian [14]. Kemudian memodifikasi dengan merubah fungsi respon Holling tipe II menjadi fungsi respon Holling tipe IV, merujuk penelitian [13]. Model baru mangsa pemangsa dengan adanya makanan tambahan pada pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe IV yang dihasilkan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{cA\eta + x^2 + b}, \quad (4.1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta\alpha(A\eta + x)y}{cA\eta + x^2 + b} - \mu y. \quad (4.1b)$$

Model (4.1) menyatakan populasi mangsa tiap satuan waktu yang direpresentasikan sebagai  $x = x(t)$  dan  $y = y(t)$  adalah populasi pemangsa tiap satuan waktu. Parameter  $r, k, \alpha, c, A, \eta, b, \beta, \mu$  bernilai positif, yang berturut-turut menyatakan laju pertumbuhan intrinsik mangsa, daya dukung lingkungan, laju pemangsaan pemangsa terhadap mangsa, kualitas penambahan makanan pemangsa, makanan tambahan pada pemangsa, tingkat keefektifan makanan tambahan, tingkat kejenuhan pemangsa, laju konversi biomassa mangsa ke pemangsa, dan tingkat kematian alami pemangsa.

Laju pertumbuhan populasi mangsa pada persamaan (4.1a) dipengaruhi oleh laju pertumbuhan intrinsik  $r$  dan berkurang dikarenakan adanya laju pemangsaan pemangsa terhadap mangsa. Persamaan (4.1b) merupakan laju pertumbuhan populasi pemangsa yang dipengaruhi oleh laju pemangsaan pemangsa terhadap mangsa, dengan mempertimbangkan laju pemangsaan pemangsa terhadap penambahan makanan bagi pemangsa dan berkurang dikarenakan adanya kematian alami pada pemangsa.

## 4.2 Titik Keseimbangan

Menurut definisi 2.1, titik keseimbangan pada model (4.1) diperoleh ketika  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$  sehingga diperoleh titik keseimbangan sebagai berikut:

1. Titik keseimbangan saat tidak ada populasi mangsa pemangsa.  
Titik keseimbangan kepunahan mangsa dan pemangsa adalah  $E_1(x_0, y_0) = E_1(0, 0)$ .
2. Titik keseimbangan saat terjadinya kepunahan populasi pemangsa.  
Titik keseimbangan saat terjadinya kepunahan pemangsa adalah  $E_2 = (x, 0) = (k, 0)$ . Mangsa hidup tanpa adanya pemangsaan oleh pemangsa. Karena parameter bernilai positif, maka titik keseimbangan  $E_2 = (k, 0)$  selalu eksis.
3. Titik keseimbangan saat kedua populasi yaitu mangsa pemangsa saling berinteraksi atau hidup berdampingan, disebut juga sebagai titik keseimbangan interior  $E_3 = (x^*, y^*)$ .

Persamaan kuadrat yang diperoleh adalah

$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (4.2)$$

dengan  $A = \mu, B = \alpha\beta, C = \mu cA\eta + \mu b - \beta\alpha A\eta$ .

Akar-akar persamaan (4.2) adalah  $x_{1,2}^* = \frac{\beta\alpha \pm \sqrt{\beta^2\alpha^2 - 4\mu(\mu cA\eta + \mu b - \beta\alpha A\eta)}}{2\mu}$  sehingga,

$$x_1^* = \frac{\beta\alpha + \sqrt{\beta^2\alpha^2 - 4\mu(\mu cA\eta + \mu b - \beta\alpha A\eta)}}{2\mu}$$

$$x_2^* = \frac{\beta\alpha - \sqrt{\beta^2\alpha^2 - 4\mu(\mu cA\eta + \mu b - \beta\alpha A\eta)}}{2\mu}$$

$$\text{dan } y^* = -\frac{1}{\mu^2 k} (\beta r (A\alpha\beta\eta + A c\eta\mu - A\eta k\mu + A\eta\mu x^* + \alpha\beta x^* - k\mu x^* - b\mu)).$$

Titik kesetimbangan harus bernilai real positif, sehingga titik kesetimbangan interior dapat diklasifikasikan sebagai berikut.

- Jika  $C < 0$ , maka persamaan (4.2) hanya memiliki satu akar positif  $x_1^*$ , sehingga didapatkan satu titik kesetimbangan interior, yaitu  $E_3(x_1^*, y^*)$ . Syarat dipenuhi untuk koefisien  $C$  yang bernilai negatif jika  $\mu(cA\eta + b) < \beta\alpha A\eta$ .
- Jika  $B < 0, C > 0$ , dan  $B^2 - 4A(C) > 0$ , maka persamaan (4.2) memiliki dua akar positif, yaitu  $x_1^*$  dan  $x_2^*$ . Terdapat dua titik kesetimbangan interior, yaitu  $E_3(x_1^*, y^*)$  dan  $E_4(x_2^*, y^*)$ . Koefisien  $C$  bernilai positif jika  $\mu(cA\eta + b) > \beta\alpha A\eta$ .
- Jika  $B < 0$ , dan  $B^2 - 4A(C) = 0$ , maka persamaan (4.2) memiliki satu akar positif, yaitu  $x^* = -\frac{B}{2A} = -\frac{\alpha\beta}{2\mu}$ . Terdapat satu titik kesetimbangan interior, yaitu  $E_3(x^*, y^*)$ .

### 4.3 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan titik kesetimbangan dapat didekati dengan kestabilan titik kesetimbangan sistem linier hampiran di sekitar titik tersebut, sehingga kestabilan yang diperoleh hanya bersifat lokal. Proses pendekatan persamaan nonlinear dengan persamaan linear disebut linearisasi di sekitar titik kesetimbangan. Kestabilan sistem pada setiap titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen atau akar – akar dari persamaan karakteristik.

Matriks Jacobian model (4.1) sebagai berikut:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rx}{k} - \frac{\alpha y}{cA\eta + x^2 + b} + \frac{2x^2\alpha y}{(cA\eta + x^2 + b)^2} & -\frac{\alpha x}{cA\eta + x^2 + b} \\ \frac{\beta\alpha y}{cA\eta + x^2 + b} - \frac{2\beta\alpha(A\eta + x)xy}{(cA\eta + x^2 + b)^2} & \frac{\beta\alpha(A\eta + x)}{cA\eta + x^2 + b} - \mu \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Analisis kestabilan lokal dilakukan berdasarkan Matriks Jacobian dengan mendapatkan nilai karakteristik dari determinan Matriks Jacobian tersebut, sehingga diperoleh:

- Kestabilan di titik kesetimbangan kepunahan mangsa pemangsa ( $E_1$ )

Matriks Jacobian model (4.1) pada  $E_1 = (0,0)$  adalah:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{\beta\alpha(A\eta)}{cA\eta + b} - \mu \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Mencari nilai eigen dengan persamaan karakteristik  $\det(J_{E_1} - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{\beta\alpha(A\eta)}{cA\eta + b} - \mu - \lambda \end{bmatrix} = (r - \lambda) \left( \frac{\beta\alpha(A\eta)}{cA\eta + b} - \mu - \lambda \right) = 0.$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya adalah:

$$\lambda_1 = r \quad \vee \quad \lambda_2 = \frac{\beta\alpha(A\eta)}{cA\eta + b} - \mu.$$

Jelas  $r > 0$  sehingga  $\lambda_1 > 0$ . Untuk  $\lambda_2$  memenuhi syarat kestabilan jika  $\lambda_2 < 0$ .

$$\frac{\beta\alpha(A\eta)}{cA\eta + b} - \mu < 0$$



$$\beta\alpha(A\eta) < \mu(cA\eta + b)$$

Sehingga  $\lambda_2 < 0$ . Karena  $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0$  maka titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil (*saddle point*).

2. Kestabilan di titik setimbang kepunahan pemangsa ( $E_2$ )

Matriks Jacobian model (4.1) pada  $E_2 = (k, 0)$  adalah:

$$J_{E_2} = \begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2k}{k}\right) & -\frac{\alpha k}{cA\eta + k^2 + b} \\ 0 & \frac{\beta\alpha(A\eta + k)}{cA\eta + k^2 + b} - \mu \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Mencari nilai eigen dengan persamaan karakteristik  $\det(J_{E_2} - \lambda I) = 0$ .

$$\det \begin{bmatrix} -r - \lambda & -\frac{\alpha k}{cA\eta + k^2 + b} \\ 0 & \frac{\beta\alpha(A\eta + k)}{cA\eta + k^2 + b} - \mu - \lambda \end{bmatrix} = (-r - \lambda) \left( \frac{\beta\alpha(A\eta + k)}{cA\eta + k^2 + b} - \mu - \lambda \right) = 0.$$

Sehingga diperoleh nilai eigennya adalah:

$$\lambda_1 = -r \quad \vee \quad \lambda_2 = \frac{\beta\alpha(A\eta + k)}{cA\eta + k^2 + b} - \mu.$$

Jelas  $r < 0$  sehingga  $\lambda_1 < 0$ , agar  $\lambda_2$  memenuhi syarat kestabilan maka  $\lambda_2 < 0$ .

$$\frac{\beta\alpha(A\eta + k)}{cA\eta + k^2 + b} - \mu < 0$$

$$\beta\alpha(A\eta + k) < \mu(cA\eta + k^2 + b)$$

didapatkan  $\lambda_2 < 0$ . Oleh karena itu  $\lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0$  maka titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik (*node*) dengan syarat  $\beta\alpha(A\eta + k) < \mu(cA\eta + k^2 + b)$ .

3. Kestabilan di titik kesetimbangan interior ( $E_3$ )

Matriks Jacobian model (4.1) pada  $E_3 = (x^*, y^*)$  adalah:

$$J_{E_3} = \begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2x^*}{k}\right) - \frac{\alpha y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} + \frac{2\alpha(x^*)^2 y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} & -\frac{\alpha x^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} \\ \frac{\beta\alpha y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \frac{2\beta\alpha(A\eta + x^*)x^* y^*}{(cA\eta + (x^*)^2 + b)^2} & \frac{\beta\alpha(A\eta + x^*)}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \mu \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Mencari nilai eigen dengan persamaan karakteristik  $\det(J_{E_3} - \lambda I) = 0$ .

$$\det \begin{bmatrix} r\left(1 - \frac{2x^*}{k}\right) - \frac{\alpha y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} + \frac{2\alpha(x^*)^2 y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \lambda & -\frac{\alpha x^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} \\ \frac{\beta\alpha y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \frac{2\beta\alpha(A\eta + x^*)x^* y^*}{(cA\eta + (x^*)^2 + b)^2} & \frac{\beta\alpha(A\eta + x^*)}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

$$\left( r\left(1 - \frac{2x^*}{k}\right) - \frac{\alpha y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} + \frac{2\alpha(x^*)^2 y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \lambda \right) \left( \frac{\beta\alpha(A\eta + x^*)}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \mu - \lambda \right) - \left( -\frac{\alpha x^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} \right) \left( \frac{\beta\alpha y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \frac{2\beta\alpha(A\eta + x^*)x^* y^*}{(cA\eta + (x^*)^2 + b)^2} \right) = 0.$$

Persamaan karakteristik matriks (4.7) adalah

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

dengan

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = -r \left( 1 - \frac{2x^*}{k} \right) + \frac{\alpha y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \frac{2\alpha(x^*)^2 y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \frac{\beta\alpha(A\eta + x^*)}{cA\eta + (x^*)^2 + b} + \mu,$$

$$a_2 = r \left( 1 - \frac{2x^*}{k} \right) \left( \frac{\beta\alpha(A\eta + x^*)}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \mu \right) - \frac{\alpha y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} \left( \frac{\beta\alpha(A\eta + x^*)}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \mu \right) + \frac{2\alpha(x^*)^2 y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} \left( \frac{\beta\alpha(A\eta + x^*)}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \mu \right) + \frac{\alpha x^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} \left( \frac{\beta\alpha y^*}{cA\eta + (x^*)^2 + b} - \frac{2\beta\alpha(A\eta + x^*)x^* y^*}{(cA\eta + (x^*)^2 + b)^2} \right).$$

Kestabilan pada kasus ini diperoleh melalui kriteria Routh-Hurwitz. Menurut aturan Routh-Hurwitz pada titik kesetimbangan interior  $E_3$  dikatakan stabil jika  $a_1 > 0$  dan  $a_2 > 0$ . Oleh karena itu titik kesetimbangan interior  $E_3$  bersifat stabil asimtotik.

#### 4.4 Simulasi Numerik

Simulasi numerik digunakan untuk menunjukkan kesesuaian dengan hasil analisis yang telah dilakukan. Simulasi numerik yang ditampilkan berupa potret fase perilaku dinamika model mangsa pemangsa dengan makanan tambahan pada pemangsa menggunakan *software* Python. Berikut merupakan parameter yang digunakan dalam melakukan simulasi numerik.

**Tabel 2:** Parameter Simulasi Numerik

| Parameter | Keterangan                                | Nilai Parameter | Sumber  |
|-----------|---|-----------------|---------|
| $r$       | Laju pertumbuhan intrinsik mangsa         | 3.2             | Asumsi  |
| $k$       | Daya dukung lingkungan                    | 1.08            | Asumsi  |
| $\alpha$  | Laju pemangsaan pemangsa terhadap mangsa  | 2.1             | Asumsi  |
| $b$       | Tingkat kejenuhan pemangsa                | 1.4             | Asumsi  |
| $c$       | Kualitas penambahan makanan pemangsa      | 0.2             | Das[30] |
| $\eta$    | Tingkat keefektifan makanan tambahan      | 0.5             | Das[30] |
| $A$       | Makanan tambahan                          | 1.3             | Asumsi  |
| $\beta$   | Laju konversi biomassa mangsa ke pemangsa | 0.8             | Das[30] |
| $\mu$     | Tingkat kematian alami pemangsa           | 1.1             | Asumsi  |

Berdasarkan nilai parameter yang digunakan pada Tabel 2 terdapat empat titik kesetimbangan yang eksis, yaitu  $E_1(0,0)$ ,  $E_2(1.08, 0)$ ,  $E_3(0.55, 1.37)$  dan  $E_4(0.98, 0.36)$ . Berdasarkan analisis untuk syarat eksistensi titik kesetimbangan interior  $E_3$  terpenuhi ketika

$C > 0$ , yaitu ketika  $\mu(cA\eta + b) > \beta\alpha A\eta$ . Ketika  $C > 0$ , dengan nilai parameter sesuai Tabel 2 untuk  $A = 1.3$ , diperoleh  $1.683 > 1.092$ . Oleh karena itu diperoleh dua titik kesetimbangan interior yang eksis, yaitu  $E_3$  dan  $E_4$ .

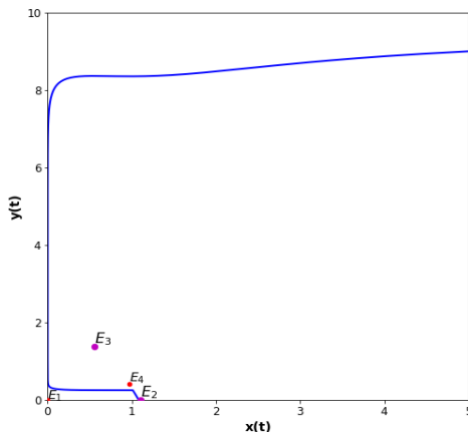
Analisis kestabilan dengan nilai parameter sesuai Tabel 2, diperoleh nilai eigen masing-masing titik kesetimbangan sebagai berikut:

1.  $E_1(0,0)$ , dengan  $\lambda_1 = 3.2 > 0 \wedge \lambda_2 = -0.38 < 0$ , titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil (*saddle point*).
2.  $E_2(k, 0)$ ,  $\lambda_1 = -3.2 < 0 \wedge \lambda_2 = -0.02 < 0$  maka titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil asimtotik dengan memenuhi syarat  $\beta\alpha(A\eta + k) < \mu(cA\eta + k^2 + b)$ .
3.  $E_3(0.55, 1.37)$ , dengan  $\lambda_1 = -0.85 < 0 \wedge \lambda_2 = -0.26 < 0$ , titik kesetimbangan interior  $E_3$  bersifat stabil asimtotik.
4.  $E_4(0.98, 0.36)$ , dengan  $\lambda_1 = -2.68 < 0 \wedge \lambda_2 = 0.02 > 0$ , titik kesetimbangan interior  $E_4$  bersifat tidak stabil (*saddle point*).

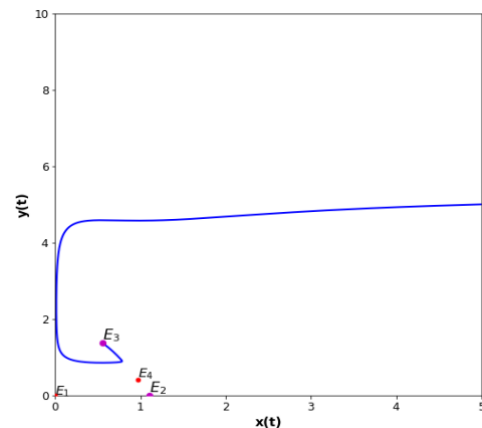
Oleh karena itu ketika kedua titik kesetimbangan interior  $E_3$  dan  $E_4$  eksis, salah satunya titik kesetimbangan interior bersifat stabil ( $E_3$ ) dan terdapat titik kesetimbangan lain yaitu  $E_2$  yang juga bersifat stabil, disebut sistem yang memiliki kestabilan ganda.

Perilaku dinamika sistem (4.1) ditunjukkan melalui simulasi berikut menggunakan nilai-nilai parameter yang sesuai Tabel 2 dengan variasi terhadap parameter makanan tambahan, yaitu saat  $A = 1.3$ ,  $A = 1.2$ , dan  $A = 1.9$ . Nilai awal yang digunakan sama, yaitu (5,5) dan (5,9) secara grafis dapat dilihat pada beberapa hasil simulasi berikut.

#### 4.4.1. Simulasi 1 dengan variasi parameter makanan tambahan $A = 1.3$



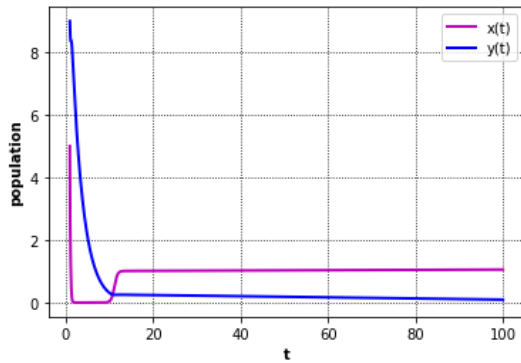
**Gambar 2.** Potret Fase Sistem (4.1) Menuju ke Titik Kesetimbangan  $E_2$



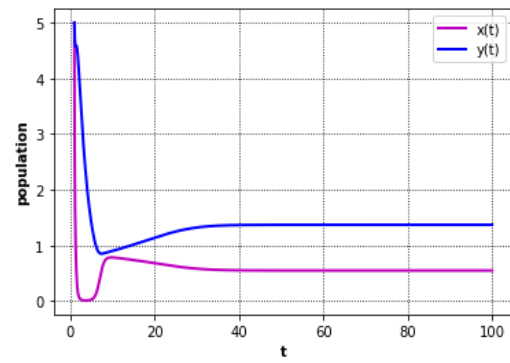
**Gambar 3.** Potret Fase Sistem (4.1) Menuju ke Titik Kesetimbangan  $E_3$

Kemunculan sistem dengan kestabilan ganda (*bistable system*) mengidentifikasi bahwa solusi sistem dipengaruhi oleh nilai awal kedua populasi. Potret fase sistem (4.1) pada Gambar 2 dan Gambar 3 menunjukkan sistem kestabilan ganda (*bistabil*).

Pada Gambar 2, ketika menggunakan nilai awal [5,9] solusi sistem konvergen ke titik kesetimbangan  $E_2(1.08, 0)$ , sehingga titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat stabil. Pada Gambar 3, ketika menggunakan nilai awal [5,5] solusi sistem konvergen ke titik kesetimbangan  $E_3(0.55, 1.37)$ , sehingga titik kesetimbangan  $E_3$  bersifat stabil. Hasil simulasi menunjukkan kemunculan sistem dengan kestabilan ganda, hal ini menunjukkan sesuai dengan hasil analisis dan syarat eksistensi.

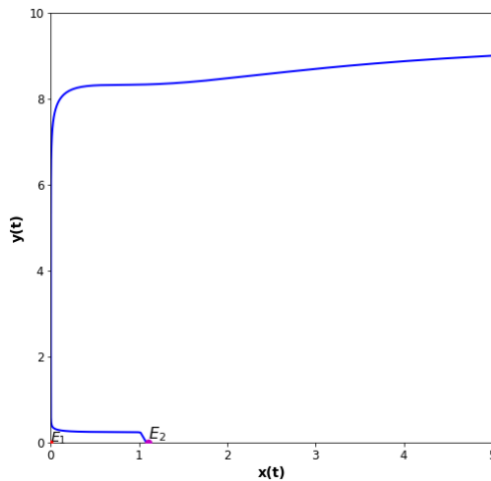


**Gambar 4:** Grafik Time Series Nilai Awal  $[5,9]$  Stabil di  $E_2$

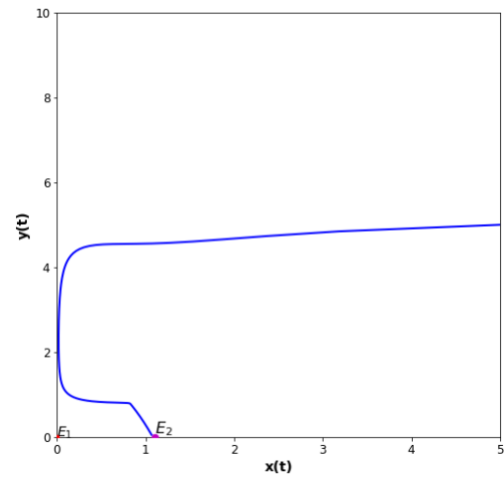


**Gambar 5:** Grafik Time Series Nilai Awal  $[5,5]$  Stabil di  $E_3$

#### 4.4.2. Simulasi 2 dengan variasi parameter makanan tambahan $A = 1.2$



**Gambar 6.** Potret Fase Sistem (4.1) dengan  $A = 1.2$  konvergen ke  $E_2$

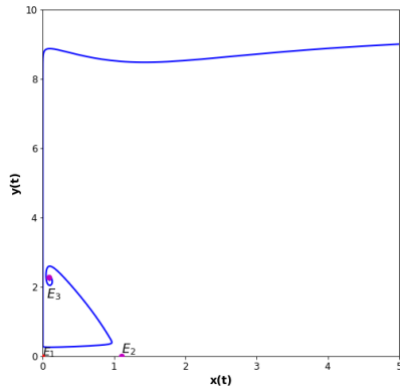


**Gambar 7.** Potret Fase Sistem (4.1) dengan  $A = 1.2$  konvergen ke  $E_2$

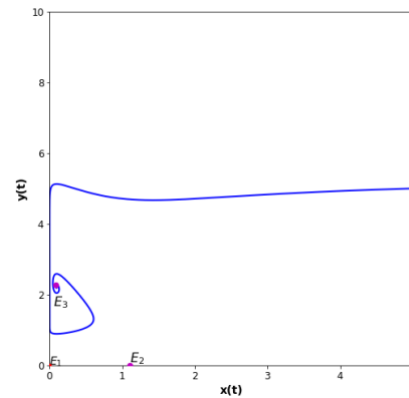
Gambar 6 dan Gambar 7 menunjukkan potret fase ketika parameter makanan tambahan  $A$  menurun menjadi  $A = 1.2$  maka hanya  $E_2$  yang stabil yaitu titik kepunahan populasi pemangsa. Ketika parameter makanan tambahan  $A = 1.2$  hanya ada dua titik kesetimbangan yang eksis, yaitu  $E_1$  dan  $E_2$ . Titik kesetimbangan  $E_2$  stabil menunjukkan mangsa hidup tanpa adanya pemangsa oleh pemangsa.

#### 4.4.3. Simulasi 3 dengan variasi parameter makanan tambahan $A = 1.9$

Simulasi terakhir dilakukan terhadap variasi parameter makanan tambahan  $A$  meningkat menjadi  $A = 1.9$ . Nilai awal yang digunakan  $[5,9]$  dan  $[5,5]$  untuk menunjukkan perilaku dinamika solusi sistem (4.1) yang digambarkan melalui potret fase berikut.



**Gambar 8:** Potret Fase Ketika Nilai Awal [5,9] dengan  $A=1.9$  konvergen ke  $E_3$



**Gambar 9:** Potret Fase Ketika Nilai Awal [5,5] dengan  $A=1.9$  konvergen ke  $E_3$

Potret fase pada Gambar 8 dan gambar 9 merepresentasikan ketika parameter makanan tambahan  $A$  meningkat menjadi  $A = 1.9$  maka hanya  $E_3$  yang stabil yaitu titik kedua populasi ada. Terlihat perilaku dinamik yang ditunjukkan melalui potret fase menuju ke titik kesetimbangan interior  $E_3$  pada Gambar 8. Nilai awal yang digunakan [5,9] ketika  $A = 1.9$  hanya tiga titik kesetimbangan yang eksis, yaitu  $E_1, E_2$  dan  $E_3$ . Gambar 9 menunjukkan potret fase ketika  $A = 1.9$  dengan nilai awal berbeda, yaitu [5,5] tetap konvergen ke titik kesetimbangan interior  $E_3$  yang stabil yaitu titik kedua populasi ada.

Hasil simulasi berupa potret fase dari perilaku dinamik solusi sistem (4.1) menunjukkan bahwa ketika makanan tambahan meningkat  $A = 1.3$  maka keempat titik kesetimbangan eksis dan terdapat dua titik kesetimbangan yang stabil yaitu  $E_2$  titik kepunahan populasi pemangsa dan titik kesetimbangan interior  $E_3$  semua populasi eksis. Fenomena ini yang disebut *bistabil* atau kestabilan ganda. Kestabilan ganda ditentukan oleh nilai awal. Ketika makanan tambahan menurun  $A = 1.2$  terjadi kepunahan populasi pemangsa, yang berarti mangsa hidup tanpa adanya pemangsaan oleh pemangsa. Ketika makanan tambahan meningkat  $A = 1.9$  maka hanya ada tiga titik kesetimbangan yang eksis yaitu  $E_1, E_2$  dan  $E_3$ . Semakin meningkat makanan tambahan maka sistem konvergen menuju ketitik kesetimbangan interior  $E_3$ .

## 5 Kesimpulan

Hasil konstruksi dan analisis kestabilan model mangsa pemangsa dengan mempertimbangkan makanan tambahan bagi pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe IV yaitu:

1. Hasil konstruksi model mangsa pemangsa dengan makanan tambahan bagi pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe IV sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\alpha xy}{cA\eta + x^2 + b}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\beta\alpha(A\eta + x)y}{cA\eta + x^2 + b} - \mu y$$

2. Analisis kestabilan memperoleh tiga titik kesetimbangan beserta sifat kestabilannya sebagai berikut:
  - a. Titik kesetimbangan  $E_1(0,0)$  dengan sifat kestabilan yaitu tidak stabil (*saddle point*).

- b. Titik kesetimbangan  $E_2(k, 0)$  dengan sifat kestabilan yaitu stabil asimtotik (*node*) dengan syarat  $\beta\alpha(A\eta + k) < \mu(cA\eta + k^2 + b)$
  - c. Titik kesetimbangan  $E_3(x^*, y^*)$  dengan sifat kestabilan yaitu stabil asimtotik dengan syarat  $a_1 > 0$  dan  $a_2 > 0$ .
3. Hasil simulasi numerik dengan parameter yang ditentukan menunjukkan hasil yang sama seperti hasil analisis. Ketika variasi parameter makanan tambahan terdapat *bistabil* yakni titik kesetimbangan  $E_2$  dan titik kesetimbangan interior  $E_3$  untuk  $A = 1.2$ . Variasi nilai parameter makanan tambahan menunjukkan perubahan dinamika solusi sistem (4.1), sehingga makanan tambahan mempengaruhi kestabilan masing-masing titik kesetimbangan.

## Daftar Pustaka

- [1] Dea and D. G. Bengen, *Teknik Pengambilan Contoh dan Analisis Data Biofisik Sumberdaya Pesisir*. Bogor: Pusat Kajian Sumberdaya Pesisir dan Lautan IPB, 2000.
- [2] E. P. Odum, *Fundamentals of ecology*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press, 1993.
- [3] I. W. Wahyudi, N. L. Watiniasih, and S. S. Yusup, "Jenis dan Sebaran *Uca* spp. (Crustacea: Decapoda: Ocypodidae) Di Kawasan Hutan Mangrove Benoa, Badung, Bali," *Jurnal Zoo Indonesia*, vol. 27, no. 2, p. 5, 2014.
- [4] C. Saparianto, *Pendayagunaan Ekosistem Mangrove*. Semarang: Dahara Prize, 2016.
- [5] R. Froese and P. D., "planiliza subviridis in Fishbase," *fish base*, Feb. 2017. <http://www.fishbase.org/> (accessed Feb. 06, 2023).
- [6] Darmono, *Budidaya Udang *Penaus**. Yogyakarta: Kanisius, 1991.
- [7] J. Dawes, *The Concise Encyclopedia of Popular Freshwater Tropical Fish*. UK: Queen Street House 4 Queen Street Bath BAI IHE, 2003.
- [8] Fahmi, "Beberapa Jenis Ikan Pemangsa Di Tambak Tradisional dan Cara Penanganannya," *Oseana*, vol. XXV, no. Nomor 1, pp. 21–30, 2000.
- [9] R. Arditi and L. R. Ginzburg, "Coupling in predator-prey dynamics: Ratio-Dependence," *J Theor Biol*, vol. 139, no. 3, pp. 311–326, Aug. 1989, doi: 10.1016/S0022-5193(89)80211-5.
- [10] H. Freedman and G. Wolkowicz, "Predator-prey systems with group defence: The paradox of enrichment revisited," *Bull Math Biol*, vol. 48, no. 5–6, pp. 493–508, 1986, doi: 10.1016/S0092-8240(86)90004-2.
- [11] F. Resmi, "Kendali Optimal pada Sistem Prey Predator dengan Pemberian Makanan Alternatif pada Predator," *JURNAL MATHEMATIC PAEDAGOGIC*, vol. 4, no. 1, p. 33, Sep. 2019, doi: 10.36294/jmp.v4i1.762.
- [12] L. Tantosa, "Analisis kestabilan model Leslie-Gower Predator-Prey satu pemangsa dengan tambahan makanan dan model Predator-Prey dua pemangsa," *UNPAR Institutional Repository*, 2018.
- [13] B. Sahoo, "Effects of additional food on predator-prey systems with monotonic and non-monotonic functional response: a comparative study," *International Journal of Basic and Applied Sciences*, vol. 1, no. 2, Apr. 2012, doi: 10.14419/ijbas.v1i2.65.
- [14] P. D. N. Srinivasu, B. S. R. V. Prasad, and M. Venkatesulu, "Biological control through provision of additional food to predators: A theoretical study," *Theor Popul Biol*, vol. 72, no. 1, pp. 111–120, Aug. 2007, doi: 10.1016/j.tpb.2007.03.011.
- [15] D. Savitri, "Numerical Study of One Prey-Two Predator Model Considering Food Addition and Anti-Predator Defense," *E3S Web of Conferences*, vol. 328, p. 06003, Dec. 2021, doi: 10.1051/e3sconf/202132806003.
- [16] M. Vogels, R. Zoeckler, D. M. Stasiw, and L. C. Cerny, "P. F. Verhulst's 'notice sur la loi que la populations suit dans son accroissement' from correspondence mathematique

- et physique. Ghent, vol. X, 1838,” *J Biol Phys*, vol. 3, no. 4, pp. 183–192, Dec. 1975, doi: 10.1007/BF02309004.
- [17] J. Logan, *A First Course in Differential Equations*, Third Edition. Lincoln: Springer Science Buissiness Media, 2015.
- [18] W. W. Murdoch and A. Oaten, “Predation and Population Stability,” *Advances in Ecological Research* 9, 1975, pp. 1–131. doi: 10.1016/S0065-2504(08)60288-3.
- [19] S. G. Mortoja, P. Panja, and S. K. Mondal, “Dynamics of a predator-prey model with stage-structure on both species and anti-predator behavior,” *Inform Med Unlocked*, vol. 10, pp. 50–57, 2018, doi: 10.1016/j.imu.2017.12.004.
- [20] D. Xiao and S. Ruan, “Global Analysis in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response,” *SIAM J Appl Math*, vol. 61, no. 4, pp. 1445–1472, Jan. 2001, doi: 10.1137/S0036139999361896.
- [21] W. Sokol and J. A. Howell, “Kinetics of phenol oxidation by washed cells,” *Biotechnol Bioeng*, vol. 23, no. 9, pp. 2039–2049, Sep. 1981, doi: 10.1002/bit.260230909.
- [22] M. van Baalen, V. Krivan, P. C. J. van Rijn, and M. W. Sabelis, “Alternative Food, Switching Predators, and the Persistence of Predator-Prey Systems,” *Am Nat*, vol. 157, no. 5, pp. 512–524, May 2001, doi: 10.1086/319933.
- [23] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems (Texts in Applied Mathematics 7)*, Third Edition. New York: Springer-Verlag, 2013.
- [24] J. K. Hale and H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, vol. 3. New York, NY: Springer New York, 1991. doi: 10.1007/978-1-4612-4426-4.
- [25] H. Anton, C. Rorres, and A. Kaul, *Elementary Linear Algebra: Applications Version (12th Edition)*. United States of America: Wiley, 2019.
- [26] W. Boyce, R. Diprima, and D. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Eleventh Edition*. USA: John Wiley & Sons, 2017.
- [27] G. J. Olsder, *Mathematical systems theory*. Delft University Press, 1997.
- [28] W. Mahmudah and M. Rifai, “Analisis Kestabilan Model Prey-Predator dengan Penambahan Makanan Alternatif dan Fungsi Respon Holling Tipe III,” *Buana Matematika : Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika*, vol. 10, no. 2, pp. 133–146, Dec. 2020, doi: 10.36456/buanamatematika.v10i2.2728.
- [29] N. Taylor and C. Walters, “Estimation of Bioenergetics Parameters for a Stunted Northern Pikeminnow Population of South Central British Columbia,” *The Open Fish Science Journal*, vol. 3, no. 1, pp. 110–121, Jan. 2010, doi: 10.2174/1874401X01003010110.
- [30] A. Das and G. P. Samanta, “Modeling the fear effect on a stochastic prey–predator system with additional food for the predator,” *J Phys A Math Theor*, vol. 51, no. 46, p. 465601, Nov. 2018, doi: 10.1088/1751-8121/aae4c6.