J. Ris. & Ap. Mat. Vol. 07 No. 01 (2023) pp. 66-79
Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika
e-ISSN: 2581-0154
URL: journal.unesa.ac.id/index.php/jram

SUATU KAJIAN PICTURE FUZZY SUBGRUP

DINNI RAHMA OKTAVIANI[1*]

[1]Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Walisongo Semarang

*dinni@walisongo.ac.id

ABSTRAK

Zadeh pada tahun 1965 membahas mengenai ketidakpastian dari keanggotaan himpunan yang kemudian himpunan dengan sifat ini disebut himpunan fuzzy. Ketidakpastian dari keanggotaan himpunan ini dapat dilihat dari derajat keanggotaan himpunan fuzzy berada pada interval [0,1]. Banyak penelitian yang telah dilakukan untuk mengembangkan konsep himpunan fuzzy tersebut, salah satunya himpunan fuzzy gambar/ picture fuzzy set (PFS). PFS pertama kali diperkenalkan oleh Cuong & Kreinovich pada tahun 2013. Penelitian PFS juga telah banyak dilakukan baik dalam penerapannya maupun teorinya. Salah satu penelitian teori mengenai PFS adalah picture fuzzy subgrup (PFSG). Pada artikel ini dibahas mengenai definisi PFSG, sifat derajat keanggotaannya, hasil operasi PFSG dan sifat-sifatnya serta definisi picture fuzzy value (PFV) dan konjugasi dari dua PFSG.

Kata Kunci: Picture Fuzzy Set, Picture Fuzzy Subgrup, Picture Fuzzy Value, Fuzzy Subgrup.

ABSTRACT

Fuzzy sets were first introduced by Zadeh in 1965. Fuzzy sets discuss the uncertainty of set membership. The uncertainty can be seen from membership degree of fuzzy set in the interval [0,1]. Many studies have been conducted to develop fuzzy set concept, one of which is the picture fuzzy set (PFS). PFS was first introduced by Cuong and Kreinovich in 2013. Many research on PFS has also been carried out both in its application and theory. One of the theoretical studies regarding PFS is the picture fuzzy subgroup (PFSG). This paper discusses the definition of PFSG, the nature of its membership degree, the results of PFSG operations and its properties, the definition of picture fuzzy value (PFV), and the definition of conjugate of two PFSG.

***Keywords**: Picture Fuzzy Set, Picture Fuzzy Subgroup, Picture Fuzzy Value, Fuzzy Subgroup.*

2020 Mathematics Subject Classification: 03E72
Tanggal Masuk: 06-03-23; direvisi: 29-03-23; diterima: 30-04-23

1. Pendahuluan

Perkembangan teknologi yang semakin pesat menyebabkan permasalahan yang ada tidak bisa hanya diselesaikan dengan menggunakan himpunan klasik. Himpunan fuzzy memberikan gambaran mengenai ketidakpastian dari keanggotaan suatu himpunan. Matematikawan yang pertama kali mengusullkan konsep mengenai himpunan fuzzy adalah (Zadeh, 1965). Pada tahun 1965, Zadeh menjabarkan konsep subhimpunan fuzzy dan relasinya. Konsep himpunan fuzzy ini kemudian diperluas oleh peneliti-peneliti lain ke dalam topik struktur aljabar seperti grup fuzzy yang dikaji oleh (Abdy et al., 2019) berdasarkan buku (Moderson,J.N., Bhutani,K.R., & Rosenfeld, 2005), (λ, μ) $-$subgrup fuzzy (Li et al., 2013), α $-$fuzzy subgrup (P.K., 2013),Frattini fuzzy subgrup dari fuzzy grup (Ejegwa & Otuwe, 2020), normal multi-fuzzy subgrup dan normal multi-anti fuzzy subgrup (Amaluddin & Surodjo, 2020), Q-fuzzy normal subgrup (Priya et al., 2013) yang kemudian dilanjutkan oleh penelitian (Sailaja & Prasad, 2021) tentang interaksi antara Q-fuzzy normal subgrup dan Q-fuzzy characteristic subgrup, grup faktor yang dibangun dari subgrup normal fuzzy (Tarmizi & Abdurrahman, 2019), Kernel dari grup fuzzy (Oktaviani & Habiburrohman, 2023), sifat-sifat dari homomorfisma subgrup fuzzy (Mihsin, 2015), intutionistic fuzzy dan normal fuzzy dari M-Subgrup, M homomorfisma dan Isomorfisma (Oqla Massa'deh, 2016), dan masih banyak perkembangan fuzzy pada bidang kajian struktur aljabar.

Himpunan fuzzy kemudian diperluas ke jenis konsep fuzzy yang lain, seperti himpunan anti fuzzy, himpunan fuzzy intutionistik dan yang terbaru adalah picture fuzzy set (PFS) yang merupakan perluasan langsung dari himpunan fuzzy dan himpunan fuzzy intutionistik. Teori mengenai definisi PFS pertama kali diperkenalkan oleh (Cuong & Kreinovich, 2013), yang kemudian aspek aspek yang terdapat pada PFS diringkas oleh (Dutta & Ganju, 2018), pendekatan dengan picture fuzzy ternyata dapat menyelesaikan permsalahan dalam transportasi seperti penelitian yang dilakukan oleh (Geetha & Selvakumari, 2020), pengukuran dari PFS juga dikembangkan oleh peneliti yang kemudian diterapkan untuk pengambilan keputusan dari multi-atribut (Nguyen & Nguyen, 2018), selain mengembangkan terapan dari picture fuzzy, beberapa sifat aljabarnya juga diteliti (Silambarasan, 2021). Berdasarkan penelitian terdahulu tersebut, peneliti tertarik untuk mengulas PFS pada kajian struktur aljabar yaitu subgrup, lebih tepatnya mengenai picture fuzzy subgrup (PFSG). Penelitian terminologi dasar mengenai PFSG telah dilakukan oleh (Dogra & Pal, 2023). Pada artikel ini akan mengkaji penelitian (Dogra & Pal, 2023) lebih dalam.

2. Picture Fuzzy Subgrup

Pada bagian ini dibahas mengenai beberapa terminologi dan sifat dasar dari Picture Fuzzy Subgrup (PFSG). Pembahasan meliputi definisi Picture Fuzzy Subgrup (PFSG), sifat derajat keanggotaan dari anggota-anggota di PFSG, hasil operasi antara 2 PFSG, sifat derajat keanggotaan dari hasil operasi PFSG, definisi Picture Fuzzy Value (PFV) dan definisi konjugat dari 2 PFSG.

Pada proses mendefinisikan Picture Fuzzy Subgrup (PFSG) terlebih dahulu mendefinisikan Picture Fuzzy Set (PFS).

Definisi 1 (Dogra & Pal, 2023)**.** Misalkan diketahui semesta S. Picture Fuzzy Set (PFS) P atas semesta S didefinisikan sebagai $P = \{(s, \mu_P(s), \eta_P(s), v_P(s)) : s \in S\}$, dengan $\mu_P(s) \in [0,1]$ merupakan derajat keanggotaan positif dari s di P, $\eta_P(s) \in [0,1]$ merupakan derajat keanggotaan netral dari s di P, $v_P(s)$ merupakan derajat keanggotaan negatif dari s di P dengan kondisi $0 \leq \mu_P(s) + \eta_P(s) + v_P(s) \leq 1$ untuk setiap s di S. Untuk setiap s di S, $1 - (\mu_P(s) + \eta_P(s) + v_P(s))$ merupakan derajat keanggotaan denial s di P.

Operasi dasar dari PFSs terkait sub himpunan, kesamaan, gabungan, dan irisan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2 (Dogra & Pal, 2023)**.** Misalkan P dan Q merupakan PFSs atas semesta S dengan kondisi
$P = \{(s, \mu_P(s), \eta_P(s), v_P(s)) : s \in S\}$ dan $Q = \left\{\left(s, \mu_Q(s), \eta_Q(s), v_Q(s)\right) : s \in S\right\}$.

1. $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika $\mu_P(s) \leq \mu_Q(s)$, $\eta_P(s) \leq \eta_Q(s)$, $v_P(s) \geq v_Q(s)$ untuk setiap s di S;
2. $P = Q$ jika dan hanya jika $\mu_P(s) = \mu_Q(s)$, $\eta_P(s) = \eta_Q(s)$, $v_P(s) = v_Q(s)$ untuk setiap s di S;
3. $P \cup Q = \left\{\left(s, \max\left(\mu_P(s), \mu_Q(s)\right), \min\left(\eta_P(s), \eta_Q(s)\right), \min\left(v_P(s), v_Q(s)\right)\right) : s \in S\right\}$
4. $P \cap Q = \left\{\left(s, \min\left(\mu_P(s), \mu_Q(s)\right), \min\left(\eta_P(s), \eta_Q(s)\right), \max\left(v_P(s), v_Q(s)\right)\right) : s \in S\right\}$

Untuk efektivitas dalam penulisan, PFS $P = \{(s, \mu_P(s), \eta_P(s), v_P(s)) : s \in S\}$ pada artikel ini akan ditulis sebagai $P = (\mu_P, \eta_P, v_P)$

Picture Fuzzy Subgrup (PFSG) dari grup klasik sebagai perluasan dari Fuzzy Sub Grup (FSG) dan Intusionistik Fuzzy Subgrup (IFSG).

Definisi 3 (Dogra & Pal, 2023)**.** Misalkan $(G,*)$ merupakan grup klasik dan $P = (\mu_P, \eta_P, v_P)$ merupakan PFS di G. P merupakan PFSG dari G jika

i) $\mu_P(h * i) \geq \min(\mu_P(h), \mu_P(i))$; $\eta_P(h * i) \geq \min(\eta_P(h), \eta_P(i))$; $v_P(h * i) \leq \max(v_P(h), v_P(i))$ untuk setiap h, i di G

ii) $\mu_P(h^{-1}) \geq \mu_P(h)$; $\eta_P(h^{-1}) \geq \eta_P(h)$; $v_P(h^{-1}) \leq v_P(h)$ untuk setiap h di G

Contoh 4. Suatu PFS $P = (\mu_P, \eta_P, v_P)$ pada grup $G = (\mathbb{Z}, +)$ dengan ketentuan sebagai berikut:

$$\mu_P(a) = \begin{cases} 0{,}38, jika\ a \in 3\mathbb{Z} \\ 0{,}25, jika\ a \notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\eta_P(a) = \begin{cases} 0{,}35, jika\ a \in 3\mathbb{Z} \\ 0{,}15, jika\ a \notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\nu_P(a) = \begin{cases} 0{,}13, jika\ a \in 3\mathbb{Z} \\ 0{,}22, jika\ a \notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$

Contoh tersebut tidak dapat menunjukkan secara kuat bahwa P merupakan PFSG dari G. Oleh karena itu, diperlukan perluasan proporsisi menjadi dua bagian. Bagian pertama memberikan hubungan antara elemen identitas dan sembarang elemen pada grup semesta PFSG dan proporsisi kedua memberikan hubungan antara invers dari suatu elemen dengan dirinya sendiri dari grup semesta PFSG.

Proporsisi 5 (Dogra & Pal, 2023)**.** Misalkan $(G,*)$ merupakan grup dan $P = (\mu_P, \eta_P, \nu_P)$ merupakan PFSG dari G, maka:

i) $\mu_P(e) \geq \mu_P(h)$; $\eta_P(e) \geq \eta_P(h)$; $\nu_P(e) \leq \nu_P(h)$ untuk setiap h di G, dan e merupakan elemen identitas dari G.
ii) $\mu_P(h^{-1}) = \mu_P(h)$; $\eta_P(h^{-1}) = \eta_P(h)$; $\nu_P(h^{-1}) = \nu_P(h)$ untuk setiap h di G, dan h^{-1} merupakan invers dari h di G.

Bukti: Misalkan e merupakan elemen identitas dari grup G

i) $$\begin{aligned}\mu_P(e) &= \mu_P(h * h^{-1}) \\ &\geq \min(\mu_P(h), \mu_P(h^{-1})) \\ &= \mu_P(h)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\eta_P(e) &= \eta_P(h * h^{-1}) \\ &\geq \min(\eta_P(h), \eta_P(h^{-1})) \\ &= \eta_P(h)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\nu_P(e) &= \nu_P(h * h^{-1}) \\ &\leq \max(\nu_P(h), \nu_P(h^{-1})) \\ &= \nu_P(h)\end{aligned}$$
untuk setiap h di G.

ii) Berdasarkan definisi P merupakan PFSG dari G diperoleh
$$\mu_P(h^{-1}) \geq \mu_P(h);\ \eta_P(h^{-1}) \geq \eta_P(h); \nu_P(h^{-1}) \leq \nu_P(h)$$
untuk setiap h di G. Karena berlaku untuk setiap h di G, maka h dapat diganti dengan h^{-1} dan diketahui $(h^{-1})^{-1} = h$ maka diperoleh
$$\mu_P(h) \geq \mu_P(h^{-1});\ \eta_P(h) \geq \eta_P(h^{-1}); \nu_P(h) \leq \nu_P(h^{-1})$$
Berdasarkan persamaan diperoleh
$$\mu_P(h^{-1}) = \mu_P(h);\ \eta_P(h^{-1}) = \eta_P(h); \nu_P(h^{-1}) = \nu_P(h).$$

Proporsi berikut memberikan syarat perlu dan cukup untuk suatu PFS menjadi PFSG.

Proposisi 6. Misalkan $(G,*)$ merupakan grup dan $P = (\mu_P, \eta_P, \nu_P)$ merupakan PFS di G. P merupakan PFSG di G jika dan hanya jika $\mu_P(h * i^{-1}) \geq \min\big(\mu_P(h), \mu_P(i)\big)$; $\eta_P(h * i^{-1}) \geq \min\big(\eta_P(h), \eta_P(i)\big)$; $\nu_P(h * i^{-1}) \leq \max\big(\nu_P(h), \nu_P(i)\big)$ untuk setiap h, i di G

Bukti:

$\Longrightarrow$ Diketahui P merupakan PFSG di G, maka diperoleh

$$\mu_P(h*i^{-1}) \geq \min\left(\mu_P(h), \mu_P(i^{-1})\right) \geq \min\left(\mu_P(h), \mu_P(i)\right);$$
$$\eta_P(h*i^{-1}) \geq \min\left(\eta_P(h), \eta_P(i^{-1})\right) \geq \min\left(\eta_P(h), \eta_P(i)\right);$$
$$v_P(h*i^{-1}) \leq \max\left(v_P(h), v_P(i^{-1})\right) \leq \max\left(v_P(h), v_P(i)\right)$$

Untuk semua h, i di G

$\Longleftarrow$ Diketahui $\mu_P(h*i^{-1}) \geq \min\left(\mu_P(h), \mu_P(i)\right)$; $\eta_P(h*i^{-1}) \geq \min\left(\eta_P(h), \eta_P(i)\right)$; $v_P(h*i^{-1}) \leq \max\left(v_P(h), v_P(i)\right)$ untuk setiap h, i di G. Sehingga diperoleh:

$$\mu_P(e) = \mu_P(h*h^{-1}) \geq \min\left(\mu_P(h), \mu_P(h^{-1})\right) = \mu_P(h);$$
$$\eta_P(e) = \eta_P(h*h^{-1}) \geq \min\left(\eta_P(h), \eta_P(h^{-1})\right) = \eta_P(h);$$
$$v_P(e) = v_P(h*h^{-1}) \leq \max\left(v_P(h), v_P(h^{-1})\right) = v_P(h)$$

untuk setiap $h \in G, e$ identitas di G. Maka $\mu_P(e) \geq \mu_P(h)$; $\eta_P(e) \geq \eta_P(h)$; $v_P(e) \leq v_P(h)$ untuk setiap h di G. Perhatikan bahwa untuk setiap $i \in G$

$$\mu_P(i^{-1}) = \mu_P(e*i^{-1}) \geq \min\left(\mu_P(e), \mu_P(i)\right) = \mu_P(i);$$
$$\eta_P(i^{-1}) = \eta_P(e*i^{-1}) \geq \min\left(\eta_P(e), \eta_P(i)\right) = \eta_P(i);$$
$$v_P(i^{-1}) = v_P(e*i^{-1}) \leq \max\left(v_P(e), v_P(i)\right) = v_P(i)$$

Maka $\mu_P(i^{-1}) = \mu_P(i)$; $\eta_P(i^{-1}) = \eta_P(i)$; $v_P(i^{-1}) = v_P(i)$ untuk setiap $i \in G$

Dapat dilihat bahwa untuk setiap h, i di G berlaku

$$\mu_P(h*i) = \mu_P(h*(i^{-1})^{-1}) \geq \min\left(\mu_P(h), \mu_P(i^{-1})\right) \geq \min\left(\mu_P(h), \mu_P(i)\right);$$
$$\eta_P(h*i) = \eta_P(h*(i^{-1})^{-1}) \geq \min\left(\eta_P(h), \eta_P(i^{-1})\right) \geq \min\left(\eta_P(h), \eta_P(i)\right);$$
$$v_P(h*i) = v_P(h*(i^{-1})^{-1}) \leq \max\left(v_P(h), v_P(i^{-1})\right) \leq \max\left(v_P(h), v_P(i)\right).$$

Akibatnya, P merupakan PFSG dari G.

Proposisi 7. Misalkan (G,*) merupakan grup dan $P = (\mu_P, \eta_P, v_P), Q = \left(\mu_Q, \eta_Q, v_Q\right)$merupakan dua PFSGs di G, maka $P \cap Q$ merupakan PFSG dari G.

Bukti: Misalkan $P \cap Q = R = (\mu_R, \eta_R, v_R)$. Berdasarkan definisi operasi PFSG maka $\mu_R(s) = \min\left(\mu_P(s), \mu_Q(s)\right), \eta_R(s) = \min\left(\eta_P(s), \eta_Q(s)\right), v_R(s) = \max\left(v_P(s), v_Q(s)\right)$ untuk setiap s di G. Karena P dan Q merupakan PFSGs dari G, maka untuk setiap h, i di G

$$\begin{aligned}
\mu_R(h*i^{-1}) &= \min\left(\mu_P(h*i^{-1}), \mu_Q(h*i^{-1})\right) \\
&\geq \min\left(\min\left(\mu_P(h), \mu_P(i)\right), \min(\mu_Q(h), \mu_Q(i)\right) \\
&= \min\left(\min\left(\mu_P(h), \mu_Q(h)\right), \min(\mu_P(i), \mu_Q(i)\right) \\
&= \min\left(\mu_R(h), \mu_R(i)\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_R(h*i^{-1}) &= \min\left(\eta_P(h*i^{-1}), \eta_Q(h*i^{-1})\right) \\
&\geq \min\left(\min\left(\eta_P(h), \eta_P(i)\right), \min(\eta_Q(h), \eta_Q(i)\right) \\
&= \min\left(\min\left(\eta_P(h), \eta_Q(h)\right), \min(\eta_P(i), \eta_Q(i)\right) \\
&= \min\left(\eta_R(h), \eta_R(i)\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_R(h*i^{-1}) &= \max\left(v_P(h*i^{-1}), v_Q(h*i^{-1})\right) \\
&\leq \max\left(\max\left(v_P(h), v_P(i)\right), \max(v_Q(h), v_Q(i)\right)
\end{aligned}$$

$$= \max\left(\max\left(v_P(h), v_Q(h)\right), \max(v_P(i), v_Q(i)\right)$$
$$= \max\left(v_R(h), v_R(i)\right);$$

Karena untuk setiap h, i di G berlaku $\mu_R(h * i^{-1}) \geq \min\left(\mu_R(h), \mu_R(i)\right), \eta_R(h * i^{-1}) \geq \min\left(\eta_R(h), \eta_R(i)\right), v_R(h * i^{-1}) \leq \max\left(v_R(h), v_R(i)\right)$; sehingga berdasarkan definisi PFSG terbukti bahwa $R = P \cap Q$ merupakan PFSG dari G.

Irisan dari dua PFSG selalu menghasilkan PFSG kembali, namun hal ini tidak selalu berlaku untuk gabungan dari dua PFSG. Contoh berikut memberikan gabungan dari dua PFSG yang bukan merupakan PFSG dan contoh gabungan dari dua PFSG yang merupakan PFSG.

Contoh 8. Misalkan $P = \left(\mu_P, \eta_p, v_P\right), Q = \left(\mu_Q, \eta_Q, v_Q\right)$ merupakan PFSGs pada grup $G = (\mathbb{Z}, +)$ dengan ketentuan sebagai berikut:

$$\mu_P(a) = \begin{cases} 0{,}38, jika\ a \in 3\mathbb{Z} \\ 0{,}25, jika\ a \notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\eta_P(a) = \begin{cases} 0{,}35, jika\ a \in 3\mathbb{Z} \\ 0{,}15, jika\ a \notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$v_P(a) = \begin{cases} 0{,}13, jika\ a \in 3\mathbb{Z} \\ 0{,}22, jika\ a \notin 3\mathbb{Z} \end{cases}$$

dan

$$\mu_Q(a) = \begin{cases} 0{,}28, jika\ a \in 5\mathbb{Z} \\ 0{,}15, jika\ a \notin 5\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\eta_Q(a) = \begin{cases} 0{,}4, jika\ a \in 5\mathbb{Z} \\ 0{,}2, jika\ a \notin 5\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$v_Q(a) = \begin{cases} 0{,}17, jika\ a \in 5\mathbb{Z} \\ 0{,}24, jika\ a \notin 5\mathbb{Z} \end{cases}$$

maka

$$\mu_{P\cup Q}(a) = \begin{cases} 0{,}38, jika\ a \in 3\mathbb{Z} \\ 0{,}28, jika\ a \in 5\mathbb{Z} \\ 0{,}15, Lainnya \end{cases}$$
$$\eta_{P\cup Q}(a) = \begin{cases} 0{,}2, jika\ a \in 3\mathbb{Z} \\ 0{,}15, jika\ a \in 5\mathbb{Z} \\ 0{,}15, Lainnya \end{cases}$$
$$v_{P\cup Q}(a) = \begin{cases} 0{,}13, jika\ a \in 3\mathbb{Z} \\ 0{,}17, jika\ a \in 5\mathbb{Z} \\ 0{,}22, Lainnya \end{cases}$$

Dari kondisi di atas diperoleh $\mu_{P\cup Q}(10 + (-6)) = \mu_{P\cup Q}(4) = 0{,}15 \ngeq \min\left(\mu_{P\cup Q}(10), \mu_{P\cup Q}(6)\right) = \min(0{,}28\,,\ 0{,}38) = 0{,}28$ sehingga $P \cup Q$ bukan merupakan PFSG dari G.

Contoh 9. Misalkan $P=(\mu_P,\eta_P,v_P), Q=\left(\mu_Q,\eta_Q,v_Q\right)$ merupakan PFSGs pada grup $G=(\mathbb{Z},+)$ dengan ketentuan sebagai berikut:

$$\mu_P(a)=\begin{cases}0{,}38, jika\ a\in 3\mathbb{Z}\\ 0{,}25, jika\ a\notin 3\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\eta_P(a)=\begin{cases}0{,}35, jika\ a\in 3\mathbb{Z}\\ 0{,}15, jika\ a\notin 3\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$v_P(a)=\begin{cases}0{,}15, jika\ a\in 3\mathbb{Z}\\ 0{,}25, jika\ a\notin 3\mathbb{Z}\end{cases}$$

dan

$$\mu_Q(a)=\begin{cases}0{,}24, jika\ a\in 3\mathbb{Z}\\ 0{,}13, jika\ a\notin 3\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\eta_Q(a)=\begin{cases}0{,}42, jika\ a\in 3\mathbb{Z}\\ 0{,}21, jika\ a\notin 3\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$v_Q(a)=\begin{cases}0{,}13, jika\ a\in 3\mathbb{Z}\\ 0{,}22, jika\ a\notin 3\mathbb{Z}\end{cases}$$

Maka

$$\mu_{P\cup Q}(a)=\begin{cases}0{,}38, jika\ a\in 3\mathbb{Z}\\ 0{,}25, jika\ a\notin 3\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\eta_{P\cup Q}(a)=\begin{cases}0{,}35, jika\ a\in 3\mathbb{Z}\\ 0{,}15, jika\ a\notin 3\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$v_{P\cup Q}(a)=\begin{cases}0{,}13, jika\ a\in 3\mathbb{Z}\\ 0{,}22, jika\ a\notin 3\mathbb{Z}\end{cases}$$

Jelas bahwa $P\cup Q$ merupakan PFSG dari G.

Proposisi 10. Misalkan $(G,*)$ merupakan grup, $P=(\mu_P,\eta_P,v_P), Q=\left(\mu_Q,\eta_Q,v_Q\right)$ merupakan PFSGs dari G, maka $P\cup Q$ merupakan PFSG dari G jika $P\subseteq Q$ atau $Q\subseteq P$.

Bukti. Misalkan $P\cup Q=R=(\mu_R,\eta_R,v_R)$, maka $\mu_R=\max\left(\mu_P(h),\mu_Q(h)\right), \eta_R=\min\left(\eta_P(h),\eta_Q(h)\right),\ v_R=\min\left(v_P(h),v_Q(h)\right); h\in G$.

Kasus 1. Misalkan $P\subseteq Q$, maka untuk setiap $h\in G$ berlaku $\mu_P(h)\le\mu_Q(h),\eta_P(h)\le\eta_Q(h),v_P(h)\ge v_Q(h)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mu_R(h*i^{-1})&=\max\left(\mu_P(h*i^{-1}),\mu_Q(h*i^{-1})\right)\\&=\mu_Q(h*i^{-1})\\&\ge\min(\mu_Q(h),\mu_Q(i)\\&=\min\left(\max\left(\mu_P(h),\mu_Q(h)\right),\max(\mu_P(i),\mu_Q(i)\right)\\&=\min\left(\mu_R(h),\mu_R(i)\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_R(h*i^{-1})&=\max\left(\eta_P(h*i^{-1}),\eta_Q(h*i^{-1})\right)\\&=\eta_Q(h*i^{-1})\\&\ge\min\left(\eta_P(h),\eta_P(i)\right)\\&=\min\left(\min\left(\eta_P(h),\eta_Q(h)\right),\min(\eta(i),\eta_Q(i)\right)\\&=\min\left(\eta_R(h),\eta_R(i)\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_R(h*i^{-1}) &= \min\left(v_P(h*i^{-1}), v_Q(h*i^{-1})\right) \\ &= v_Q(h*i^{-1}) \\ &\leq \max(v_Q(h), v_Q(i)) \\ &= \max\left(\min\left(v_P(h), v_Q(h)\right), \min(v_P(i), v_Q(i)\right) \\ &= \max\left(v_R(h), v_R(i)\right); \end{aligned}$$

Maka terbukti R adalah PFSG dari G.

Kasus 2. Jika $Q \subseteq P$, maka untuk setiap $a \in G$ dengan pembuktian yang serupa berlaku $\mu_R(h*i^{-1}) \geq \min\left(\mu_R(h), \mu_R(i)\right)$; $\eta_R(h*i^{-1}) \geq \min\left(\eta_R(h), \eta_R(i)\right)$; dan $v_R(h*i^{-1}) \leq \max\left(v_R(h), v_R(i)\right)$ untuk setiap $h, i \in G$.

Definisi 11 (Dogra & Pal, 2023)**.** Misalkan $P = (\mu_P, \eta_P, v_P), Q = \left(\mu_Q, \eta_Q, v_Q\right)$ merupakan PFS dari atas semesta S, maka hasil kali silang (Cartesian Product) dari P dan Q adalah PFS $P \times Q = \left(\mu_{P\times Q}, \eta_{P\times Q}, v_{P\times Q}\right)$ dengan $\mu_{P\times Q}\left((h,i)\right) = \min\left(\mu_P(h), \mu_Q(i)\right), \eta_{P\times Q}\left((h,i)\right) = \min\left(\eta_P(h), \eta_Q(i)\right)$, $v_{P\times Q}((h,i)) = \max(v_P(h), v_Q(i))$ untuk setiap $(h,i) \in S \times S$.

Contoh 12. Misalkan diketahui $P = (\mu_P, \eta_P, v_P), Q = \left(\mu_Q, \eta_Q, v_Q\right)$ merupakan PFS dari atas semesta $\mathbb{Z}$ dengan

$$\mu_P(a) = \begin{cases} 0{,}3, jika\ a \in 2\mathbb{Z} \\ 0{,}2, jika\ a \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

$$\eta_P(a) = \begin{cases} 0{,}4, jika\ a \in 2\mathbb{Z} \\ 0{,}3, jika\ a \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

$$v_P(a) = \begin{cases} 0{,}1, jika\ a \in 2\mathbb{Z} \\ 0{,}2, jika\ a \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

dan

$$\mu_Q(a) = \begin{cases} 0{,}35, jika\ a \in 2\mathbb{Z} \\ 0{,}15, jika\ a \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

$$\eta_Q(a) = \begin{cases} 0{,}3, jika\ a \in 2\mathbb{Z} \\ 0{,}2, jika\ a \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

$$v_Q(a) = \begin{cases} 0{,}15, jika\ a \in 2\mathbb{Z} \\ 0{,}25, jika\ a \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

maka

$$\mu_{P\times Q}(a,b) = \begin{cases} 0{,}3, jika\ (a,b) \in 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \\ 0{,}2, jika\ (a,b) \in 2\mathbb{Z} \times (2\mathbb{Z}+1) \\ 0{,}15, jika\ (a,b) \in (2\mathbb{Z}+1) \times 2\mathbb{Z} \\ 0{,}15, jika\ (a,b) \in (2\mathbb{Z}+1) \times (2\mathbb{Z}+1) \end{cases}$$

$$\eta_{P\times Q}(a,b) = \begin{cases} 0{,}3, jika\ (a,b) \in 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \\ 0{,}3, jika\ (a,b) \in 2\mathbb{Z} \times (2\mathbb{Z}+1) \\ 0{,}2, jika\ (a,b) \in (2\mathbb{Z}+1) \times 2\mathbb{Z} \\ 0{,}2, jika\ (a,b) \in (2\mathbb{Z}+1) \times (2\mathbb{Z}+1) \end{cases}$$

$$v_{P\times Q}(a,b)=\begin{cases}0{,}15, jika\ (a,b)\in 2\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}\\ 0{,}2, jika\ (a,b)\in 2\mathbb{Z}\times(2\mathbb{Z}+1)\\ 0{,}25, jika\ (a,b)\in(2\mathbb{Z}+1)\times 2\mathbb{Z}\\ 0{,}25, jika\ (a,b)\in(2\mathbb{Z}+1)\times(2\mathbb{Z}+1)\end{cases}$$

Proposisi 13. Misalkan $(G,*)$ merupakan grup dan $P=(\mu_P,\eta_P,v_P), Q=(\mu_Q,\eta_Q,v_Q)$ merupakan PFSgs di G, maka $P\times Q$ merupakan PFSG dari $G\times G$.
Bukti: Misalkan $P\times Q=R=(\mu_R,\eta_R,v_R)$ dengan $\mu_R(h)=\min\left(\mu_P(h),\mu_Q(h)\right), \eta_R(h)=\min\left(\eta_P(h),\eta_Q(h)\right), v_R(h)=\max(v_P(h),v_Q(h))$ untuk setiap (h,i) di $G\times G$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\mu_R((h,i)*(j,k)^{-1}) &= \mu_R\big((h,i)*(j^{-1},k^{-1})\big)\\ &= \min\left(\mu_P(h*j^{-1}),\mu_Q(i*k^{-1})\right)\\ &\geq \min\big(\min\big(\mu_P(h),\mu_P(j)\big),\min(\mu_Q(i),\mu_Q(k)\big)\\ &= \min\left(\min\left(\mu_P(h),\mu_Q(i)\right),\min(\mu_P(j),\mu_Q(k)\right)\\ &= \min\big(\mu_R(h,i),\mu_R(j,k)\big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_R((h,i)*(j,k)^{-1}) &= \eta_R\big((h,i)*(j^{-1},k^{-1})\big)\\ &= \min\left(\eta_P(h*j^{-1}),\eta_Q(i*k^{-1})\right)\\ &\geq \min\big(\min\big(\eta_P(h),\eta_P(j)\big),\min(\eta_Q(i),\eta_Q(k)\big)\\ &= \min\left(\min\left(\eta_P(h),\eta_Q(i)\right),\min(\eta_P(j),\eta_Q(k)\right)\\ &= \min\big(\eta_R(h,i),\eta_R(j,k)\big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_R((h,i)*(j,k)^{-1}) &= v_R\big((h,i)*(c^{-1},d^{-1})\big)\\ &= \max\left(v_P(h*j^{-1}),v_Q(i*k^{-1})\right)\\ &\leq \max\big(\max\big(v_P(h),v_P(j)\big),\max(v_Q(i),v_Q(k)\big)\\ &= \max\left(\max\left(v_P(h),v_Q(i)\right),\max(v_P(j),v_Q(k)\right)\\ &= \max\big(v_R(h,i),v_R(j,k)\big)\end{aligned}$$

Berdasarkan hal di atas diperoleh bahwa $P\times Q$ merupakan PFSG dari $G\times G$.

Proporsisi selanjutnya memberikan hubungan antara elemen identitas dan elemen lain pada hasil kali Cartesian dari dua PFSGs.

Proposisi 14 (Dogra & Pal, 2023)**.** Misalkan $(G_c,*)$ dan $(G_d,*)$ merupakan grup klasik dan $P=(\mu_P,\eta_P,v_P), Q=(\mu_Q,\eta_Q,v_Q)$ merupakan PFSGs dari G_c dan G_d berurutan, maka $\mu_{P\times Q}(e_c,e_d)\geq\mu_{P\times Q}(h_c,h_d), \eta_{P\times Q}(e_c,e_d)\geq\eta_{P\times Q}(h_c,h_d)$ dan $v_{P\times Q}(e_c,e_d)\leq v_{P\times Q}(h_c,h_d)$ untuk setiap $(h_c,h_d)\in G_c\times G_d$ dan (e_c,e_d) merupakan identitas dari $G_c\times G_d$.
Bukti: Perhatikan bahwa untuk setiap $h_c\in G_c$ dan $h_d\in G_d$

$$\mu_{P\times Q}(e_c,e_d)=\min\left(\mu_P(e_c),\mu_Q(e_d)\right)\geq \min\left(\mu_P(h_c),\mu_Q(h_d)\right)=\mu_{P\times Q}(h_c,h_d)$$
$$\eta_{P\times Q}(e_c,e_d)=\min\left(\eta_P(e_c),\eta_Q(e_d)\right)\geq \min\left(\eta_P(h_c),\eta_Q(h_d)\right)=\eta_{P\times Q}(h_c,h_d)$$
dan
$$v_{P\times Q}(e_c,e_d)=\max\left(v_P(e_c),v_Q(e_d)\right)\leq \max\left(v_P(h_c),v_Q(h_d)\right)=v_{P\times Q}(h_c,h_d)$$
Maka, diperoleh $\mu_{P\times Q}(e_c,e_d)\geq \mu_{P\times Q}(h_c,h_d), \eta_{P\times Q}(e_c,e_d)\geq \eta_{P\times Q}(h_c,h_d)$ dan $v_{P\times Q}(e_c,e_d)\leq v_{P\times Q}(h_c,h_d)$ untuk setiap $(h_c,h_d)\in G_1\times G_2$.

Proposisi 15. Misalkan $(G_c,*)$ dan $(G_d,*)$ merupakan grup klasik dan $P=(\mu_P,\eta_P,v_P), Q=\left(\mu_Q,\eta_Q,v_Q\right)$ merupakan PFSs dari G_c dan G_d berurutan, sedemikian hingga $P\times Q$ merupakan PFSG dari $G_c\times G_d$ maka kondisi berikut terpenuhi:

i. $\mu_Q(e_d)\geq \mu_P(h), \eta_Q(e_d)\geq \eta_P(h)$ dan $v_Q(e_d)\leq v_P(h)$ untuk setiap $h\in G_c$ dan e_d merupakan identitas dari G_d.

ii. $\mu_P(e_c)\geq \mu_Q(i), \eta_P(e_c)\geq \eta_Q(i)$ dan $v_P(e_c)\leq v_Q(i)$ untuk setiap $i\in G_d$ dan e_c merupakan identitas dari G_c.

Bukti: Andaikan kondisi di atas tidak ada yang terpenuhi, maka ada $h\in G_c$ dan $i\in G_d$ sedemikian sehingga $\mu_Q(e_d)<\mu_P(h)$,$\mu_P(e_c)<\mu_Q(i), \eta_Q(e_d)<\eta_P(h)$, $\eta_P(e_c)<\eta_Q(i)$ dan $v_Q(e_d)>v_P(h)$, $v_P(e_c)>v_Q(i)$. Maka diperoleh
$$\mu_{P\times Q}(h,i)=\min\left(\mu_P(h),\mu_Q(i)\right)>\min\left(\mu_Q(e_d),\mu_P(e_c)\right)=\mu_{P\times Q}(e_c,e_d)$$
$$\eta_{P\times Q}(h,i)=\min\left(\eta_P(h),\eta_Q(i)\right)>\min\left(\eta_Q(e_d),\eta_p(e_c)\right)=\eta_{P\times Q}(e_c,e_d)$$
dan
$$v_{P\times Q}(h,i)=\max\left(v_P(h),v_Q(i)\right)<\max\left(v_Q(e_d),v_P(e_c)\right)=v_{P\times Q}(e_c,e_d)$$
Maka, diperoleh bahwa $\mu_{P\times Q}(h,i)>\mu_{P\times Q}(e_c,e_d), \eta_{P\times Q}(h,i)>\eta_{P\times Q}(e_c,e_d)$, dan $v_{P\times Q}(h,i)<v_{P\times Q}(e_c,e_d)$. Hal ini kontradiksi karena (e_c,e_d) adalah identitas di $G_c\times G_d$ dan proporsisi 14. Diketahui bahwa $\mu_{P\times Q}(e_c,e_d)\geq \mu_{P\times Q}(h_c,h_d), \eta_{P\times Q}(e_c,e_d)\geq \eta_{P\times Q}(h_c,h_d)$ dan $v_{P\times Q}(e_c,e_d)\leq v_{P\times Q}(h_c,h_d)$ untuk setiap $(h_c,h_d)\in G_c\times G_d$. Oleh karena itu, salah satu kondisi harus terpenuhi.

Pangkat dari PFS P dapat didefinisikan sebagai pangkat dari masing-masing derajat keanggotaan dari masing-masing elemen. Mudah untuk memverifikasi bahwa pangkat m dari P, P^m juga merupakan PFS. Namun perlu didefinisikan terlebih dahulu mengenai pangkat dari PFS sebagai berikut.

Definisi 16 (Dogra & Pal, 2023)**.** Misalkan himpunan semesta A dan $P=(\mu_P,\eta_P,v_P)$ merupakan PFS di S maka untuk suatu bilangan bulat positif m, pangkat m dari PFS P adalah PFS $P^m=({\mu_P}^m,{\eta_P}^m,{v_P}^m)$ dimana ${\mu_P}^m(s)=(\mu_P(s))^m$, ${\eta_P}^m(s)=(\eta_P(s))^m$ dan ${v_P}^m(s)=(v_P(s))^m$ untuk semua $s\in S$. Secara jelas, $(\mu_P(s))^m\leq \mu_P(s), (\eta_P(s))^m\leq \eta_P(s)$ dan $(v_P(s))^m\leq v_P(s)$ dan $0\leq \mu_P(s)+\eta_P(s)+v_P(s)\leq 1$ untuk setiap $s\in S$. Jadi jelas bahwa $0\leq \left(\mu_P(s)\right)^m+\left(\eta_P(s)\right)^m+(v_P(s))^m\leq 1$ untuk setiap $s\in S$.

Proposisi 17. Misalkan $(G,*)$ merupakan grup dan $P = (\mu_P, \eta_P, v_P)$ merupakan PFSG dari G. Maka $P^m = (\mu_P{}^m, \eta_P{}^m, v_P{}^m) = ((\mu_P(a))^m, (\eta_P(a))^m, (v_P(a))^m)$ merupakan PFSG dari G untuk bilangan bulat positif m.
Bukti: Karena P merupakan PFSG, maka Untuk setiap $h, i \in G$.

$$\begin{aligned}
\mu_P{}^m(h * i^{-1}) &= \left(\mu_P(h * i^{-1})\right)^m \\
&\geq \left(\min\left(\mu_P(h), \mu_P(i)\right)\right)^m \\
&= \min\left(\left(\mu_P(h)\right)^m, \left(\mu_P(i)\right)^m\right) \\
&= \min(\mu_P{}^m(h), \mu_P{}^m(i)) \\
\eta_P{}^m(h * i^{-1}) &= \left(\eta_P(h * i^{-1})\right)^m \\
&\geq \left(\min\left(\eta_P(h), \eta_P(i)\right)\right)^m \\
&= \min\left(\left(\eta_P(h)\right)^m, \left(\eta_P(i)\right)^m\right) \\
&= \min(\eta_P{}^m(h), \eta_P{}^m(i)) \\
v_P{}^m(h * i^{-1}) &= \left(v_P(h * i^{-1})\right)^m \\
&\leq \left(\max\left(v_P(h), v_P(i)\right)\right)^m \\
&= \max\left(\left(v_P(h)\right)^m, \left(v_P(i)\right)^m\right) \\
&= \max(v_P{}^m(h), v_P{}^m(i))
\end{aligned}$$

Akibatnya, P^m merupakan PFSG dari G.

Definisi 18 (Dogra & Pal, 2023)**.** Untuk tiga bilangan real $\varepsilon_1 \in [0,1], \varepsilon_2 \in [0,1]$, dan $\varepsilon_3 \in [0,1]$ dengan $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$ dan $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$, didefinisikan PFS P teristriksi atas himpunan semesta S sebagai $P = \left\{\left(s, \mu_P(s), \eta_P(s), v_P(s)\right): s \in S\right\}$, dimana $\mu_P(s) \in [0, \varepsilon_1], \eta_P(s) \in [0, \varepsilon_2]$ dan $v_P(s) \in [0, \varepsilon_3]$ sehingga $0 \leq \mu_P(s) + \eta_P(s) + v_P(s) \leq 1$. Untuk setiap $s \in S$, $(\mu_P(s), \eta_P(s), v_P(s))$ disebut Picture Fuzzy Value (PFV). Dalam hal ini didefinisikan apabila PFS direstriksi oleh $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 0)$ maka merupakan PFV terbesar.

Sekarang, misalkan didefinisikan suatu tipe baru dari PFS direstriksi disebut PFS teristriksi dinormalisasi sebagai perluasan dari IFS yang ternormalisasi.

Definisi 19 (Dogra & Pal, 2023)**.** Misalkan $P = (\mu_P, \eta_P, v_P)$ merupakan PFS teristriksi di S, maka P disebut PFS teristriksi yang ternormalisasi jika ada $s \in S$ sehingga $\mu_P(s) = \varepsilon_1, \eta_P(s) = \varepsilon_2$, dan $v_P(s) = 0$.

Berdasarkan tiga bilangan riil $\varepsilon_1 \in [0,1], \varepsilon_2 \in [0,1]$, dan $\varepsilon_3 \in [0,1]$ dengan kondisi $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$ dan $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1$, banyak PFS teristriksi yang dapat diperoleh dan juga banyak PFS teristriksi yang ternormalisasi yang bersesuaian yang dapat diperoleh. Pilih $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 1$, maka $\mu_P(s) \in [0,1], \eta_P(s) = 0$ dan $v_P(s) \in [0,1]$ sehingga derajat keanggotaan netral dihapuskan. Jadi, PFS terestriksi menjadi IFS dan menjadi ternormalisasi ketika ada $s \in S$ sedimikian sehingga $\mu_P(s) = \varepsilon_1 = 1$ dan $v_P(s) = 0$ yang familiar dengan konsep IFS ternormalisasi. Jadi, PFS terentriksi ternormalisasi dapat dibuat sebagai perluasan normalisasi dari IFS.

Proporsisi 20 (Dogra & Pal, 2023)**.** Misalkan $(G,*)$ merupakan grup klasik dan $P = (\mu_P, \eta_P, v_P)$ merupakan PFS terestriksi yang ternormalisasi membentuk PFSG dari G, maka $\mu_P(e) = \varepsilon_1, \eta_P(e) = \varepsilon_2$ dan $v_p(e) = 0$ dimana e merupakan identitas di G.

Bukti: Karena P merupakan PFS terestriksi yang ternormalisasi, lebih lanjut ada suatu $h \in G$ sehingga $\mu_P(h) = \varepsilon_1, \eta_P(h) = \varepsilon_2$ dan $v_p(h) = 0$. Berdasarkan proporsisi 5 diketahui bahwa $\mu_P(e) \geq \mu_P(h) = \varepsilon_1, \eta_P(e) \geq \eta_P(h) = \varepsilon_2$ dan $v_p(e) \leq v_p(h) = 0$. Hal ini menyebabkan $\mu_P(e) = \varepsilon_1, \eta_P(e) = \varepsilon_2$ dan $v_p(e) = 0$.

Definisi 21. Misalkan $(G,*)$ merupakan grup klasik dari G dan $P = (\mu_P, \eta_P, v_P), Q = \left(\mu_Q, \eta_Q, v_Q\right)$ dengan dua PFSGs G. Maka P merupakan konjugat ke Q jika ada $h \in G$ sedemikian hingga $\mu_P(u) = \mu_Q(h * u * h^{-1}), \eta_P(u) = \eta_Q(h * u * h^{-1}), v_P(u) = v_Q(h * u * h^{-1})$ untuk setiap $u \in G$.

Proposisi 22. Misalkan $(G,*)$ merupakan grup klasik dan $P = (\mu_P, \eta_P, v_P), Q = \left(\mu_Q, \eta_Q, v_Q\right), R = (\mu_R, \eta_R, v_R), S = (\mu_S, \eta_S, v_S)$ merupakan empat PFSGs dari G sedemikian hingga P konjugat ke R dan Q konjugat ke S, maka $P \times Q$ konjugat ke $R \times S$.

Bukti: Karena P merupakan konjugat ke R, lebih lanjut $\mu_P(u_1) = \mu_R(h * u_1 * h^{-1}), \eta_P(u_1) = \eta_R(h * u_1 * h^{-1})$ dan $v_P(u_1) = v_R(h * u_1 * h^{-1})$ untuk suatu $h \in G$ dan untuk setiap $u_1 \in G$. Karena Q merupakan konjugat S, lebih lanjut $\mu_Q(u_2) = \mu_S(i * u_2 * i^{-1}), \eta_Q(u_2) = \eta_S(i * u_2 * i^{-1})$ dan $v_Q(u_2) = v_S(i * u_2 * i^{-1})$ untuk suatu $i \in G$ dan untuk setiap $u_2 \in G$.

Perhatikan untuk suatu $(h, i) \in G \times G$ dan setiap $(u_1, u_2) \in G \times G$.

$$\begin{aligned}
\mu_{P\times Q}(u_1, u_2) &= \min\left(\mu_P(u_1), \mu_Q(u_2)\right) \\
&= \min(\mu_R(h * u_1 * h^{-1}), \mu_S(i * u_2 * i^{-1})) \\
&= \mu_{R\times S}\left((h,i)(u_1,u_2)(h,i)^{-1}\right). \\
\eta_{P\times Q}(u_1, u_2) &= \min\left(\eta_P(u_1), \eta_Q(u_2)\right) \\
&= \min(\eta_R(h * u_1 * h^{-1}), \eta_S(i * u_2 * i^{-1})) \\
&= \eta_{R\times S}\left((h,i)(u_1,u_2)(h,i)^{-1}\right), \\
v_{P\times Q}(u_1, u_2) &= \max\left(v_P(u_1), v_Q(u_2)\right) \\
&= \max(v_R(h * u_1 * h^{-1}), v_S(i * u_2 * i^{-1})) \\
&= v_{R\times S}\left((h,i)(u_1,u_2)(h,i)^{-1}\right),
\end{aligned}$$

Lebih lanjut, $P \times Q$ konjugat terhadap $R \times S$.

SIMPULAN

Himpunan S yang kemudian dibuat menjadi himpunan dengan setiap anggotanya memiliki tiga derajat keanggotaan yaitu derajat keanggotaan positif, negatif dan netral dengan penjumlahan dari tiga derajat keanggotaan tersebut berada pada interval [0,1] disebut picture fuzzy set (PFS) atas S. Apabila $(G,*)$ merupakan grup maka PFS atas G disebut picture fuzzy subgrup (PFSG) jika $\mu_P(h*i) \geq \min(\mu_P(h),\mu_P(i))$; $\eta_P(h*i) \geq \min(\eta_P(h),\eta_P(i))$;
$\nu_P(h*i) \leq \max(\nu_P(h),\nu_P(i))$ untuk setiap h,i di G dan $\mu_P(h^{-1}) \geq \mu_P(h)$; $\eta_P(h^{-1}) \geq \eta_P(h)$; $\nu_P(h^{-1}) \leq \nu_P(h)$ untuk setiap h di G. Beberapa sifat dan terminologi pada PFSG memiliki kemiripan dengan struktur aljabar grup baik itu irisan, gabungan, hasil kali silang, perpangkatan dan konjugatnya. Namun selain hasil operasi pada struktur himpunannya juga ada sifat-sifat dan terminologi terkait derajat keanggotaannya yang penurunan sifatnya mirip dengan grup fuzzy dan grup intutiosionitik fuzzy. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan pada aspek relasi atau fungsi antara dua PFSG, seperti homomorfisma pada PFSG yang akibatnya juga bisa melihat kernel dan imagenya.

REFERENSI

Abdy, M., Sukarna, S., & Abubakar, R. (2019). Suatu Kajian Tentang Grup Fuzzy. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, *1*(1), 78. https://doi.org/10.35580/jmathcos.v1i1.9181

Amaluddin, A., & Surodjo, B. (2020). Subgrup Normal Multi-Fuzzy, Subgrup Normal Multi-Anti Fuzzy, Dan Teorema Korespondensi. *Jurnal Matematika Thales*, *2*(2), 24–40. https://doi.org/10.22146/jmt.52857

Cuong, B. C., & Kreinovich, V. (2013). Picture Fuzzy Sets - a new concept for computational intelligence problems. *Proceedings of the Third World Congress on Information and Communication Technologies WICT'2013*, 1–6.

Dogra, S., & Pal, M. (2023). Picture Fuzzy Subgroup. *Kragujevac Journal of Mathematics*, *47*(6), 911–933.

Dutta, P., & Ganju, S. (2018). Some aspects of picture fuzzy set. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, *172*(2), 164–175. https://doi.org/10.1016/j.trmi.2017.10.006

Ejegwa, P. A., & Otuwe, J. A. (2020). Frattini Fuzzy Subgroups of Fuzzy Groups. *Journal of Universal Mathematics*, *2*(2), 94–102.

Geetha, S. S., & Selvakumari, K. (2020). A Picture Fuzzy Approach to Solving Transportation Problem. *European Journal of Molecular & Clinical Medicine*, *7*(2), 4982–4990.

Li, Y., Wang, X., & Yang, L. (2013). A study of (λ,μ) -fuzzy subgroups. *Journal of Applied Mathematics*, *2013*(i). https://doi.org/10.1155/2013/485768

Mihsin, B. K. (2015). Some Properties of a Fuzzy subgroup Homomorphism. *Journal of Kerbala University*, *13*(4).

Moderson,J.N., Bhutani,K.R., & Rosenfeld, A. (2005). *Fuzzy group theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/8/085201

Nguyen, V. D., & Nguyen, X. T. (2018). Some Measures of Picture Fuzzy Sets and Their Application in Multi-attribute Decision Making. *International Journal of*

Mathematical Sciences and Computing, *4*(3), 23–41. https://doi.org/10.5815/ijmsc.2018.03.03

Oktaviani, D. R., & Habiburrohman, M. (2023). Kernel dari fuzzy grup. *Jurnal Matematika UNAND*, *12*(1), 46–54.

Oqla Massa'deh, M. (2016). A Study on Intuitionistic Fuzzy and Normal Fuzzy M-Subgroup, M-Homomorphism and Isomorphism. *International Journal of Industrial Mathematics*, *8*(3), 185–188.

P.K., S. (2013). Fuzzy Subgroup. *International Journal of Recent Technology and Engineering*, *1*(1), 47–60.

Priya, T., Ramachandran, T., & Nagalakshmi, K. T. (2013). *On Q-Fuzzy Normal Subgroups*. *3*(6), 39–42.

Sailaja, B., & Prasad, V. B. V. N. (2021). The interaction between a Q-fuzzy normal subgroup and a Q-fuzzy characteristic subgroup. *Journal of Mathematical and Computational Science*, *11*(1), 819–831. https://doi.org/10.28919/jmcs/5166

Silambarasan, I. (2021). *Some Algebraic Properties of Picture Fuzzy Sets*. *11*(March), 429–442. https://doi.org/10.7251/BIMVI2103429S

Tarmizi, M., & Abdurrahman, S. (2019). Grup Faktor Yang Dibangun Dari Subgrup Normal Fuzzy. *Jurnal Matematika Murni Dan Terapan Epsilon*, *13*(1), 1. https://doi.org/10.20527/epsilon.v13i1.1240

Zadeh, L. A. (1965). *Fuzzy sets, information and control, 8: 338-353*.